

Feuille 6 de TD. Théorie des distributions

1. À f comme ci-dessous, peut-on associer une distribution T_f ?

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, b) $f(x) = \sin(1/x^2)$, c) $f(x) = \frac{1}{x}$, d) $f(x) = \frac{1}{|x|}$, e) $f(x) = |x|$.

2. Calculer les primitives des distributions suivantes :

a) δ' , b) $\operatorname{sgn} x$, c) III_1 , d) $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$.

3. Résoudre l'équation $u' + au = T$, avec :

a) $a(x) = x$, $T = \delta$, b) $a(x) = 1$, $T = H$, c) $a(x) = e^{-x}$, $T = \delta'$.

4. Calculer :

a) af , avec $a \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, b) $(\sin \sqrt{|x|})'$, c) $|x|''$,

d) f' , avec $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

5. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{\varepsilon x}$, b) $\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-ax^2}$, c) $\lim_{t \rightarrow \infty} \sin(tx^2)$.

[Indication pour la dernière question : étudier séparément $\int_0^\infty \sin(tx^2) \varphi(x) dx$ et

$\int_{-\infty}^0 \sin(tx^2) \varphi(x) dx$. Dans chaque intégrale, faire le changement de variable $x^2 = y$, puis utiliser le lemme de Riemann-Lebesgue.]

6. Calculer les produits de convolution suivants :

$$\text{a) } \delta' * H, \text{ b) } \text{III}_4 * P_1 \text{ (avec } P_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \text{.)}$$

7. Calculer les transformées de Fourier suivantes :

$$\text{a) } \widehat{H}, \text{ b) v. p. } \widehat{\frac{1}{x}}.$$

[Indication pour a) : calculer la transformée de Fourier de $f_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{-\varepsilon x}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$, puis faire $\varepsilon \rightarrow 0+$.]

[Indication pour b) : on part de f_ε comme ci-dessus, et du théorème de Plancherel.]