Analyse T4, TD n° 6 / octobre novembre 2016

Introduction aux distributions

1. Fonctions tests.

2. Distributions sur R.

3. Exemples de distributions.

4. Dérivation, multiplication.

5. Equations différentielles.

6. Distributions sur $\mathbf{R}^n$.

7. Exercices corrigés.

Pierre-Jean Hormière

Introduction[1]

Il est arrivé à maintes reprises que certaines exigences de la physique, par exemple, aient conduit les utilisateurs des mathématiques à des « calculs » non rigoureusement justifiables au moyen des concepts mathématiques existants, mais qui traduisaient avec succès la réalité expérimentale. C'est ainsi qu'en 1894 l'ingénieur Heaviside (1859-1925) introduisit dans l'étude des réseaux électriques les règles de son *calcul symbolique*, qui ne fut justifié mathématiquement que postérieurement. L'étude des équations aux dérivées partielles conduisait aussi à des extensions des matériaux mathématiques traditionnels. Le problème de Dirichlet (trouver une fonction harmonique dans un ouvert de $\mathbf{R}^n$ connaissant ses valeurs sur la frontière) avec les méthodes de l'espace de Hilbert, a conduit les mathématiciens à généraliser les solutions acceptables d'une telle équation en introduisant la notion de *solution faible*. Le soviétique Serguei Sobolev (1908-1989) a construit, en 1934, des classes de fonctions généralisées qui justifiaient de manière rigoureuse ce genre de considération.

Les transformations de Fourier et de Laplace conduisaient aussi à généraliser des fonctions. En 1926, P.A.M. Dirac (1902-1984) introduisait en physique mathématique sa célèbre « fonction » δ_0, nulle en dehors de l'origine et d'intégrale égale à 1, qui représentait une impulsion unité à l'instant $t = 0$, donc d'effet nul pour $t \neq 0$. Puisque δ_0 n'est pas une fonction au sens usuel (car une fonction nulle pour $t \neq 0$ est d'intégrale nulle), sa justification mathématique correcte conduisait à une extension de la notion de fonction.

Cette extension a été présentée sous sa forme actuelle entre 1945 et 1955 par le français Laurent Schwartz (1915-2002), dans le cadre des espaces vectoriels topologiques ; parmi ses nombreuses applications, citons : les équations aux dérivées partielles linéaires, la représentation des groupes de Lie, les processus stochastiques, les variétés différentiables, la physique mathématique, la physique expérimentale (« déconvolution » et identification de systèmes).

Comme le note Roger Godement : « *La théorie générale des distributions, qui valut à Schwartz la première médaille Fields française en 1950, ne contenait aucun théorème vraiment « profond » – il n'en est pas de même, à beaucoup près, de ses applications – et demandait « seulement » la capacité de détecter des analogies entre une douzaine de*

---

[1] Tirée de l'Encyclopedia universalis (Paul Krée)

domaines disparates et d'isoler le principe général qui unifierait tout. Les philosophes des sciences appellent cela un paradigme, une vision nouvelle qui non seulement met de l'ordre et de la clarté dans le chaos, mais aussi et surtout permet de poser de nouveaux problèmes. La gravitation universelle, l'analyse de Newton et Leibniz, la théorie atomique en chimie, les théories de l'évolution de Darwin, de l'hérédité de Mendel, les bactéries de Pasteur, la relativité et la mécanique quantique, etc. » [2].

Dans cet exposé, on considère d'abord les fonctions et distributions à une variable. L'extension à plusieurs variables est esquissée au § 6.

1. Fonctions tests.

1.1. Rappels de calcul différentiel.

Nous nous contenterons ici de deux résultats.

Théorème de la limite de la dérivée : Soient I un intervalle de **R**, a un point de I, $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur $\mathrm{I}-\{a\}$ et continue en a. Si $\lim_{x\to a, x\neq a} f'(x)$ existe et vaut L, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \mathrm{L}$.

Ce résultat est une conséquence du théorème des accroissements finis.

Théorème de division des fonctions dérivables : Soit f une fonction C^∞ sur **R**. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$;

ii) Il existe une fonction g de classe C^∞ sur **R** telle que $\forall x \quad f(x) = x^n g(x)$.

Le sens ii $\Rightarrow$ i) est facile. La réciproque découle de la formule de Taylor avec reste intégral, car alors, pour tout x : $f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(t).dt = x^n \int_0^1 \frac{(1-u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(xu).du$, en posant $t = xu$.

La fonction $g(x) = \int_0^1 \frac{(1-u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(xu).du$ est C^∞ en vertu du théorème de dérivation des intégrales à paramètre sur les segments. Bien entendu, ce résultat s'étend à tout autre point que 0.

1.2. Notion de fonction plate.

Définition 1 : Soient I un intervalle non trivial de **R**, a un point de I. Une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou **C** de classe C^∞ est dite **plate en *a*** si toutes ses dérivées sont nulles au point a.

Propriétés générales :

1) Si f est plate en a, la série de Taylor de f en a est la série nulle.

2) Une fonction f plate en a vérifie $f(x) = o((x-a)^n)$ pour tout n, au voisinage de a.
Cela découle aussitôt du théorème de Taylor-Young.

3) La réciproque est fausse. Si $f(x) = o((x-a)^n)$ pour tout n, au voisinage de a, f est continue et dérivable en a, $f(a) = f'(a) = 0$, mais on ne peut en dire plus, comme nous verrons.

4) En revanche, si f est C^∞ sur I et vérifie $f(x) = o((x-a)^n)$ pour tout n au voisinage de a, alors f est plate en a.

5) Si f est C^∞ sur I et plate en a, pour tout n et tout x, $f(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t).dt$.

Cela découle de la formule de Taylor avec reste intégral. Ici, la suite des restes ne tend pas vers 0, elle est au contraire constante et égale à $f(x)$.

---

[2] Roger Godement (1921 – 2016), *Analyse mathématique*, tome II, p. 179 (Springer, 1998)

6) Les fonctions de I dans **K** plates en a forment un sous-espace vectoriel et un idéal de $C^\infty(I, \mathbf{K})$.

De plus si f est plate en a, il en est de même de f' et de $F(x) = \int_a^x f(t).dt$.

La deuxième assertion découle aussitôt de la formule de Leibniz.

7) Soient I et J deux intervalles non triviaux, $g : I \to J$ une fonction C^∞, $g(a) = b$ et $f : J \to \mathbf{K}$ une fonction C^∞ plate en b, alors $h = f \circ g : I \to \mathbf{K}$ est C^∞ et plate en a.

En effet, h est C^∞ comme composée, et son développement limité en a est nul à tous ordres par composition des développements limités. h est plate en tous les points a tels que $g(a) = b$.

8) Si une fonction f est plate en a et développable en série entière au $V(a)$, elle est identiquement nulle au $V(a)$.

Tout cela est bien joli… à condition qu'il existe des fonctions plates non nulles !

<u>Un premier exemple de fonction plate</u>.

En 1822, sous le règne du bon roi Louis XVIII, Augustin Cauchy a démontré l'existence de fonctions plates non triviales. Ces fonctions n'étaient alors que des contre-exemples, des curiosités mathématiques. Nul ne pouvait penser, alors, que ces contre-exemples deviendraient plus tard les matériaux de base d'une théorie. De même, qui pouvait penser que les fonctions continues nulle part dérivables seraient les matériaux de base des fractales ?

Considérons la fonction f définie par $f(x) = e^{-1/x}$ pour $x > 0$.

Elle est de classe C^∞ et vérifie $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x}$, $f''(x) = \frac{-2x+1}{x^4} e^{-1/x}$.

Donc f est croissante, convexe sur $]0, ½]$, concave sur $[½, +\infty[$, de limite 0 en 0+, 1 en $+\infty$.
Prolongeons f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Pour tout entier $n \geq 1$, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-1/x}$, où P_n est un polynôme à coefficients dans **Z**, de degré $n-1$, de terme dominant $n!\, x^{n-1}$ et de terme constant $(-1)^{n-1}$.

Cela se montre par récurrence sur n. C'est vrai aux rangs $n = 1$ et 2. Si c'est vrai au rang n, alors

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n-1}\left[\frac{P_n'(x)}{x^{2n}} - \frac{2nP_n(x)}{x^{2n+1}} + \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} \right] e^{-1/x} = (-1)^n \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2n+2}} e^{-1/x} ,$$

où $$P_{n+1}(x) = (2nx - 1)\, P_n(x) - x^2\, P_n'(x).$$

On conclut aussitôt que P_{n+1} est un polynôme à coefficients dans **Z**, de degré n, de coefficient dominant $(n + 1)\, x^n$ et de terme constant $(-1)^{n+1}$.

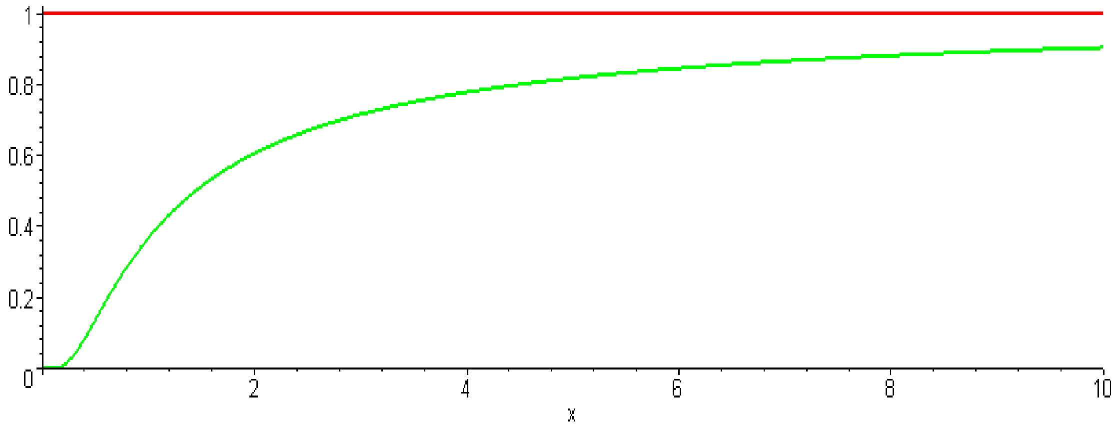
<u>Conséquences</u> : 1) Pour tout n , $\lim_{x \to 0+} f^{(n)}(x) = 0$.

En effet, $f^{(n)}(x) = O(\frac{e^{-1/x}}{x^{2n}}) \subset o(1)$ par comparaison exponentielle-puissance (poser $y = 1/x$).

2) Par applications répétées du théorème de la limite de la dérivée, f est C^∞ sur $[0, +\infty[$ et a toutes ses dérivées nulles en 0. Bref, c'est une fonction plate en 0, non identiquement nulle.

Avec Maple :

```
> with(plots):
> f:=x->exp(-1/x);plot([1,f(x)],x=0..10,thickness=2);
```



<u>Autres exemples de fonctions plates</u> :

A l'aide de cette fonction f on peut fabriquer de nombreuses fonctions plates.

1) La fonction f_0, nulle sur $\mathbf{R}^-$, égale à f sur $]0, +\infty[$, est C^∞ sur $\mathbf{R}$ et plate en 0.

La fonction paire $x \to e^{-1/|x|}$ prolonge f, est C^∞ sur $\mathbf{R}$ et plate en 0. Elle vaut d'ailleurs $f_0(x) + f_0(-x)$.

Plus généralement, les fonctions $x \to a\,e^{-1/x}$ pour $x > 0$, $x \to b\,e^{1/x}$ pour $x < 0$, forment un plan vectoriel de fonctions plates en 0. Ces fonctions sont égales à $a.f_0(x) + b.f_0(-x)$.

2) Soient h une fonction de classe C^p $(0 \le p \le +\infty)$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, U l'ouvert $\{ x \,;\, h(x) > 0 \}$.

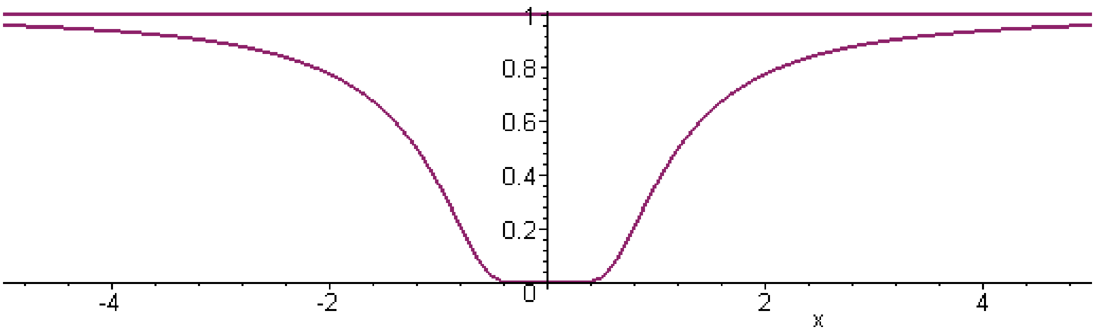
La fonction f_h définie par $f_h(x) = \exp(-\frac{1}{h(x)})$ si $x \in$ U, $f_h(x) = 0$ si $x \notin$ U, est de classe C^p.

<u>Preuve</u> : Il suffit de noter que $f_h = f_0 \circ h$.

Exemples :

a) La fonction $g(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$ si $x \in \mathbf{R}^*$, $g(0) = 0$, est C^∞ et plate en 0.

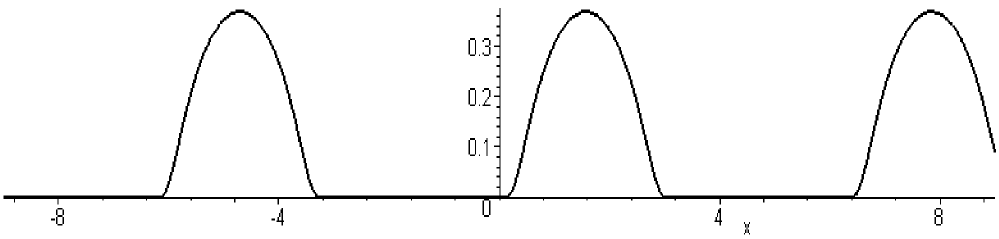
```
> g:=x->f(x^2);plot([1,g(x)],x=-5..5,thickness=2,color=maroon);
```

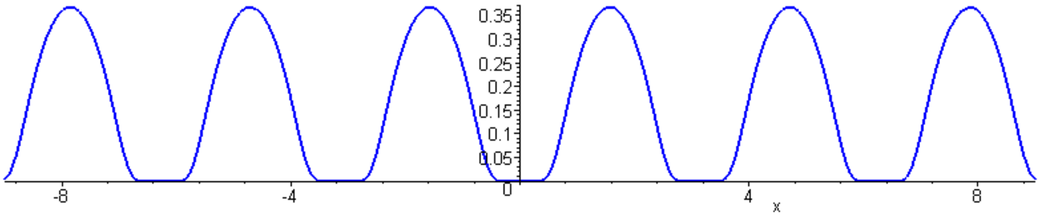


b) La fonction $f_h(x) = \exp(-\frac{1}{\sin x})$ si $2n\pi < x < (2n+1)\pi$, $f_h(x) = 0$ sinon, est C^∞ et plate aux points $k\pi$; la fonction $g_h(x) = \exp(-\frac{1}{\sin^2 x})$ si $x \notin \{n\pi\}$, $g_h(n\pi) = 0$.

```
> f0:=x->piecewise(x > 0,f(x),x <= 0, 0);plot(f0(sin(x)),x=-9..9,
thickness=2,color=black);plot(g(sin(x)),x=-9..9,thickness=2,color=blue);
```

$$f0 := x \to \text{piecewise}(0 < x, f(x), x \le 0, 0)$$





3) Les fonctions $f_n(x) = f(x^n) = e^{-1/|x^n|}$ sont plates en 0 et vérifient pour tout n $f_{n+1}(x) = o(f_n(x))$ au V(0). On en déduit que les fonctions plates en 0 forment un espace vectoriel de dimension infinie. On aurait aussi pu considérer la suite de fonctions $f_n(x) = f(x)^n = e^{-n/|x|} = f(x/n)$ ou $x \to x^n\ e^{-1/|x|}$.

1.3. Notion de fonction-test.

Les distributions sont des fonctionnelles linéaires particulières sur l'espace des fonctions tests. Commençons par définir ces fonctions tests :

Définition 2 : On appelle **fonction-test**, ou **fonction de base**, une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ à support borné, c'est-à-dire nulle en dehors d'un segment [a, b], dépendant de φ.

Propriétés générales :

1) L'ensemble $\mathfrak{D}$ des fonctions-tests est un sous-espace vectoriel et un idéal de $C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$.

2) Si φ est une fonction-test, il en est de même de φ'.

3) Si φ est une fonction-test de **R** dans **R** et f une fonction $C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, $f \circ \varphi$ est une fonction-test.

4) Toute fonction-test φ s'écrit de façon unique sous la forme $\varphi(x) = \psi(x) + x.\zeta(x)$, où ψ et ζ sont des fonctions-tests paires. Il suffit de noter que :

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2} + \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{2} = \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2} + x\,\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{2x},$$

où $$\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{2x} = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{+x}\varphi(t).dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\varphi(xu).du$$

fonction C^∞ en vertu du théorème de dérivation des intégrales à paramètre sur les segments.

Exemples de fonctions-tests.

1) Considérons la fonction $\varphi(x) = \exp\frac{1}{x^2-1}$ si $|x| < 1$, $\varphi(x) = 0$ si $|x| \geq 1$.

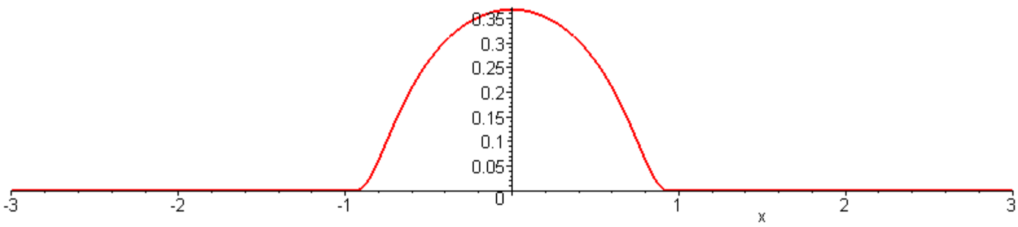
Elle est paire, continue, croissante sur [−1, 0], décroissante sur [0, 1]

φ est de classe C^∞ sur **R**, car $\varphi = f_h$, où $h(x) = 1 - x^2$.

NB : On a aussi $\exp\frac{1}{x^2-1} = \exp\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) = \exp\left(\frac{1}{2x-2} - \frac{1}{2x+2}\right) = f(2x+2).f(2-2x)$.

On vérifie sans peine que, pour tout x, $\varphi(x) = f_0(2x+2).f_0(2-2x)$.

```
> h:=x->piecewise(x<-1, 0,x>1, 0, x<1 and -1<x,exp(1/(x^2-1)));
> plot(h(x),x=-3..3,thickness=2);
```



2) Plus généralement, si $a < b$, $\varphi_{a,b}(x) = \exp\frac{1}{(x-a)(x-b)}$ si $a < x < b$, $\varphi_{a,b}(x) = 0$ si $x \notin]a, b[$, est une fonction-test, dont le support est $[a, b]$.

3) Considérons la fonction $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t).dt$. Elle est C^{∞} sur **R**, positive et croissante, nulle sur $]-\infty, -1]$, constante sur $[1, +\infty[$ égale à $C = \int_{-1}^{+1} \varphi(t).dt$. A l'aide de Φ, on peut aisément construire une fonction test ψ, à valeurs dans [0, 1], de support [−1, 1], égale à 1 sur [−½, ½]. Il s'agit de :

$$\psi(x) = \frac{1}{C^2}\Phi(4x + 3).\Phi(-4x + 3).$$

1.4. <u>Convolution</u>.

Proposition : Soient φ une fonction-test, f une fonction réglée à support borné. Leur convolée $\varphi * f$ définie par $\forall x \in \mathbf{R} \quad (\varphi * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-t).f(t).dt$ est une fonction-test.

<u>Preuve</u> : Supposons le support de φ inclus dans [a, b], celui de f dans [c, d].
$(\varphi * f)(x) = \int_{c}^{d} \varphi(x-t).f(t).dt$ est C^{∞} en vertu du théorème de dérivation des intégrales à paramètre sur les segments, et nulle hors de [a + c, b + d].

2. <u>Distributions sur R</u>.

2.1. <u>L'espace vectoriel topologique $\mathfrak{D}$</u>.

Soit $\mathfrak{D}$ l'espace vectoriel des fonctions $\varphi \in C^{\infty}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ à support borné, c'est-à-dire nulles en dehors d'un segment [a, b], dépendant de φ. Les éléments φ de $\mathfrak{D}$ sont appelés **fonctions-tests**, ou **fonctions de base**.

Munissons $\mathfrak{D}$ de la notion de convergence suivante :

Définition 1 : On dit que la suite (φ_n) d'éléments de $\mathfrak{D}$ tend vers l'élément φ de $\mathfrak{D}$ si :

i) Il existe un segment [a, b] tel que $\forall n \ \ \forall x \notin [a, b] \ \ \varphi_n(x) = 0$;

ii) Pour tout entier $k \geq 0$, la suite $(\varphi_n^{(k)})$ des dérivées k-ièmes converge uniformément vers la dérivée k-ième $\varphi^{(k)}$ de φ .

Cette notion de convergence possède les propriétés suivantes :

a) Si φ est un élément de $\mathfrak{D}$, la suite constante égale à φ converge vers φ.

b) Si (φ_n) et (ψ_n) sont deux suites d'éléments de $\mathfrak{D}$ tendant resp. vers φ et ψ, la suite $(\lambda.\varphi_n + \psi_n)$ converge vers $\lambda.\varphi + \psi$.

c) Si (φ_n) converge vers φ, toute suite extraite converge vers φ.

d) Si (φ_n) converge vers φ, la suite des dérivées (φ'_n) converge vers φ'. La dérivation est donc un endomorphisme (séquentiellement) continu de $\mathfrak{D}$.

Exercice : Montrer que, si (φ_n) converge vers φ, la $\left(\frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(0)}{x}\right)$ converge vers $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$, $\left(\frac{\varphi_n(x)+\varphi_n(-x)}{2}\right)$ converge vers $\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2}$, et $\left(\frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(-x)}{2x}\right)$ converge vers $\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{2x}$.

<u>Remarque</u> : Existe-t-il une topologie sur l'espace $\mathfrak{D}$, telles que la suite (φ_n) d'éléments de $\mathfrak{D}$ tend vers $\varphi \in \mathfrak{D}$ ssi (φ_n) tend vers φ au sens de cette topologie ? La réponse est positive, mais n'est pas abordée ici.

2.2. <u>Distributions</u>.

Définition 2 : On appelle **distribution** (sur **R**) une forme linéaire (séquentiellement) continue sur $\mathfrak{D}$, i.e. une application : $\quad T : \varphi \in \mathfrak{D} \to T(\varphi) = \langle T , \varphi \rangle \in \mathbf{C} \quad$ vérifiant :

(D1) $< T , \lambda.\varphi + \psi > = \lambda.< T , \varphi > + < T , \psi >$

(D2) Pour toute suite (φ_n) d'éléments de $\mathfrak{D}$ tendant vers $\varphi \in \mathfrak{D}$, $\lim_{n\to\infty} < T, \varphi_n > = < T, \varphi >$.

<u>Exemple</u> : L'application $T : \varphi \in \mathfrak{D} \to \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x).dx \in \mathbf{C}$ est une distribution.

En effet, elle est bien définie, linéaire, et continue <u>au sens ci-dessus</u>. Elle est définie, car l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x).dx$ n'est pas une intégrale impropre : elle vaut $\int_a^b \varphi(x).dx$, pour tout segment [a, b] contenant le support de φ. Elle est évidemment linéaire, et elle est continue, car si les supports des φ_n sont tous inclus dans un même segment [a, b], et si (φ_n) tend uniformément vers φ, alors φ est nulle hors de [a, b], et $\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \right| \leq (b - a) \| \varphi_n - \varphi \|_\infty$.

Attention ! T n'est pas continue pour la norme uniforme. Ainsi, la suite de fonctions $\varphi_n(x) = \frac{1}{2n}$ si $|x| \leq n$, 0 sinon, tend uniformément vers 0, mais $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n = 1$. Ici, les supports des φ_n ne sont pas inclus dans un même segment [a, b]. Pour les spécialistes, la topologie introduite par L. Schwartz sur $\mathfrak{D}$ est une « limite inductive d'espaces de Fréchet ».

L'ensemble des distributions est noté $\mathfrak{D}'$. C'est un sous-espace vectoriel du dual algébrique $\mathfrak{D}^*$ de l'espace $\mathfrak{D}$. Nous allons munir à son tour cet espace d'une notion de convergence.

Définition 3 : On dit que la suite (T_n) de distributions **converge** vers la distribution T si, pour toute $\varphi \in \mathfrak{D}$, la suite $(T_n(\varphi))$ tend vers $T(\varphi)$.

Cette notion de convergence possède les mêmes propriétés que la convergence dans $\mathfrak{D}$:

a) Si T est un élément de $\mathfrak{D}'$, la suite constante égale à T converge vers T.

b) Si (T_n) et (U_n) sont deux suites d'éléments de $\mathfrak{D}'$ tendant resp. vers T et U, la suite $(\lambda.T_n + U_n)$ converge vers $\lambda.T + U$.

c) Si (T_n) converge vers T, toute suite extraite converge vers T.

Théorème (Banach-Steinhaus-Schwartz) : Soit (T_n) une suite de distributions. Si, pour toute fonction-test $\varphi \in \mathfrak{D}$, la suite $(< T_n , \varphi >)$ converge, alors l'application T, définie dans $\mathfrak{D}$, qui à φ fait correspondre $\lim_{n\to+\infty} < T_n , \varphi >$, est une distribution, limite de la suite des distributions T_n.

Cette propriété, que nous admettrons, est généralement très facile à vérifier en pratique, et permet de définir de nombreuses distributions nouvelles à partir de distributions déjà connues. La notion de suite convergente de distributions permet de définir des séries convergentes de distributions ; le théorème précédent se traduit immédiatement en termes de séries.

2.3. <u>Propriétés locales des distributions</u>.

Définition 4 : Soit U un ouvert de **R**. On dit qu'une distribution T est nulle dans U si :

$$\forall \varphi \in \mathfrak{D} \qquad \mathrm{Supp}(\varphi) \subset U \;\Rightarrow\; < T , \varphi > = 0$$

et que deux distributions T_1 et T_2 coïncident sur U si $T_1 - T_2$ est nulle sur U.

On peut démontrer que la réunion des ouverts sur lesquels T est nulle est un ouvert sur lequel T est nulle. Le complémentaire de cet ouvert est appelé **support** de T, et l'on a :

$$\forall \varphi \in \mathfrak{D} \qquad \mathrm{Supp}(\varphi) \cap \mathrm{Supp}(T) = \varnothing \;\Rightarrow\; < T , \varphi > = 0.$$

3. <u>Exemples de distributions</u>.

Nous allons voir que les distributions généralisent les fonctions, un peu au sens où les complexes généralisent les réels. Un réel n'est pas un complexe, car un complexe est un couple de réels. Mais, si l'on identifie le réel *x* au complexe (*x*, 0), alors on plonge **R** dans **C**, et ce plongement préserve les opérations : c'est un morphisme injectif de corps. De même, une fonction n'est pas une distribution, mais on peut associer à toute fonction *f* usuelle une distribution T_f. Cette correspondance est linéaire, et presque injective. Dans la suite, nous verrons qu'elle préserve de nombreuses opérations : dérivation, et, partiellement, multiplication. Mais toute distribution T n'est pas de la forme T_f, de même que tout complexe n'est pas un réel. Avec cette analogie, la distribution de Dirac δ joue un peu le rôle de l'unité imaginaire *i*. Cette analogie n'est toutefois que partielle, car, tandis que *i* n'est pas limite d'une suite de réels, δ est limite d'une suite de fonctions. Une meilleure analogie serait **Q** et **Q**[$\sqrt{2}$], δ jouant le rôle de $\sqrt{2}$.

3.1. <u>Les fonctions « sont » des distributions, les distributions sont des fonctions généralisées</u>.

• Soit *f* une fonction continue $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$. $< T_f , \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\varphi(x).dx$ est une distribution.

En effet, $x \to f(x).\varphi(x)$ est continue à support borné, donc intégrable sur **R**.
La linéarité est évidente. Enfin, si les fonctions sont toutes nulles en dehors du segment [a, b]

$$| < T_f , \varphi_n - \varphi > | = \left| \int_a^b f(x).(\varphi_n(x)-\varphi(x)).dx \right| \to 0 \text{ par convergence uniforme.}$$

Proposition 1 : Deux fonctions continues *f* et *g* définissent la même distribution ssi $f = g$.

Corollaire : L'application $f \in C(\mathbf{R}, \mathbf{C}) \to T_f \in \mathfrak{D}'$ est linéaire injective.

Il en résulte que l'on peut identifier la fonction continue *f* à la distribution qu'elle définit, et noter par abus

$$< f , \varphi > = < T_f , \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\varphi(x).dx .$$

En ce sens, les distributions généralisent les fonctions continues. L'identification de *f* et T_f est analogue à celle qu'on opère quand on confond le réel *a* et la fonction linéaire $x \to ax$, ou quand on confond la notion de nombre dérivé et celle de différentielle.

<u>Remarque</u> : Le support de *f* coïncide avec le support de T_f.

• Soit *f* une fonction réglée $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$. $< T_f , \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\varphi(x).dx$ est une distribution.

En effet, $x \to f(x).\varphi(x)$ est réglée à support borné, donc intégrable sur **R**, et l'on conclut comme ci-dessus.

• Plus généralement, une fonction localement intégrable, c'est-à-dire intégrable au sens de Riemann, ou de Lebesgue, sur tout segment, définit une distribution. C'est le cas des fonctions non bornées $x \to \ln|x|$, $x \to |x|^{-1/2}$, etc., quelle que soit leur valeur en 0.

Proposition 2 : Deux fonctions réglées *f* et *g* définissent la même distribution ssi *f* et *g* sont presque partout égales.

Théorème 3 (convergence uniforme) : Soit (f_n) une suite de fonctions réglées $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$, convergeant uniformément vers la fonction *f* sur tout segment. Alors *f* est réglée et, pour toute fonction $\varphi \in \mathfrak{D}$, on a : $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t).\varphi(t).dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\varphi(t).dt$, autrement dit, $\lim_{n\to+\infty} < f_n , \varphi > = < f , \varphi >$.

Théorème 4 (convergence dominée) : Soit (f_n) une suite de fonctions réglées $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$, convergeant simplement sur **R** vers une fonction réglée *f*, et uniformément majorée sur tout segment.
Alors pour toute fonction $\varphi \in \mathfrak{D}$, on a : $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t).\varphi(t).dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\varphi(t).dt$,

autrement dit, $\lim_{n\to+\infty} < f_n , \varphi > = < f , \varphi >$.

Le th. 4 généralise le th. 3. Dans les deux cas, la suite (f_n) tend vers *f* au sens des distributions.

Mais il peut arriver qu'une suite de fonctions converge au sens des distributions sans converger simplement.

Théorème 5 (Riemann-Lebesgue) : Soit $p : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction réglée T-périodique.

Pour toute $\varphi \in \mathfrak{D}$, on a $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(nt).\varphi(t).dt = \frac{1}{T}.\int_0^T p(t).dt \,.\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t).dt$.

Autrement dit, la suite de fonctions $p_n(t) = p(nt)$ converge, au sens des distributions, vers la fonction constante $\frac{1}{T}\int_0^T p(t).dt$, alors qu'elle ne converge en général pas simplement. Par exemple les suites de fonctions $\sin(nt)$, $\cos(nt)$, $\exp(int)$ tendent vers 0 en tant que distributions.

Remarques : 1) Tout ceci se généralise sans peine aux (classes d'équivalence de) fonctions localement intégrables au sens de Lebesgue. Je renvoie aux cours de Schwartz.

2) Si T est une distribution et φ une fonction-test quelconques, on note parfois :

$$< T , \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x).\varphi(x).dx \quad ,$$

par analogie avec la situation précédente. Il s'agit d'un grave abus de langage : la notation T(x) n'a pas de sens, puisque T n'est pas une fonction définie sur **R** : on ne peut attribuer aucune valeur à x, même si T est une classe de fonctions localement intégrables. Mais cet abus de langage a des avantages, car il souligne que les distributions généralisent les fonctions, et mesurent les fonctions-tests.

Définition 1 : Les distributions T de la forme T_f, où f est une fonction intégrable sur tout segment, sont dites **régulières**. Les autres sont dits **singulières**.

Nous allons étudier maintenant les plus simples des distributions singulières.

3.2. Distributions discrètes ou ponctuelles.

« Il est plus important d'avoir de belles équations que de les faire cadrer avec l'expérience. »

P. A. M. Dirac

La **distribution de Dirac** δ est définie par $< \delta , \varphi > = \varphi(0)$.

La distribution de Dirac au point a est définie par $< \delta_{(a)} , \varphi > = \varphi(a)$.

Avec les notations précédentes :

$$< \delta , \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x).\varphi(x).dx = \varphi(0) \quad \text{et} \quad < \delta_{(a)} , \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a).\varphi(x).dx = \varphi(a) .$$

La distribution δ est nulle sur $\mathbf{R}^*$, la distribution $\delta_{(a)}$ est nulle sur $\mathbf{R} - \{a\}$, au sens donné à ce terme au § 2. 3. Le support de $\delta_{(a)}$ est $\{a\}$.

Bien entendu si $(a_n) \to a$, $\delta_{(a_n)} \to \delta_{(a)}$.

Soient $a > 0$, et $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une suite complexe, $T = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\lambda_n.\delta_{(na)}$ est la distribution qui à $\varphi \in \mathfrak{D}$ associe

$$< T , \varphi > = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\lambda_n.\varphi(na) .$$

Cette somme est à support fini ; on peut vérifier directement que T est linéaire continue sans appliquer le th du § 2.2. Lorsque $\lambda_n \equiv 1$, on obtient le **peigne de Dirac** $\Delta_a = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta_{(na)}$.

Considérons la distribution de charges électriques définie par un doublet de moment électrique +1 placé au point 0. Le **doublet** est la limite du système T_ε des deux masses $\frac{1}{\varepsilon}$ et $-\frac{1}{\varepsilon}$ placées aux points d'abscisses ε et 0, lorsque $\varepsilon \to 0$. Or $< T_\varepsilon , \varphi > = \frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon} \to \varphi'(0)$.

On *définit* donc le doublet par la distribution $< T , \varphi > = \varphi'(0)$.

Plus généralement, pour tout entier m et tout réel a, l'application $\varphi \to \varphi^{(m)}(a)$ est une distribution.

Toutes ces distributions sont dites **discrètes** ou **ponctuelles**.

3.3. Les distributions discrètes comme limites de fonctions.

« Erection : ne se dit qu'en parlant des monuments.»

Flaubert

Proposition 6 : Soit (p_n) une suite de fonctions réglées ≥ 0 intégrables sur **R**, c un point de I tel que :

$$(\Delta)\ (\forall\alpha > 0)\quad \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{c-\alpha} p_n(t).dt + \int_{c+\alpha}^{+\infty} p_n(t).dt = 0 \quad ; \quad (L)\quad \forall n \int_{-\infty}^{+\infty} p_n(t).dt = 1.$$

Alors pour toute fonction $\varphi \in \mathfrak{D}$, on a : $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_n(t).\varphi(t).dt = \varphi(c)$, autrement dit,

$$\lim_{n\to+\infty} < p_n , \varphi > \ = \ < \delta_{(c)} , \varphi >$$

$\delta_{(c)}$ est la limite de la suite des (distributions associées aux) fonctions p_n.

Preuve : $\int_{-\infty}^{+\infty} p_n(t).\varphi(t).dt - \varphi(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_n(t).(\varphi(t)-\varphi(c)).dt$

$$= \int_{c-\alpha}^{c+\alpha} p_n(t).(\varphi(t)-\varphi(c)).dt + \int_{|t-c|\geq\alpha} p_n(t).(\varphi(t)-\varphi(c)).dt .$$

Soit ε > 0. Par continuité de φ en c, $\exists\alpha > 0\ \ |t - c| \leq \alpha \Rightarrow |\varphi(t) - \varphi(c)| \leq \varepsilon$.

Alors $\left| \int_{c-\alpha}^{c+\alpha} p_n(t).(\varphi(t)-\varphi(c)).dt \right| \leq \varepsilon \int_{c-\alpha}^{c+\alpha} p_n(t).dt \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} p_n(t).dt = \varepsilon$.

φ étant bornée sur **R**, $\left| \int_{|t-c|\geq\alpha} p_n(t).(\varphi(t)-\varphi(c)).dt \right| \leq 2 \|\varphi\|_\infty \int_{|t-c|\geq\alpha} p_n(t).dt$ qui tend vers 0.

Donc $\exists n_0\ \ \forall n \geq n_0\ \left| \int_{|t-c|\geq\alpha} p_n(t).(\varphi(t)-\varphi(c)).dt \right| \leq \varepsilon$, et, du coup, $\left| \int_{-\infty}^{+\infty} p_n(t).\varphi(t).dt - \varphi(c) \right| \leq 2\varepsilon$.

Définition 2 : Une suite (p_n) vérifiant les propriétés ci-dessus est appelée **suite en delta** au point c.

Exemples :

1) Les $p_n(x) = \frac{n}{2}$ si $|x| \leq \frac{1}{n}$, 0 sinon, forment une suite en Δ en 0 de fonctions réglées.

2) Les $p_n(x) = n - n^2 |x|$ si $|x| \leq \frac{1}{n}$, 0 sinon, forment une suite en Δ en 0 de fonctions continues affines par morceaux.

3) Soit ρ une fonction réglée, positive, intégrable, telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t).dt = 1$. La suite de fonctions $\rho_n(x) = n.\rho(nx)$ est une suite en delta en 0. On peut l'établir directement, par convergence dominée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t).\varphi(t).dt = \int_{-\infty}^{+\infty} n\rho(nt).\varphi(t).dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x).\varphi(\tfrac{x}{n}).dx \to \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x).\varphi(0).dx = \varphi(0).$$

4) Considérons une barre rectiligne infinie identifiée à **R**, sur laquelle est définie, à tout instant t > 0 une distribution de températures $\Gamma(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\frac{-x^2}{4t}$ (température au point d'abscisse x à

l'instant t). La fonction Γ est définie sur l'ouvert $U = \mathbf{R}\times\mathbf{R}^*_+$, de classe C^∞, et vérifie dans U l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, dite **équation de la chaleur**, ainsi que les conditions :

$$(\forall t > 0) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x,t).dx = 1.$$

De plus, lorsque $t \to 0+$, les fonctions $\Gamma(x, t)$ tendent vers δ, mesure de Dirac. La distribution limite à l'instant 0 n'est pas une fonction mais une distribution discrète, infinie au point $x = 0$, nulle ailleurs, et d'intégrale 1. On peut donc dire que $\Gamma(x, t)$ est une solution de l'EDP $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ vérifiant la condition aux limites $\Gamma(x, 0) = \delta(x)$, c'est-à-dire présentant à l'instant initial $t = 0$ une source ponctuelle de chaleur placée en $x = 0$.

Si l'on cherche à résoudre heuristiquement l'EDP $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sur U, avec $u(x, 0) = f(x)$, où f est une fonction convenable, on écrira : $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-y).f(y).dy$, car la mesure de Dirac est l'élément neutre pour la convolution, et cela suggère comme solution :

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x-y,t).f(y).dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\frac{-(x-y)^2}{4t}.f(y).dy .$$

<u>Remarque</u> **:** En termes de théorie du signal, la distribution $\delta_{(c)}$ modélise l'impulsion unité au point c.

Corollaire : Les distributions discrètes $\delta_{(c)}$ ne sont pas associées à des fonctions.

<u>Preuve</u> : Supposons qu'existe une fonction localement intégrable f telle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\varphi(x).dx = \varphi(0).$$

On aurait $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\rho_n(x).dx = \rho_n(0) = n.\rho(0)$ pour tout n.

Or la suite $(n.\rho(0))$ est non bornée, tandis que la suite $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\rho_n(x).dx$ est bornée.

3.4. <u>Les fonctions comme limites de distributions discrètes</u>.

Proposition 7 : Lorsque $a \to 0+$, $a.\Delta_a \to 1$.
Plus généralement, pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, $a.f.\Delta_a \to f$ lorsque $a \to 0+$.

<u>Preuve</u> : Il s'agit de montrer que, pour toute fonction-test φ :

$$< a.\Delta_a , \varphi > = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(na) \to \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x).dx$$

et
$$< a.f.\Delta_a , \varphi > = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(na).\varphi(na) \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\varphi(x).dx .$$

La première formule se montre directement ou via des sommes de Riemann.
La deuxième formule généralise la première, et en découle, puisque $f.\varphi$ est aussi une fonction-test.
Elle utilise la notion de multiplication d'une distribution par une fonction, qui sera vue ci-après.

3.5. <u>Les distributions généralisent les mesures de Radon</u>.

Soit $\mathcal{K}$ l'espace vectoriel des fonctions $\varphi \in C(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ à support borné, c'est-à-dire nulles en dehors d'un segment [a, b], dépendant de φ.

Munissons $\mathcal{K}$ de la notion de convergence suivante : la suite (φ_n) d'éléments de $\mathcal{K}$ tend vers l'élément φ de $\mathcal{K}$ si :

i) Il existe un segment [a, b] tel que $\forall n \ \forall x \notin [a, b] \ \varphi_n(x) = 0$;

ii) La suite (φ_n) converge uniformément vers la fonction φ .

Définition 3 : On appelle **mesure de Radon** (sur **R**) une forme linéaire séquentiellement continue sur $\mathcal{K}$, i. e. une application : $\mu : \varphi \in \mathcal{K} \to \mu(\varphi) = <\mu, \varphi> \in \mathbf{C}$ vérifiant :

(M 1) $<\mu, \lambda.\varphi + \psi> = \lambda.<\mu, \varphi> + <\mu, \psi>$

(M 2) Pour toute suite (φ_n) d'éléments de $\mathcal{K}$ tendant vers $\varphi \in \mathcal{K}$, $\lim_{n\to\infty} <\mu, \varphi_n> = <\mu, \varphi>$.

Toute mesure de Radon définit, par restriction à $\mathcal{D}$, une distribution. Les mesures de Radon forment donc un sous-espace vectoriel $\mathcal{M} = \mathcal{K}'$ de l'espace $\mathcal{D}'$ des distributions.

Toutes les distributions considérées précédemment sauf celles à la fin du § 3.2. sont des mesures de Radon.

3.6. Valeur principale de Cauchy.

Les fonctions aussi simples que $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, etc, ne sont pas localement intégrables sur **R**, et ne définissent pas des distributions. Ainsi, si φ est élément de $\mathcal{D}$, la fonction $\frac{\varphi(x)}{x}$ n'est en général pas intégrable sur **R** : penser à une fonction en plateau égale à 1 sur $[-1, 1]$.

Cependant, $\lim_{\varepsilon\to0+} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}.dx$ existe toujours.

En effet, après pliage, $\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}.dx = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}.dx$. Cette intégrale a une limite quand $\varepsilon \to 0+$, car elle est faussement impropre en 0 : un développement limité donne $\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x} \to 2\varphi'(0)$ quand $x \to 0$. Mieux, même, $\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x} = \int_{-1}^{+1} \varphi'(xu).du$ est élément de $\mathcal{D}$, et paire.

Notons $$\boxed{vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}.dx = \lim_{\varepsilon\to0+} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}.dx}.$$

Proposition : C'est une distribution sur **R**, appelée **valeur principale de Cauchy**, et notée $vp\,\frac{1}{x}$.

$$\boxed{\begin{aligned} \forall\varphi \in \mathcal{D} \qquad <vp\frac{1}{x}, \varphi> &= vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}.dx = \lim_{\varepsilon\to0+} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}.dx \\ &= \int_{0}^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}.dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}.dx \end{aligned}}$$

<u>Preuve</u> : La linéarité est évidente. Soit (φ_n) une suite d'éléments de $\mathcal{D}$ tendant vers $\varphi \in \mathcal{D}$.

Supposons les supports des φ_n et de φ tous inclus dans $[-a, +a]$.

Notons $\theta(x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}$ et $\theta_n(x) = \frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(-x)}{x}$.

Les supports des θ_n sont tous inclus dans $[-a, +a]$.

De plus $\theta_n^{(k)}(x) = x^k \int_{-1}^{+1} \varphi_n^{(k+1)}(xu).du$ et $\theta^{(k)}(x) = x^k \int_{-1}^{+1} \varphi^{(k+1)}(xu).du$.

On voit aussitôt que $\theta_n^{(k)}(x)$ tend uniformément vers $\theta^{(k)}(x)$ quand $n \to \infty$.

$$<vp\frac{1}{x}, \varphi_n> = <\frac{1}{2}, \theta_n> \to <\frac{1}{2}, \theta> = <vp\frac{1}{x}, \varphi>$$

<u>Remarque</u> : Soit U =]a, b[un intervalle ouvert inclus dans **R***. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$ dont le support est inclus dans U, et toute distribution T qui coïncide avec $1/x$ dans U, $vp\frac{1}{x}$ et T sont égales dans U au sens du § 2.3.

4. Dérivation, multiplication des distributions.

4.1. Le paradigme de Schwartz.

Soit f une fonction de classe C^1 de **R** dans **C**.
Pour tout élément φ de $\mathfrak{D}$, une simple intégration par parties donne :

$$< f' , \varphi > = < T_{f'} , \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x).\varphi(x).dx = \left[f(x).\varphi(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\varphi'(x).dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\varphi'(x).dx = - < T_f , \varphi' > . \qquad (*)$$

Rappelons que, φ étant à support borné, ce calcul est parfaitement rigoureux.
Ainsi, la distribution associée à la fonction dérivée f', est l'application $\varphi \to - < T_f , \varphi' >$.

Généralisant cette idée, nous *définirons* la **dérivée** T' de la distribution T par la formule :

$$\boxed{< T' , \varphi > \; = \; - < T , \varphi' > .}$$

Cette application est bien une distribution : φ' est élément de $\mathfrak{D}$, T' est linéaire, et, pour toute suite (φ_n) d'éléments de $\mathfrak{D}$ tendant vers $\varphi \in \mathfrak{D}$, la suite $< T' , \varphi_n > = - < T , \varphi'_n >$ tend vers
$- < T , \varphi' > = < T' , \varphi >$, par définition de la convergence.

Il découle aussitôt de cette définition que l'application T → T' est un endomorphisme de l'espace $\mathfrak{D}$'. La relation ci-dessus exprime que les applications linéaires $\varphi \to -\varphi'$ et T → T' sont transposées l'une de l'autre dans la dualité entre $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}$'.

Il en découle aussi qu'une distribution est indéfiniment dérivable, et qu'on peut définir T', T'', etc. par la formule :

$$\boxed{< T^{(m)} , \varphi > \; = \; (-1)^m < T , \varphi^{(m)} > .}$$

Comme toute fonction continue, ou seulement localement intégrable, « est » une distribution, **toute fonction continue, ou localement intégrable, est indéfiniment dérivable**… en tant que distribution !

Proposition 1 : Si la suite de distributions (T_n) converge vers la distribution T, (T'_n) converge vers la dérivée T'. Autrement dit, l'opérateur T → T' est linéaire continu de $\mathfrak{D}$' dans $\mathfrak{D}$'.

<u>Remarque</u> : Soient f une fonction de classe C^1 dans l'ouvert U =]a, b[, T une distribution qui coïncide avec f dans U. Alors je dis que T' = f' dans U, en ce sens que, pour tout fonction-test φ dont le support [c, d] est disjoint de U, $< T', \varphi > = \int_c^d f'(x).\varphi(x).dx$.

4.2. Dérivations comme limites.

Si f est continue **R** → **C**, et $a \in$ **R**, notons $\tau_a f : \; x \to f(x - a)$ la translatée de f.

Pour toute $\varphi \in \mathfrak{D}$ on a : $< \tau_a f , \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a).\varphi(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\varphi(x+a).dx = < f , \tau_{-a}\, \varphi >$.

Plus généralement, si T est une distribution, on appelle **translatée** de T par a la distribution τ_a T définie par $\forall \varphi \in \mathfrak{D} \quad < \tau_a T , \varphi > = < T , \tau_{-a}\, \varphi >$.

Avec l'abus de langage déjà signalé, on note : $(\tau_a T)(x) = T(x - a)$.

<u>Exemple</u> : $\delta_{(a)} = \tau_a\, \delta = \delta(x - a)$, $\delta_{(a+b)} = \tau_a\, \delta_{(b)} = \tau_b\, \delta_{(a)}$.

Si f est dérivable, on a $f'(x) = \lim_{a\to 0} \dfrac{f(x)- f(x-a)}{a}$, donc $f' = \lim_{a\to 0} \dfrac{f-\tau_a f}{a}$.

Proposition 2 : Pour toute distribution T, on a : $T' = \lim_{a\to 0} \dfrac{T-\tau_a T}{a}$.

Exercice : Vérifier que $\tau_a(T') = (\tau_a\, T)'$, autrement dit les translations commutent à la dérivation.

Exercice : Définir les distributions $T(-x)$ et $T(\lambda x)$ pour $\lambda \neq 0$. Quelles sont leurs dérivées ?

4.3. Multiplication d'une distribution par une fonction.

Proposition 3 et définition : Soient $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction C^∞, et T une distribution sur **R**. L'application $\varphi \to <T, \alpha.\varphi>$ est une distribution ; on la note αT.
Lorsque T est régulière, et associée à la fonction f, il est clair que αT est associée à la fonction αf.

Propriétés de la multiplication : Soient $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction C^∞, δ la mesure de Dirac.

1) On a $\alpha.\delta = \alpha(0).\delta$; on en déduit que $x.\delta = 0$.

2) On a $\alpha.\delta' = \alpha(0).\delta' - \alpha'(0).\delta$; on en déduit $x\delta' = -\delta$, $x^2\delta' = 0$, puis $x\delta^{(m)} = -\,\delta^{(m-1)}$.

3) On a $\frac{d}{dx}(\alpha.T) = \frac{d\alpha}{dx}.T + \alpha.\frac{dT}{dx}$.

<u>Preuves</u> :

1) $<\alpha.\delta , \varphi> = <\delta , \alpha.\varphi> = \alpha(0).\varphi(0) = <\alpha(0).\delta , \varphi>$. On en déduit $x.\delta = 0$.
$<\alpha(0).\delta' - \alpha'(0).\delta , \varphi> = -\alpha(0).\varphi'(0) - \alpha'(0).\varphi(0) = -(\alpha\varphi)'(0) = <\delta' , \alpha\varphi> = <\alpha.\delta' , \varphi>$.
On en déduit $x\delta' = -\,\delta$, $x^2\delta' = 0$, puis $x\delta^{(m)} = -\,\delta^{(m-1)}$.

3) $<\frac{d\alpha}{dx}.T + \alpha.\frac{dT}{dx} , \varphi> = <T , \frac{d\alpha}{dx}.\varphi> + <\frac{dT}{dx} , \alpha.\varphi> = <T , \frac{d\alpha}{dx}.\varphi> - <T , \frac{d}{dx}(\alpha.\varphi)>$.

$$= -<T , \alpha.\varphi'> = -<\alpha.T , \varphi'> = <\frac{d}{dx}(\alpha.T) , \varphi> .$$

<u>Remarque</u> : Peut-on multiplier deux distributions quelconques, c'est-à-dire généraliser à $\mathcal{D}$ le produit des fonctions usuelles ? Il n'en est rien. C'est déjà problématique pour les fonctions localement intégrables : $f(x) = 1/\sqrt{|x|}$ est localement intégrable, mais non $f.f$.

On ne peut définir le produit de δ par la fonction de Heaviside si l'on veut que ce produit conserve un minimum de propriétés raisonnables.

- Si l'on veut que la multiplication soit continue, soit (f_n) une suite en delta de fonctions C^∞ tendant vers H de façon que $f_n(0)$ ait pour limite n'importe quel réel a.

Alors on aurait $f_n.\delta \to H.\delta$. Or $f_n.\delta = f_n(0).\delta \to a.\delta$.

- Si l'on veut que la formule $(ST)' = S'.T + S.T'$ et la formule de Leibniz soient valables, la réponse est encore non : en remarquant que $H(x)^n = H(x)$ pour tout entier n, on aurait pour tout n

$$H' = (H^n)' = n.H^{n-1}.H' = n.(H.\delta) .$$

La multiplication des distributions peut être définie sous certaines conditions, qui font toujours l'objet de recherches (cf. Bony, Journées X-UPS 2003).

4.4. Exemples de dérivations.

4.4.1) Si f est une fonction de classe C^1 sur **R**, sa dérivée en tant que fonction coïncide avec sa dérivée en tant que distribution. Du coup, si f est une fonction de classe C^∞ sur **R**, toutes ses dérivées en tant que fonction coïncident avec ses dérivées en tant que distribution.

Nous allons voir dans la suite, sur des exemples simples, que, si f est de classe C^k sur **R**, ses premières dérivées f', …, $f^{(k)}$, en tant que fonctions, coïncident avec ses dérivées en tant que distributions, tandis que les dérivées suivantes, $f^{(k+1)}$, $f^{(k+2)}$, … en tant que fonction, n'existent pas, mais existent en tant que distributions singulières.

4.4.2) <u>Une cascade d'exemples</u> :

♣ Considérons la fonction $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ si $x \geq 0$, 0 si $x \leq 0$, autrement dit $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}H(x)$.

f_n est de classe C^1, et a pour dérivée $f_n'(x) = \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ si $x \geq 0$, 0 si $x \leq 0$; autrement dit $f_n' = f_{n-1}$.

f_n' est aussi la dérivée de f_n en tant que distribution, en vertu de (*).

$$f_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{H}(x) + \frac{x^n}{n!}\delta(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{H}(x).$$

♦ La fonction $f_1(x) = x^+ = x.\mathrm{H}(x)$ est continue sur **R**, mais non dérivable en 0.
Cependant, elle a une dérivée en tant que distribution :

$$< f_1' , \varphi > = - < f_1 , \varphi' > = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\varphi'(x).dx = -\int_0^{+\infty} x.\varphi'(x).dx$$

$$= \big[-x.\varphi(x)\big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\varphi(x).dx = \int_0^{+\infty}\varphi(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x).\varphi(x).dx \ ,$$

où $\mathrm{H}(x)$ est la **fonction de Heaviside** définie par $\mathrm{H}(x) = 1$ si $x > 0$, $\mathrm{H}(x) = 0$ si $x < 0$. (H n'est pas définie en 0, mais cela importe peu). On a donc $f_1' = \mathrm{H}$.

<u>Variante</u> : $f_1'(x) = \mathrm{H}(x) + x.\delta(x) = \mathrm{H}(x)$

Résultat assez naturel : intuitivement, H est bien la dérivée de f_1. Cela rentre d'ailleurs dans le cadre de l'exemple 1, car $x^+ = \int_0^x H(t).dt$.

♥ La fonction de Heaviside H est discontinue en 0, donc non dérivable.
Cependant, elle a une dérivée en tant que distribution, en vertu de :

$$< f'' , \varphi > = < \mathrm{H}' , \varphi > = - < \mathrm{H} , \varphi' > = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x).\varphi'(x).dx$$

$$= -\int_0^{+\infty}\varphi'(x).dx = \big[-\varphi(x)\big]_0^{+\infty} = \varphi(0) = < \delta , \varphi >.$$

Ainsi, **la fonction de Heaviside H a pour dérivée la distribution de Dirac δ**.

♠ La distribution de Dirac δ, qui n'a plus rien d'une fonction, a elle-même une dérivée :

$$< \delta' , \varphi > = - < \delta , \varphi' > = - \varphi'(0) ,$$

et une récurrence immédiate donne : $< \delta^{(m)} , \varphi > = (-1)^{(m)}.\varphi^{(m)}(0)$.

D'où il résulte que la fonction f_n est indéfiniment dérivable en tant que distribution (mais pas en tant que fonction).

4.4.3) <u>Dérivées successives d'une fonction C^∞ par morceaux</u>.

<u>Dérivées successives de la fonction partie entière</u> [x].

Tout d'abord, $< f , \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty}[x].\varphi(x).dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n.\int_n^{n+1}\varphi(x).dx$ (somme à support fini).

Du coup, $< f' , \varphi > = - < f , \varphi' > = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n.\int_n^{n+1}\varphi'(x).dx = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n.(\varphi(n+1)-\varphi(n))$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n.\varphi(n+1) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n.\varphi(n) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(n+1).\varphi(n+1) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n.\varphi(n) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\varphi(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\varphi(n).$$

Ainsi, **[x] a pour dérivée le peigne de Dirac** $\Delta_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta_{(n)}$, somme infinie de masses placées aux entiers $n \in$ **Z**. Ses dérivées d'ordre > 1 s'en déduisent.

<u>Exercice</u> : Montrer que $[x] = \sum_{n=1}^{+\infty} H(x-n) - \sum_{n=0}^{+\infty} H(-x-n) = \sum_{n=1}^{+\infty} H(x-n) + \sum_{n=0}^{+\infty}(H(x+n)-1)$,

et retrouver ce qui précède.

Généralisation : Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction C^∞ par morceaux. Cela signifie que, sur tout segment, f est C^∞ sauf en un nombre fini de points, et qu'en ces points f et toutes ses dérivées admettent des limites à droite et à gauche. Ces points de discontinuité peuvent être indexés de manière croissante à l'aide de **Z**, de **N** ou d'une partie finie de **N**. Notons-les $(x_\nu)_{\nu\in Z}$, où $\lim_{\nu\to\pm\infty} x_\nu = \pm\infty$. Soit $f_\nu^{(p)}$ le saut de la dérivée usuelle d'ordre p au point x_ν. Il y a lieu de distinguer les distributions f', f'', …, $f^{(n)}$, dérivées de f en tant que distribution, et les distributions notées $[f']$, $[f'']$, … , $[f^{(n)}]$, qui sont des fonctions égales aux dérivées successives au sens usuel de f dans les intervalles (et non définies aux points x_ν). Ainsi, pour $f = H$, on aura $f' = \delta$ et $[f'] = 0$.
Une intégration par parties donne aussitôt

$$< f' , \varphi > = - < f , \varphi' > = \sum_\nu \varphi(x_\nu).f_\nu + \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x).[f'(x)].dx ,\ \text{ autrement dit } f' = [f'] + \sum_\nu f_\nu .\delta_{(x_\nu)}$$

Les discontinuités de f apparaissent dans sa dérivée sous forme de masses ponctuelles.
Dans les dérivations ultérieures, elles ne disparaîtront plus jamais :

$$f' = [f'] + \sum_\nu f_\nu .\delta_{(x_\nu)} \quad , \quad f'' = [f''] + \sum_\nu f_\nu^{(1)}.\delta_{(x_\nu)} + \sum_\nu f_\nu .\delta'_{(x_\nu)} \quad , \quad \text{etc.}$$

4.4.4) <u>Logarithme et autres fonctions</u>.

<u>Exercice 1</u> : Montrer que $< T, \varphi > = \int_0^{+\infty} \ln x.\varphi(x).dx$ définit une distribution.
Trouver la dérivée de cette distribution.

<u>Solution</u> :
La fonction f définie par $f(x) = \ln x$ pour $x > 0$, 0 pour $x \le 0$, est localement intégrable.
Pour toute fonction test φ, la fonction $x \to \ln x.\varphi(x)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
Au $V(+\infty)$, la fonction est nulle ; au $V(0+)$, $\ln x.\varphi(x) = O(\ln x)$, donc est intégrable.
T est donc définie, et clairement linéaire. Il reste à montrer que, pour toute suite (φ_n) d'éléments de $\mathfrak{D}$ tendant vers $\varphi \in \mathfrak{D}$, $\lim_{n\to\infty} < T, \varphi_n > = < T, \varphi >$. Laissons cela au lecteur. Au fond, cela découle de ce que la fonction $F(x) = \ln x$ pour $x > 0$, 0 pour $x < 0$, est localement intégrable.
En revanche, la quasi-dérivée de f, définie par $f'(x) = 1/x$ pour $x > 0$, 0 pour $x < 0$, n'est pas intégrable. Nous allons donc régulariser l'intégrale divergente $\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}.dx$.

$$< T', \varphi > = - < T, \varphi' > = -\int_0^{+\infty} \ln x.\varphi'(x).dx .$$

Une intégration par parties donne :

$$\int_0^{+\infty} \ln x.\varphi'(x).dx = \left[\ln x.\varphi(x)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}.dx .$$

Mais l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}.dx$ peut diverger, et $\lim_{x\to 0+} \ln x.\varphi(x)$ n'existe pas toujours.

Il vaut mieux utiliser une primitive de φ' s'annulant en 0, $\varphi(x) - \varphi(0)$; cela résout le problème en 0, mais $\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}.dx$ diverge en $+\infty$. Cassons en deux !

$$\int_0^{+\infty} \ln x.\varphi'(x).dx = \int_0^{1} \ln x.\varphi'(x).dx + \int_1^{+\infty} \ln x.\varphi'(x).dx$$

$$= \left[\ln x.(\varphi(x)-\varphi(0))\right]_0^1 - \int_0^1\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}.dx + \left[\ln x.\varphi(x)\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}.dx .$$

$$= -\int_0^1\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}.dx - \int_1^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}.dx .$$

En conclusion, $\langle T', \varphi \rangle = \int_0^1 \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}.dx + \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}.dx$ (1).

On pourrait remplacer 1 par tout réel $a > 0$, le résultat est le même. On peut aussi écrire :

$$\int_0^{+\infty} \ln x.\varphi'(x).dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_0^{+\infty} \ln x.\varphi'(x).dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} [\ln x.\varphi(x)]_\varepsilon^{+\infty} - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}.dx .$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} -\ln \varepsilon.\ \varphi(\varepsilon) - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}.dx .$$

D'où $\langle T', \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+} (\ln \varepsilon).\ \varphi(\varepsilon) + \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}.dx$ (2)

Comme $\lim_{\varepsilon\to 0+} \ln \varepsilon.\ (\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)) = 0$ (pourquoi ?), on peut aussi écrire :

$$\langle T', \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+} (\ln \varepsilon).\ \varphi(0) + \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}.dx \qquad (3).$$

En termes savants, $T = \ln x.H(x)$ a pour dérivée $T' = \text{Pf } \frac{H(x)}{x}$.

Exercice 2 : Montrer que la fonction $F(x) = \ln |x|$ définit une distribution, et que $\frac{d}{dx} \ln |x| = vp\ \frac{1}{x}$.

Solution : T_F est une distribution car F est localement intégrable.

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x|\,\varphi'(x).dx = -\int_0^{+\infty} \ln x.\varphi'(x).dx - \int_{-\infty}^0 \ln(-x).\varphi'(x).dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} (\ln \varepsilon).\varphi(0) + \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}.dx + \lim_{\varepsilon\to 0+} -(\ln \varepsilon).\varphi(0) + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}.dx .$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}.dx + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}.dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}.dx = vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}.dx .$$

En reprenant les calculs précédents.

4.4.5. Séries trigonométriques.

L'exemple que nous allons maintenant étudier est spectaculaire.

Considérons la série trigonométrique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$.

On démontre, soit directement, soit à l'aide de la théorie des séries de Fourier, que :

a) Cette série converge simplement sur **R**, vers la fonction en toit d'usine, 2π-périodique, définie par

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} \text{ pour } 0 < x < 2\pi \quad , \quad f(0) = 0.$$

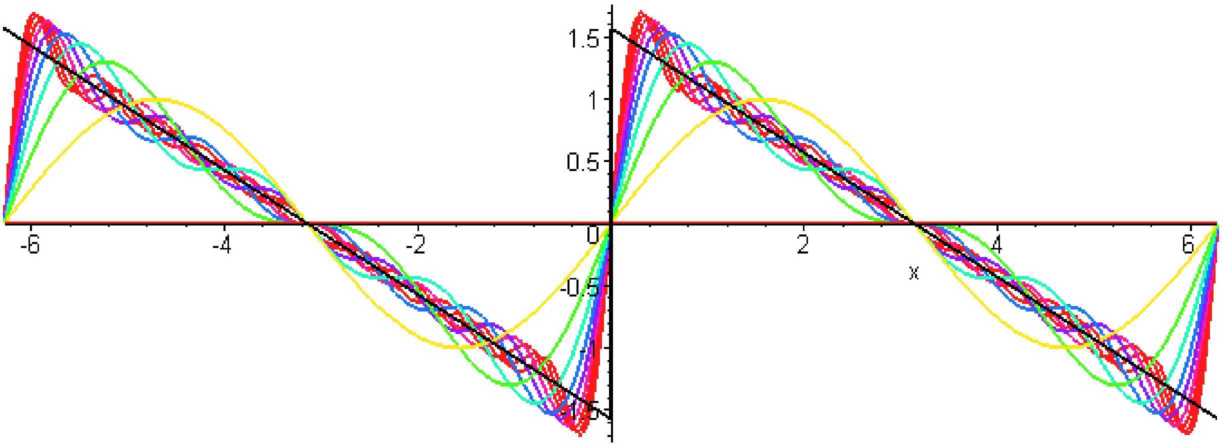
b) La suite des sommes partielles $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$, ne converge pas uniformément vers $f(x)$ sur **R**, mais converge uniformément sur tout segment $[\alpha, 2\pi - \alpha]$ ($0 < \alpha < \pi$).

c) Les sommes partielles $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$ sont uniformément bornées sur **R**, en ce sens qu'il existe une constante G vérifiant $\forall n \geq 1\ \ \forall x\ \ |S_n(x)| \leq G$. G est la constante de Gibbs.

```
> with(plots):f:=x->Pi/2-x/2+floor(x/(2*Pi))*Pi;
```

$$f := x \to \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x + \text{floor}\left(\frac{1}{2}\frac{x}{\pi}\right)\pi$$

```
> S:=(n,x)->sum(sin(k*x)/k,k=1..n);
> p:=n->plot(S(n,x),x=-2*Pi..2*Pi,thickness=2,color=COLOR(HUE,0.15*n)):
g:=plot(f(x),x=-2*Pi..2*Pi,colour=black,thickness=2):
> display([g,seq(p(n),n=0..9)]);
```



Plaçons-nous maintenant du point de vue des distributions.

d) La suite $(S_n(x))$ tend vers $f(x)$ au sens des distributions. Cela découle de ce qui précède.

e) Du coup, la suite $S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$ tend vers $f'(x)$ au sens des distributions.

Or $$f'(x) = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{(2n\pi)} = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-2n\pi) .$$

Autrement dit $$\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(nx) = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{(2n\pi)} = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-2n\pi) .$$

f) Redérivons ! La suite $S_n''(x) = \sum_{k=1}^{n} -k.\sin(kx)$ tend vers $f''(x)$ au sens des distributions.

Or $$f''(x) = \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta'_{(2n\pi)} = \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta'(x-2n\pi) .$$

Autrement dit $$\sum_{n=1}^{+\infty} n.\sin(nx) = -\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta'_{(2n\pi)} = -\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta'(x-2n\pi) .$$

g) Redérivons ! La suite $S_n'''(x) = \sum_{k=1}^{n} -k^2.\cos(kx)$ tend vers $f'''(x)$ au sens des distributions.

Or $$f'''(x) = \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta''_{(2n\pi)} = \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta''(x-2n\pi) .$$

Autrement dit $$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2.\cos(nx) = -\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta''_{(2n\pi)} = -\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta''(x-2n\pi) .$$

Et ainsi de suite ! Ainsi, certaines séries trigonométriques grossièrement divergentes ont toutefois des sommes dans l'espace des distributions…

Revenons à la formule obtenue en e). Elle s'écrit aussi (au sens des sommes partielles symétriques) :

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{inx} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{(2n\pi)} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-2n\pi) = 2\pi\, \Delta_{2\pi}.}$$

C'est le développement en série de Fourier du peigne de Dirac $\Delta_{2\pi}$.

Appliquons cette formule à une fonction test φ, et notons Φ sa transformée de Fourier

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} \varphi(t).dt .$$

Il vient, d'une part : $$< \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{inx} , \varphi > = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} < e^{inx}, \varphi > = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi(-n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi(n) .$$

D'autre part : $\quad < 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{(2n\pi)} , \varphi > \; = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} <\delta_{(2n\pi)}, \varphi> \; = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(2n\pi)$.

Ainsi : $$\boxed{\forall \varphi \in \mathfrak{D} \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi(n) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(2n\pi)}$$.

C'est la fameuse **formule sommatoire de Poisson**, qu'on peut s'étendre à des classes de fonctions plus générales que les fonctions-tests. Formule que l'on peut démontrer élémentairement, et que Poisson a démontré jadis, sans les distributions. Car s'il avait fallu attendre l'invention des distributions pour la trouver, l'Analyse n'aurait pas décollé depuis le début du XIXème siècle. De même, si l'on avait attendu la construction des autoroutes pour inventer la roue, on serait encore à l'âge des cavernes ! Cela dit, l'un des plaisirs esthétiques des théories puissantes est qu'elles permettent de retrouver élégamment des résultats que les mathématiciens ont jadis démontré en suant sang et eau.

5. Equations différentielles.

Commençons par les deux équations différentielles les plus simples : T' = 0 et T' = U.

Mais auparavant, nous aurons besoin d'établir le :

Lemme : Lorsque φ décrit $\mathfrak{D}$, sa dérivée φ' décrit

$$\mathfrak{D}_0 = \{ \psi \in \mathfrak{D} \, ; \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x).dx = 0 \} \text{ , qui est un } \underline{\text{hyperplan}} \text{ de } \mathfrak{D}.$$

Preuve :

a) Tout d'abord, si φ est une fonction test, sa dérivée φ' est également une fonction-test.

De plus il est clair que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x).dx = 0$.

b) Réciproquement, soit ψ une fonction-test telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x).dx = 0$. Posons, pour tout x,

$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(t).dt$. C'est une fonction C^∞, nulle au V(−∞), et égale à $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x).dx$ pour x assez grand, c'est-à-dire nulle pour x assez grand. Bref, c'est une fonction-test. Et $\varphi'(x) = \psi(x)$.

Remarque : Les algébristes reconnaîtront avec délices la suite exacte :

$$\{0\} \to \mathfrak{D} \to \mathfrak{D} \to \mathbf{C} \to \{0\}$$

où D : $\varphi \to \varphi'$ et T : $\psi \to \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x).dx$.

Proposition 1 : Pour qu'une distribution T ait une dérivée nulle, il faut et il suffit qu'elle soit constante, *i.e.* de la forme $< T , \varphi > = c \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x).dx$.

Preuve : Si T = c, on vérifie sans peine que T' = 0 ; cela découle d'ailleurs du § 4.1.
Réciproquement, si T' = 0, alors $< T' , \varphi > = 0$, donc $< T , \varphi' > = 0$ pour toute fonction test φ .
Or, lorsque φ décrit $\mathfrak{D}$, φ' décrit $\mathfrak{D}_0 = \{ \psi \in \mathfrak{D} \, ; \int \psi(x).dx = 0 \}$, qui est un hyperplan de $\mathfrak{D}$.

Soit θ une fonction-test telle que $\int \theta(x).dx = 1$.

Toute $\varphi \in \mathfrak{D}$ se décompose de manière unique sous la forme $\varphi = \psi + < 1 , \varphi >.\theta$, où $\psi \in \mathfrak{D}_0$.
Alors $< T , \varphi > = < T , \psi > + < 1, \varphi >.< T , \theta > = < T , \theta >.< 1 , \varphi >$: T = c, où c = < T , θ >.

Théorème 2 : Toute distribution T admet une primitive U, et ses primitives sont de la forme U + cte.

Preuve : La deuxième assertion découle de la proposition précédente.
Supposons le problème résolu : si U' = T, alors $\forall \varphi \in \mathfrak{D} \quad < T , \varphi > = < U' , \varphi > = - < U , \varphi' >$.

Cette formule détermine U sur $\mathcal{D}_0$. Reprenant les notations de la proposition précédente, φ s'écrit de façon unique ψ + < 1 , φ >.θ , où ψ ∈ $\mathcal{D}_0$. Notons $\Psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(t).dt$. C'est un élément de $\mathcal{D}$.

Définissons U par : < U , φ > = – < T , Ψ >.
On a bien < U' , φ > = – < U , φ' > = < T , φ >, car la décomposition de φ' est φ' = φ' + 0.θ, et le Ψ(*x*) correspondant à φ'(*x*) vaut φ(*x*). U est bien une primitive de T.
Il reste à montrer que c'est une distribution ; cela est laissé en exercice.

Exemple : cherchons une primitive U de δ. En vertu de ce qui précède, posons :

$$< U , \varphi > = - < \delta , \Psi > = -\int_{-\infty}^{0} \psi(t).dt \;=\; \int_{0}^{+\infty} \psi(t).dt \;=\; \int_{0}^{+\infty} \varphi(t).dt \,.$$

c'est à dire $< U , \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t).\varphi(t).dt$, où H est la fonction de Heaviside.

Exercice 1 : Résoudre T' – λT = δ au sens des distributions.

Solution : $T' - \lambda T = \delta \;\Leftrightarrow\; e^{-\lambda x}(\, T' - \lambda T\,) = e^{-\lambda x}\delta \;\Leftrightarrow\; e^{-\lambda x}(\, T' - \lambda T\,) = \delta$

$$\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}(e^{-\lambda x}\,T\,) = \delta \;\Leftrightarrow\; e^{-\lambda x}T = H + c \;\Leftrightarrow\; T = e^{\lambda x}(\,H + c\,)$$

Avec Maple :

```
> dsolve(diff(T(x),x)-lambda*T(x)=Dirac(x),T(x));
```

$$T(x) = (\,\mathrm{Heaviside}(x) + \_C1\,)\,\mathbf{e}^{(\lambda\,x)}$$

Exercice 2 : Résoudre T'' – 3T' + 2T = δ au sens des distributions.

Solution : L'opérateur $D^2 - 3D + 2I = (\,D - 2I\,) \circ (\,D - I\,)$ incite à introduire S = T' – T.
Alors S' – 2S = δ, donc (ex précédent) $S(x) = e^{2x}(\,H(x) + c\,)$.

$T' - T = e^{2x}(\,Y(x) + c\,) \;\Leftrightarrow\; e^{-x}(\,T' - T\,) = e^{x}(\,H(x) + c\,) \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}(\,e^{-x}T\,) = e^{x}(\,H(x) + c\,)$.

Cherchons une primitive de $e^{x}H(x) = H(x) + (\,e^{x} - 1\,)\,H(x)$.
Une primitive de H(*x*) est $x^{+} = xH(x)$. Une primitive de la fonction continue $(\,e^{x} - 1\,)\,H(x)$ est .

$$\int_{-\infty}^{x}(e^{t}-1)H(t).dt \;=0 \;\text{ pour } x \le 0 \;,\; e^{x} - x - 1 \;\text{ pour } x \ge 0$$

En résumé, une primitive de $e^{x}H(x)$ est $f(x) = 0$ pour $x \le 0$, $e^{x} - 1$ pour $x \ge 0$, i.e. $(\,e^{x} - 1\,)H(x)$.
Au final, $e^{-x}T = (\,e^{x} - 1\,).H(x) + c\,e^{x} + d$ et

$$T(x) = (\,e^{2x} - e^{x}\,).H(x) + c\,e^{2x} + d\,e^{x}.$$

Avec Maple :

```
> dsolve(diff(T(x),x,x)-3*diff(T(x),x)+2*T(x)=Dirac(x),T(x));
```

$$T(x) = (\,\mathbf{e}^{x}\,\mathrm{Heaviside}(x) - \mathrm{Heaviside}(x) + \mathbf{e}^{x}\,\_C1 + \_C2\,)\,\mathbf{e}^{x}$$

Exercice 3 : Résolution de u' + *a*u = T , avec u, T distributions et $a \in C^{\infty}(\mathbf{R})$.
Notons A une primitive de *a*.

$u' + a(x).u = T \;\Leftrightarrow\; (\,u' + a(x).u\,)\,e^{A(x)} = T.\,e^{A(x)} \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}(u.\,e^{A(x)}) = T.\,e^{A(x)}$

$$\Leftrightarrow\; u.\,e^{A(x)} = \int T(x)e^{A(x)}.dx \qquad (\text{ primitive de } T.\,e^{A(x)}\,)$$

Exercice 4 : Résoudre $T'' - \omega^2.T = \delta$ et $T'' + \omega^2.T = \delta$.

Ce sont des équations du second ordre à coefficients constants. Cherchons une solution particulière de $T'' - \omega^2.T = \delta$ de la forme T(*x*) = H(*x*).*f*(*x*), où *f* est de classe C^2.
Alors $T'' - \omega^2.T \;=\; H.(\,f'' - \omega^2.f\,) + f'(0).\delta + f(0).\delta' \;=\; \delta$

est satisfaite lorsque $f'' - \omega^2.f = 0$, $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = \dfrac{sh(\omega x)}{\omega}$.

Il reste à ajouter la solution générale de l'équation homogène associée :

$$T(x) = A.ch(\omega x) + B.sh(\omega x) + H(x).\frac{sh(\omega x)}{\omega}.$$

Idem pour la seconde équation.

```
> dsolve(diff(T(x),x,x)-omega^2*T(x)=Dirac(x),T(x));
```

$$T(x) = e^{(-\omega x)}\_C2 + e^{(\omega x)}\_C1 + \frac{\frac{1}{2}\mathrm{Heaviside}(x)\, e^{(-\omega x)}(-1 + e^{(2\omega x)})}{\omega}$$

```
> dsolve(diff(T(x),x,x)+omega^2*T(x)=Dirac(x),T(x));
```

$$T(x) = \sin(\omega x)\_C2 + \cos(\omega x)\_C1 + \frac{\mathrm{Heaviside}(x)\sin(\omega x)}{\omega}$$

6. Distributions sur $\mathbf{R}^n$.

Nous ne faisons qu'esquisser le sujet.

Définition 1 : Si $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$, on nomme **support** de f l'adhérence de $\{ x \,;\, f(x) \neq 0 \}$.

On appelle **fonction-test**, ou **fonction de base**, une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ à support borné, ou, ce qui revient au même, à support compact, c'est-à-dire nulle en dehors d'un ensemble borné de $\mathbf{R}^n$, dépendant de φ.

Rappelons que les parties compactes de $\mathbf{R}^n$ sont les parties fermées bornées.

Exemple : La fonction H définie par $H(x, y) = \exp\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$ si $x^2 + y^2 < 1$, 0 si $x^2 + y^2 \geq 1$ est une fonction-test.

L'espace vectoriel $\mathfrak{D}$ l'espace vectoriel des fonctions tests $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ est muni de la notion de convergence suivante. La suite (φ_k) d'éléments de $\mathfrak{D}$ tend vers l'élément φ de $\mathfrak{D}$ si :

i) Les supports des φ_k sont contenus dans un même compact K ;

ii) Les dérivées partielles de tous ordres des φ_k convergent uniformément vers la dérivée partielle correspondante de φ.

Cette notion de convergence possède les propriétés suivantes :

a) Si φ est un élément de $\mathfrak{D}$, la suite constante égale à φ converge vers φ.

b) Si (φ_k) et (ψ_k) sont deux suites d'éléments de $\mathfrak{D}$ tendant resp. vers φ et ψ, la suite $(\lambda.\varphi_k + \psi_k)$ converge vers $\lambda.\varphi + \psi$.

c) Si (φ_k) converge vers φ, toute suite extraite converge vers φ.

d) Si (φ_k) converge vers φ, la suite $\left(\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial x_j}\right)$ converge vers $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}$. Les dérivations partielles de tous ordres sont donc des endomorphismes (séquentiellement) continus de $\mathfrak{D}$.

Définition 2 : On appelle **distribution** sur $\mathbf{R}^n$ une forme linéaire (séquentiellement) continue sur $\mathfrak{D}$, i.e. une application : $T : \varphi \in \mathfrak{D} \to T(\varphi) = \langle T , \varphi \rangle \in \mathbf{C}$ vérifiant :

(D 1) $\langle T , \lambda.\varphi + \psi \rangle = \lambda.\langle T , \varphi \rangle + \langle T , \psi \rangle$

(D 2) Pour toute suite (φ_k) d'éléments de $\mathfrak{D}$ tendant vers $\varphi \in \mathfrak{D}$, $\lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_k \rangle = \langle T, \varphi \rangle$.

Exemples : 1) L'application $T : \varphi \in \mathfrak{D} \to \int\!\ldots\!\int_{R^n} \varphi(x).dx \in \mathbf{C}$ est une distribution.

L'ensemble des distributions est noté $\mathfrak{D}'$. C'est un sous-espace vectoriel du dual algébrique $\mathfrak{D}^*$ de l'espace $\mathfrak{D}$. Nous allons munir à son tour cet espace d'une notion de convergence.

2) Plus généralement, pour toute fonction localement intégrable f de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{C}$,

$$T_f : \varphi \in \mathfrak{D} \to \int \ldots \int_{R^n} f(x).\varphi(x).dx \in \mathbf{C} \text{ est une distribution.}$$

Définition 3 : On dit que la suite (T_k) de distributions **converge** vers la distribution T si, pour toute $\varphi \in \mathfrak{D}$, la suite $(T_k(\varphi))$ tend vers $T(\varphi)$.

Cette notion de convergence possède les mêmes propriétés que la convergence dans $\mathfrak{D}$:

Définition 4 : Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, et toute distribution T sur $\mathbf{R}^n$, on nomme $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ la distribution définie par $< \frac{\partial T}{\partial x_j} , \varphi > = - < T , \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} >$.

7. Exercices corrigés.

Exercice 1 : Aux fonctions ci-dessous peut-on associer une distribution sur **R** ?

$$f(x) = e^x ,\ f(x) = |x| ,\ f(x) = \sqrt{|x|} ,\ f(x) = \sin\frac{1}{x} ,\ f(x) = \ln|x| ,$$
$$f(x) = x^{-1/3} ,\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} ,\ f(x) = \frac{1}{x} ,\ f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Solution :

Les 7 premières fonctions sont intégrables sur tout segment, donc définissent une distribution. Les deux dernières ne sont pas intégrables sur $[-1, 1]$, donc ne définissent pas de distribution. On peut néanmoins contourner cette difficulté et leur associer les distributions v.p. $\frac{1}{x}$ et Pf $\frac{1}{x^2}$.

Exercice 2 : Montrer que $< S , \varphi > = \varphi(0) + 3\,\varphi''(4) - \varphi'''(\pi)$ et $< T , \varphi > = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^{(n)}(n)$ définissent des distributions.

Solution :

S est une forme linéaire sur $\mathfrak{D}$, et elle est continue, car si (φ_k) est une suite de fonctions tests tendant vers φ, chacune des suites $(\varphi_k^{(m)})$ converge simplement vers $\varphi^{(m)}$ sur **R**.

Le cas de T est un peu plus subtil. Tout d'abord, pour toute fonction-test φ, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^{(n)}(n)$ car c'est une somme à support fini. T est évidemment linéaire. Quand à sa continuité, on peut certes la déduire du théorème de Banach-Steinhaus-Schwartz, mais on peut aussi la montrer à la main.

Soit (φ_k) une suite de fonctions tests tendant vers φ. Les supports des φ_k sont tous inclus dans un même segment $[a, b]$, lui-même inclus dans un segment $[-N, N]$, où N est un entier.

Alors $< T , \varphi_k > = \sum_{n=0}^{N} \varphi_k^{(n)}(n) \to \sum_{n=0}^{N} \varphi^{(n)}(n) = < T , \varphi >$.

Exercice 3 : Définir la distribution $T(\lambda x)$ pour $\lambda \neq 0$. Quelle est sa dérivée ?

Solution :

Commençons par noter que $< f(-x), \varphi > \; = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x).\varphi(x).dx \; = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\varphi(-x).dx$,
en convenant de confondre fonction et distribution associée.
Cela suggère de poser $< T(-x), \varphi > \; = \; < T(x), \varphi(-x) >$.
On introduit les notions de distribution paire et impaire.
Ainsi, δ est une distribution paire, sgn x une distribution impaire.
De manière plus élégante, notons $\breve{T} = T(-x)$ et $\breve{\varphi}(x) = \varphi(-x)$, alors $< \breve{T}, \varphi > := < T, \breve{\varphi} >$.

Notons que $\dfrac{d}{dx}T(-x) = -T'(-x)$.

En effet, si l'on note $\psi(x) = \varphi(-x)$, il vient :

$$< \frac{d}{dx}T(-x), \varphi > = -< T(-x), \varphi' > \; = \; -< T(x), \varphi'(-x) > \; = \; < T(x), \psi'(x) >$$
$$= -< T', \psi(x) > \; = \; -< T', \varphi(-x) > \; = \; < -T'(-x), \varphi >$$

<u>Application</u> : retrouvons $|x|'$.
$|x| = x.H(x) - x.H(-x)$ implique $|x|' = H(x) + x.\delta(x) - H(-x) + x.\delta(-x) = H(x) - H(-x) = \text{sgn}(x)$.
Plus généralement, on est amené à poser, en distinguant les cas $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$:

$$< T(\lambda x), \varphi > \; = \; \frac{1}{|\lambda|} < T'(x), \varphi(\frac{x}{\lambda}) >.$$

Car, pour $\lambda > 0$, $< f(\lambda x), \varphi > \; = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda x).\varphi(x).dx \; = \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\varphi(\frac{t}{\lambda}).dt \; = \; \frac{1}{\lambda} < f, \varphi(\frac{x}{\lambda}) >$

et, pour $\lambda < 0$, $< f(\lambda x), \varphi > \; = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda x).\varphi(x).dx \; = -\frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\varphi(\frac{t}{\lambda}).dt \; = -\frac{1}{\lambda} < f, \varphi(\frac{x}{\lambda}) >$.

<u>Exercice 4</u> : **<u>Propriétés de la multiplication</u>.**

Soient $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction C^∞, δ la mesure de Dirac.

1) Vérifier que $\alpha.\delta = \alpha(0).\delta$; en déduire que $x.\delta = 0$.

2) Vérifier que $\alpha.\delta' = \alpha(0).\delta' - \alpha'(0).\delta$; en déduire $x\delta' = -\delta$, $x^2\delta' = 0$, puis $x\delta^{(m)} = -\delta^{(m-1)}$.

3) Montrer que $\dfrac{d}{dx}(\alpha.T) = \dfrac{d\alpha}{dx}.T + \alpha.\dfrac{dT}{dx}$.

4) Vérifier que $x.vp\dfrac{1}{x} = 1$.

5) Montrer que, pour qu'une distribution T sur **R** vérifie $x.T = 0$, il faut et il suffit que T soit proportionnelle à δ. Valeurs et vecteurs propres de l'opérateur $T \to x.T$?

6) Trouver les distributions T telles que $x.T = 1$.

7) Trouver les distributions T telles que $x^n.T = 0$, resp. $x^n.T = 1$.

8) Soit S une distribution. Montrer que (sin x).S = 0 si et seulement s'il existe une suite $(c_n)_{n\in Z}$ telle que $S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n.\delta_{(n\pi)}$.

<u>Solution</u> :

1) $< \alpha.\delta, \varphi > = < \delta, \alpha.\varphi > = \alpha(0).\varphi(0) = < \alpha(0).\delta, \varphi >$. On en déduit $x.\delta = 0$.
$< \alpha(0).\delta' - \alpha'(0).\delta, \varphi > = -\alpha(0).\varphi'(0) - \alpha'(0).\varphi(0) = -(\alpha\varphi)'(0) = < \delta', \alpha\varphi > = < \alpha.\delta', \varphi >$.
On en déduit $x\delta' = -\delta$, $x^2\delta' = 0$, puis $x\delta^{(m)} = -\delta^{(m-1)}$.

3) $< \dfrac{d\alpha}{dx}.T + \alpha.\dfrac{dT}{dx}, \varphi > = < T, \dfrac{d\alpha}{dx}.\varphi > + < \dfrac{dT}{dx}, \alpha.\varphi > = < T, \dfrac{d\alpha}{dx}.\varphi > - < T, \dfrac{d}{dx}(\alpha.\varphi) >$.

$$= -< T, \alpha.\varphi' > = -< \alpha.T, \varphi' > = < \frac{d}{dx}(\alpha.T), \varphi >.$$

4) $< x.vp\frac{1}{x}, \varphi > \; = \; < vp\frac{1}{x}, x.\varphi > \; = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x}.dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{|x|\geq\varepsilon} \varphi(x).dx$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x).dx = < 1, \varphi >.$$

5) Tout d'abord, $x\delta = 0$ en vertu de 2).
Réciproquement, soit T telle que xT = 0. Pour toute fonction test $< x\mathrm{T} , \varphi > = 0$, i.e. $< \mathrm{T} , x\varphi > = 0$.
Or en vertu du théorème de division des fonctions dérivables (rappelé au § 1.1.), une fonction test ψ est de la forme $x\varphi$ si et seulement si $\delta(\psi) = < \delta , \psi > = 0$.
En vertu de la théorie de la dualité, T s'annule sur l'hyperplan Ker δ, donc T = cδ.
Plus généralement, tout réel a est valeur propre de l'opérateur $\mathrm{T} \to x\mathrm{T}$, et l'espace propre associé est la droite $c\delta_a$.

6) $x\mathrm{T} = 1 \;\Leftrightarrow\; x\,(\mathrm{T} - \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{T} = \mathrm{vp}\,\frac{1}{x} + c\delta.$

7) $x^n.\mathrm{T} = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall\varphi \in \mathfrak{D} \; < x^n.\mathrm{T} , \varphi > = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall\varphi \in \mathfrak{D} \; < \mathrm{T}, \; x^n.\varphi > = 0$
En vertu du théorème de division des fonctions dérivables, cela équivaut à

$$\forall\psi \in \mathfrak{D} \qquad \psi(0) = \psi'(0) = \dots = \psi^{(n-1)}(0) = 0 \qquad \Rightarrow \; < \mathrm{T}, \psi > = 0$$

$$\forall\psi \in \mathfrak{D} \quad < \delta , \psi > = < \delta' , \psi > = \dots = < \delta^{(n-1)} , \psi > = 0 \;\Rightarrow\; < \mathrm{T}, \psi > = 0$$

La théorie des multiplicateurs de Lagrange donne :

$$\mathrm{T} \; = \; c_0.\delta + c_1.\delta' + \dots + c_{n-1}.\delta^{(n-1)} \; .$$

Exercice 5 : Calculer, au sens des distributions les dérivées successives de $|x|$, ainsi qu'une suite de primitives successives.

Solution : Notons T = $|x|$ = sgn(x).x. Alors T'(x) = sgn(x), T'' = 2δ, etc.

En effet $< \mathrm{T}' , \varphi > = - < \mathrm{T} , \varphi' > = - \int_{-\infty}^{+\infty} |x|.\varphi'(x).dx = \int_{-\infty}^{0} x\varphi'(x).dx - \int_{0}^{+\infty} x\varphi'(x).dx$

$$= \int_{-\infty}^{0} \varphi(x).dx + \int_{0}^{+\infty} \varphi(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sgn}(x)\varphi(x).dx$$

Et $< \mathrm{T}'' , \varphi > = - < \mathrm{T}' , \varphi' > = \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x).dx - \int_{0}^{+\infty} \varphi'(x).dx = 2\,\varphi(0)$, etc.

Une primitive de T est $x^2/2$ pour $x \geq 0$, $-x^2/2$ pour $x \leq 0$, autrement dit sgn(x) $x^2/2$.

Une primitive n-ème est sgn(x)$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Elle est de même parité que n.

<u>Conclusion</u> : au sens des distributions $|x|' = \mathrm{sgn}(x)$, $|x|'' = 2\delta$.

<u>Remarque</u> : On pouvait aussi observer que $|x| = x.\mathrm{H}(x) - x.\mathrm{H}(-x)$, et utiliser les règles algébriques de dérivation.

Exercice 6 : Calculer, au sens des distributions, les dérivées d'ordre 1, 2, 3, 4 des distributions

$$\mathrm{S} = |x|.\sin x \quad , \quad \mathrm{T} = |x|.\cos x \; .$$

Solution :

S = $|x|.\sin x$ a pour dérivées

S' = $|x|'.\sin x + |x|.\cos x = \mathrm{sgn}(x).\sin x + |x|.\cos x$

S'' = $2\delta.\sin x + 2.\mathrm{sgn}(x).\cos x - |x|.\sin x = 2.\mathrm{sgn}(x).\cos x - |x|.\sin x$.

S''' = $4\delta.\cos x - 4.\mathrm{sgn}(x).\sin x - |x|.\cos x = 4\delta - 4.\mathrm{sgn}(x).\sin x - |x|.\cos x$.

Exercice 7 : Calculer, au sens des distributions :

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)\mathrm{H}(x).e^{\lambda x} \quad , \quad \left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2\right)\frac{H(x).\sin(\omega x)}{\omega} \quad \text{et} \quad \frac{d^m}{dx^m}\,\frac{H(x).x^{m-1}}{(m-1)!} \quad \text{pour } m \text{ entier} \geq 1.$$

Solution :

$< \frac{d}{dx}(\mathrm{H}(x).e^{\lambda x})\,,\,\varphi > \, = - < \mathrm{H}(x).e^{\lambda x}\,,\,\varphi' > \, = - \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)e^{\lambda x}\varphi'(x).dx \, = - \int_0^{+\infty} e^{\lambda x}\varphi'(x).dx$

$= \varphi(0) + \lambda \int_0^{+\infty} e^{\lambda x}\varphi(x).dx$, par IPP, donc $\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)\mathrm{H}(x).e^{\lambda x} = \delta$, mesure de Dirac en 0.

Autre solution : $\frac{d}{dx}(\mathrm{H}(x).e^{\lambda x}) = \frac{dH}{dx}.e^{\lambda x} + \mathrm{H}(x)\frac{de^{\lambda x}}{dx} = \delta.e^{\lambda x} + \lambda \mathrm{H}(x)\, e^{\lambda x} = \delta + \lambda \mathrm{H}(x)\, e^{\lambda x}$ en vertu du § 4.3.

$< \frac{d^2}{dx^2}\frac{H(x).\sin(\omega x)}{\omega}\,,\,\varphi > \, = \, < \frac{H(x).\sin(\omega x)}{\omega}\,,\,\varphi'' > \, = \frac{1}{\omega}\int_0^{+\infty}\sin(\omega x).\varphi''(x).dx$

$= \varphi(0) - \omega \int_0^{+\infty}\sin(\omega x).\varphi(x).dx$, au moyen de deux IPP.

Conclusion : $\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2\right)\frac{H(x).\sin(\omega x)}{\omega} = \delta$, mesure de Dirac en 0 .

Autre solution, via 4.3. :

$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{H(x).\sin(\omega x)}{\omega} = \mathrm{H}''(x)\,\frac{\sin(\omega x)}{\omega} + 2\,\mathrm{H}'(x).\cos(\omega x) - \mathrm{H}(x).\omega\sin(\omega x)$$

$= \delta'(x)\frac{\sin(\omega x)}{\omega} + 2\,\delta(x).\cos(\omega x) - \mathrm{H}(x).\omega\sin(\omega x) = -\,\delta + 2\delta - \mathrm{H}(x).\omega\sin(\omega x) = \delta + \mathrm{H}(x).\omega\sin(\omega x)$

Pour $m = 1$, $\frac{d}{dx}\mathrm{H}(x) = \delta(x)$.

Pour $m \geq 2$, $\frac{d}{dx}\frac{H(x).x^{m-1}}{(m-1)!} = \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\delta + \frac{x^{m-2}}{(m-2)!}\mathrm{H}(x) = \frac{x^{m-2}}{(m-2)!}\mathrm{H}(x)$.

Du coup, $\frac{d^2}{dx^2}\frac{H(x).x^{m-1}}{(m-1)!} = \frac{x^{m-3}}{(m-3)!}\mathrm{H}(x)$, etc. $\frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}\frac{H(x).x^{m-1}}{(m-1)!} = x\,\mathrm{H}(x)$,

$\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\frac{H(x).x^{m-1}}{(m-1)!} = x\,\delta(x) + \mathrm{H}(x) = \mathrm{H}(x)$, et finalement $\frac{d^m}{dx^m}\frac{H(x).x^{m-1}}{(m-1)!} = \delta(x)$.

Exercice 8 : Toutes les dérivées sont à calculer au sens des distributions.

1) Calculer les dérivées successives de $|\cos x|$.

2) Calculer les dérivées successives de la distribution $\mathrm{U}(x)$ définie par :

$$\mathrm{U}(x) = +1 \quad \text{pour} \quad (2k-1)\frac{\pi}{2} < x < (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

$$\mathrm{U}(x) = -1 \quad \text{pour} \quad (2k+1)\frac{\pi}{2} < x < (2k+3)\frac{\pi}{2},$$

où k prend toutes les valeurs entières paires.

3) Retrouver les résultats de 1) en écrivant $|\cos x| = \mathrm{U}(x).\cos x$.

Solution :

$< |\cos x|', \varphi > \, = - < |\cos x|\,, \varphi > \, = - \int_{-\infty}^{+\infty}|\cos x|.\varphi'(x).dx$

$= - \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{k\pi-\pi/2}^{k\pi+\pi/2}(-1)^k\cos x.\varphi'(x).dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^{k+1}\int_{k\pi-\pi/2}^{k\pi+\pi/2}\sin x.\varphi(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty}F(x).\varphi(x).dx$

où F est la fonction définie par $\mathrm{F}(x) = (-1)^{k+1}\sin x$ pour $x \in \,]\,k\pi-\pi/2, k\pi+\pi/2\,]$.
Cela dit, le mieux est de généraliser la question posée.

Exercice 9 : Montrer que $< \mathrm{T}, \varphi > \, = \int_0^{+\infty}\ln x.\varphi(x).dx$ définit une distribution.
Trouver la dérivée de cette distribution.

Solution :

La fonction f définie par $f(x) = \ln x$ pour $x > 0$, 0 pour $x \leq 0$, est localement intégrable.

Pour toute fonction test φ, la fonction $x \to \ln x.\varphi(x)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Au V(+∞), la fonction est nulle ; au V(0+), $\ln x.\varphi(x) = O(\ln x)$, donc est intégrable.

T est donc définie, et clairement linéaire. Il reste à montrer que, pour toute suite (φ_n) d'éléments de $\mathfrak{D}$ tendant vers $\varphi \in \mathfrak{D}$, $\lim_{n\to\infty} < T, \varphi_n > = < T, \varphi >$. Laissons cela au lecteur. Au fond, cela découle de ce que la fonction $F(x) = \ln x$ pour $x > 0$, 0 pour $x < 0$, est localement intégrable.

En revanche, la quasi-dérivée de f, définie par $f'(x) = 1/x$ pour $x > 0$, 0 pour $x < 0$, n'est pas intégrable. Nous allons donc régulariser l'intégrale divergente $\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}.dx$.

$$< T', \varphi > \; = \; - < T, \varphi'> \; = \; -\int_0^{+\infty} \ln x.\varphi'(x).dx .$$

Une intégration par parties donne :

$$\int_0^{+\infty} \ln x.\varphi'(x).dx = \left[\ln x.\varphi(x)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}.dx .$$

Mais l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}.dx$ peut diverger, et $\lim_{x\to0+} \ln x.\varphi(x)$ n'existe pas toujours.

Il vaut mieux utiliser une primitive de φ' s'annulant en 0, $\varphi(x) - \varphi(0)$; cela résout le problème en 0, mais $\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}.dx$ diverge en +∞. Cassons en deux !

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \ln x.\varphi'(x).dx &= \int_0^{1} \ln x.\varphi'(x).dx + \int_1^{+\infty} \ln x.\varphi'(x).dx \\
&= \left[\ln x.(\varphi(x)-\varphi(0))\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}.dx + \left[\ln x.\varphi(x)\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}.dx . \\
&= - \int_0^1 \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}.dx - \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}.dx .
\end{aligned}$$

En conclusion, $\quad < T', \varphi > \; = \; \int_0^1 \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}.dx + \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}.dx \qquad (1).$

On pourrait remplacer 1 par tout réel $a > 0$, le résultat est le même. On peut aussi écrire :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \ln x.\varphi'(x).dx &= \lim_{\varepsilon\to0+} \int_0^{+\infty} \ln x.\varphi'(x).dx = \lim_{\varepsilon\to0+} \left[\ln x.\varphi(x)\right]_\varepsilon^{+\infty} - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}.dx . \\
&= \lim_{\varepsilon\to0+} - \ln \varepsilon.\ \varphi(\varepsilon) - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}.dx .
\end{aligned}$$

D'où $\qquad < T', \varphi > \; = \; \lim_{\varepsilon\to0+} (\ln \varepsilon).\ \varphi(\varepsilon) + \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}.dx \qquad (2)$

Comme $\lim_{\varepsilon\to0+} \ln \varepsilon.\ (\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)) = 0$ (pourquoi ?), on peut aussi écrire :

$$< T', \varphi > \; = \; \lim_{\varepsilon\to0+} (\ln \varepsilon).\ \varphi(0) + \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}.dx \qquad (3).$$

En termes savants, $T = \ln x.H(x)$ a pour dérivée $T' = \mathrm{Pf}\ \frac{H(x)}{x}$.

Exercice 10 : Montrer que la fonction $F(x) = \ln |x|$ définit une distribution, et que $\frac{d}{dx} \ln |x| = vp\ \frac{1}{x}$.

Solution : T_F est une distribution car F est localement intégrable.

$$< T', \varphi > \; = \; - < T, \varphi'> \; = \; -\int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x|.\varphi'(x).dx = -\int_0^{+\infty} \ln x.\varphi'(x).dx - \int_{-\infty}^{0} \ln(-x).\varphi'(x).dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} (\ln\varepsilon).\varphi(0) + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}.dx + \lim_{\varepsilon\to 0+} -(\ln\varepsilon).\varphi(0) + \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}.dx .$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}.dx + \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}.dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}.dx = vp\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}.dx .$$

En reprenant les calculs précédents.

<u>Exercice 11</u> : Calculer, au sens des distributions : $x\,\frac{d}{dx}\ln|x|$.

<u>Solution</u> :

<u>Preuve directe</u> :

$$< x.\frac{d}{dx}\ln|x| , \varphi > = < \frac{d}{dx}\ln|x| , x.\varphi > = -< \ln|x| , (x.\varphi)' > = -\int_{-\infty}^{+\infty}\ln|x|.(x\varphi)'.dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{0}\ln(-x).(x\varphi)'.dx - \int_{0}^{+\infty}\ln x.(x\varphi)'.dx$$

$$= -\lim_{\alpha\to 0-}\int_{-\infty}^{\alpha}\ln(-x).(x\varphi)'.dx - \lim_{\beta\to 0+}\int_{\beta}^{+\infty}\ln x.(x\varphi)'.dx = (\text{ IPP }) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x).dx .$$

<u>Preuve indirecte</u> : on a vu que $\frac{d}{dx}\ln|x| = \mathrm{vp}\frac{1}{x}$. Tout revient à vérifier que $x.\ \mathrm{vp}\frac{1}{x} = 1$.

Cela a déjà été fait.

<u>Conclusion</u> : Au sens des distributions $x\,.\frac{d}{dx}\ln|x| = 1$.

<u>Exercice 12</u> : **<u>Un exemple de partie finie de Hadamard</u>**.

1) On note $\mathrm{Pf}(\frac{1}{x^2}) = -F'' = -(vp\frac{1}{x})'$. Montrer que :

$$\forall\varphi\in\mathfrak{D}\quad < \mathrm{Pf}(\frac{1}{x^2}) , \varphi > = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi'(x)-\varphi'(-x)}{x}.dx = \int_{0}^{+\infty}\frac{\varphi'(x)-\varphi'(-x)}{x}.dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}.dx = \int_{0}^{+\infty}\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}.dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty}\ln|x|.\varphi''(x).dx .$$

2) Montrer enfin que $x^2.\mathrm{Pf}(\frac{1}{x^2}) = 1$.

<u>Solution</u> : $< \mathrm{Pf}(\frac{1}{x^2}) , \varphi > = -< (vp\frac{1}{x})' , \varphi > = < vp\frac{1}{x} , \varphi' >$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi'(x)}{x}.dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi'(x)-\varphi'(-x)}{x}.dx .$$

Une IPP donne $\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi'(x)-\varphi'(-x)}{x}.dx = \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{g'(x)}{x}.dx$, où $g(x) = \varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)$

$$= \left[\frac{g(x)}{x}\right]_{\varepsilon}^{+\infty} + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{g(x)}{x^2}.dx = -\frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)-2\varphi(0)}{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}.dx ,$$

$\frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)-2\varphi(0)}{\varepsilon} \to 0$ quand $\varepsilon\to 0$ car $\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0) = O(x^2)$ au V(0)

Donc $< \mathrm{Pf}(\frac{1}{x^2}) , \varphi > = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}.dx = \int_{0}^{+\infty}\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}.dx$

(intégrale faussement impropre en 0).

2) $x^2\ \mathrm{Pf}(\frac{1}{x^2}) = 1$ en vertu du calcul ci-dessous (par exemple) :

$$< x^2\,\mathrm{Pf}(\frac{1}{x^2}), \varphi > \; = \; < \mathrm{Pf}(\frac{1}{x^2}), x^2\varphi > \; = \int_0^{+\infty}\frac{x^2\varphi(x)+x^2\varphi(-x)}{x^2}.dx \; = \int_0^{+\infty}(\varphi(x)+\varphi(-x)).dx \; = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x).dx\,.$$

<u>Exercice 13</u> : Montrer que la fonction f définie par $f(x) = 0$ pour $x < 0$, $\sqrt{x}$ pour $x > 0$, définit une distribution. Calculer sa dérivée.

<u>Solution</u> : La fonction f est localement intégrable. Sa quasi-dérivée vaut 0 sur $]-\infty, 0[$, et $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$, qui est localement intégrable. Nous allons la régulariser.

Précisons : $< f', \varphi > \; = - < f, \varphi' > \; = -\int_0^{+\infty}\sqrt{x}.\varphi'(x).dx \; = \lim_{\varepsilon\to 0} -\int_\varepsilon^{+\infty}\sqrt{x}.\varphi'(x).dx$

Intégrons par parties : $-\int_\varepsilon^{+\infty}\sqrt{x}.\varphi'(x).dx \; = \sqrt{\varepsilon}.\varphi(\varepsilon) + \int_\varepsilon^{+\infty}\varphi(x)\frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

Quand $\varepsilon \to 0$, cela tend vers $\int_0^{+\infty}\varphi(x)\frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

En résumé $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}\,\mathrm{H}(x)) = \frac{H(x)}{2\sqrt{x}}$.

<u>Exercice 14</u> : Montrer que la fonction f définie par $f(x) = 0$ pour $x < 0$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ pour $x > 0$, définit une distribution. Calculer sa dérivée.

<u>Solution</u> : La fonction f est localement intégrable. Sa quasi-dérivée vaut 0 sur $]-\infty, 0[$, et $-\frac{1}{2}x^{-3/2}$ sur $]0, +\infty[$, qui n'est pas localement intégrable. Nous allons la régulariser.

Précisons : $< f', \varphi > \; = - < f, \varphi' > \; = -\int_0^{+\infty}\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{x}}.dx \; = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{x}}.dx$.

Intégrons par parties : $-\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{x}}.dx \; = \frac{\varphi(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} + \int_\varepsilon^{+\infty}\varphi(x)\frac{-1}{2x^{3/2}}.dx$.

Comme $\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + O(\varepsilon)$ quand $\varepsilon \to 0$, on a finalement :

$$< f', \varphi > \; = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\varepsilon}} + \int_\varepsilon^{+\infty}\varphi(x)\frac{-1}{2x^{3/2}}.dx \right).$$

<u>Exercice 15</u> : Pour quelles valeurs du réel α, $f(x) = x^{\alpha-1}e^{-x}$ pour $x > 0$, 0 pour $x < 0$, définit-elle une distribution ? Calculer sa dérivée.

<u>Solution</u> :

On sait que f est intégrable sur **R** ssi $\alpha > 0$.

$$< f', \varphi > \; = - < f, \varphi' > \; = -\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}.\varphi'(x).dx\,.$$

Intégrons par parties, en notant que $\varphi'(x)$ est dérivée de $\varphi(x) - \varphi(0)$. Il vient :

$$< f', \varphi > \; = - < f, \varphi' > \; = \int_0^{+\infty}((\alpha-1)x^{\alpha-1}-x^{\alpha})e^{-x}.\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}.dx\,.$$

Autrement dit : $< f', \varphi > \; = \; < (\alpha - 1)f - x f, \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} >$.

Exercice 16 : Quelles sont les limites, au sens des distributions, des suites de fonctions suivantes :

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+\frac{x^2}{2n})^n} \quad , \quad g_n(x) = (1 - \frac{x^2}{2n})^n \text{ si } |x| < \sqrt{2n} \text{ , 0 sinon } \quad , \quad h_n(x) = (\cos\frac{x}{\sqrt{n}})^n .$$

ainsi que la suite $T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{k^2}{2n^2}}\delta_{(k/n)}$.

Solution :

Réponse : Les quatre suites convergent au sens des distributions vers la gaussienne $G(x) = e^{-x^2/2}$.

Les trois premières suites de fonctions tendent simplement vers G, et sont uniformément bornées.

Par exemple, si l'on fixe x, on a $\left|\frac{x}{\sqrt{n}}\right| \le \frac{\pi}{2}$ pour n assez grand, donc

$$(\cos\frac{x}{\sqrt{n}})^n = \exp(\, n.\ln\cos\frac{x}{\sqrt{n}}) = \exp(n.\ln(\, 1 - \frac{x^2}{2n} + o(\frac{1}{n}))) = \exp(-\frac{x^2}{2} + o(1)).$$

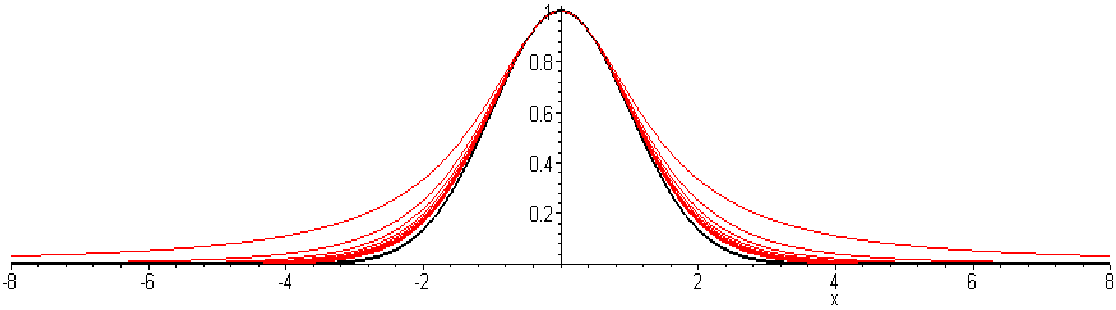
Si φ est une fonction test, de support inclus dans [a, b]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x).\varphi(x).dx = \int_a^b f_n(x).\varphi(x).dx \to \int_a^b G(x).\varphi(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x).\varphi(x).dx$$

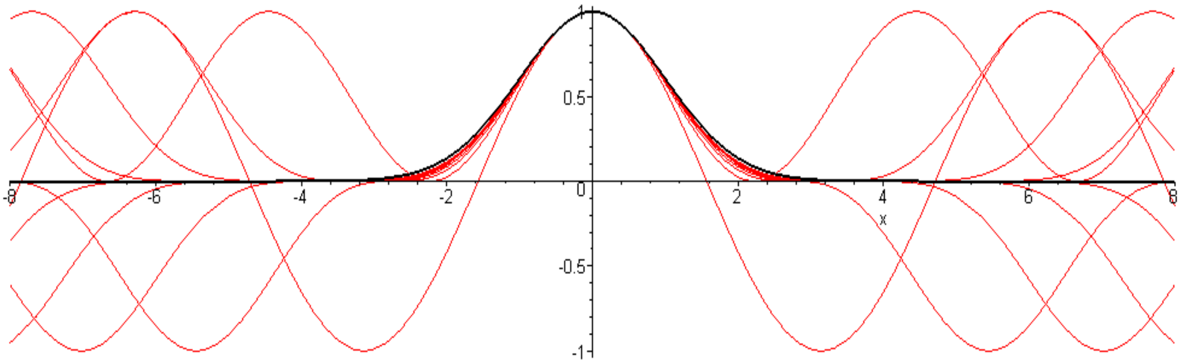
par domination $|f_n(x).\varphi(x)| \le \|\varphi\|_\infty$. Idem pour les deux autres, car $|g_n(x)| \le 1$ et $|h_n(x)| \le 1$.

$$< T_n , \varphi > = \frac{1}{n}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{k^2}{2n^2}}.\varphi(\frac{k}{n}) \to \int_a^b G(x).\varphi(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x).\varphi(x).dx$$ par sommes de Riemann.

```
> with(plots):a:=plot(exp(-x^2/2),x=-8..8,thickness=2,color=black):
f:=(n,x)->1/(1+x^2/(2*n))^n;q:=n->plot(f(n,x),x=-8..8):
display({a,seq(q(n),n=1..9)});
```




```
> h:=(n,x)->cos(x/sqrt(n))^n:p:=n->plot(h(n,x),x=-8..8):
display({a,seq(p(n),n=1..9)});
```



Exercice 17 : Quelles sont les limites dans $\mathfrak{D}'$, quand $h \to 0$, des distributions suivantes :

$$\frac{\delta_{(h)} - \delta_{(-h)}}{2h} \quad , \quad \frac{\delta_{(2h)} + \delta_{(-2h)} - 2\delta_{(0)}}{4h^2} \quad , \quad \frac{1}{(2h)^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.C_n^k.\delta_{((n-2k).h)} .$$

Solution :

$< \dfrac{\delta_{(h)}-\delta_{(-h)}}{2h}, \varphi > = \dfrac{\varphi(h)-\varphi(-h)}{2h} \to \varphi'(0)$, en vertu du DL $\varphi(h) = \varphi(0) + \varphi'(0).h + O(h^2)$.

$< \dfrac{\delta_{(2h)}+\delta_{(-2h)}-2\delta_{(0)}}{4h^2}, \varphi > = \dfrac{\varphi(2h)+\varphi(-2h)-2\varphi(0)}{4h^2} \to \varphi''(0)$,

en vertu du DL $\varphi(h) = \varphi(0) + \varphi'(0).h + \varphi''(0).\dfrac{h^2}{2} + O(h^3)$.

<u>Conclusion</u> : $\dfrac{\delta_{(h)}-\delta_{(-h)}}{2h} \to -\delta'$, $\dfrac{\delta_{(2h)}+\delta_{(-2h)}-2\delta_{(0)}}{4h^2} \to \delta''$.

<u>Exercice 18</u> : Quelles sont les limites dans $\mathfrak{D}'$, quand $n \to \infty$, des suites de fonctions :

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}.e^{-n^2x^2} \qquad \text{et} \qquad F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t).dt \ .$$

<u>Solution</u> : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x).\varphi(x).dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}.\varphi(\frac{u}{n}).du$ (chgt de var $u = nx$)

$\displaystyle\to \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}.\varphi(0).du = \varphi(0) = < \delta , \varphi >$ par convergence dominée.

$\displaystyle F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t).dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{nx} e^{-u^2}.du \to 0$ si $x < 0$, ½ si $x = 0$, 1 si $x > 0$.

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F_n(x).\varphi(x).dx \to \int_{0}^{+\infty} \varphi(x).dx = \int_{0}^{+\infty} H(x).\varphi(x).dx$ par convergence dominée.

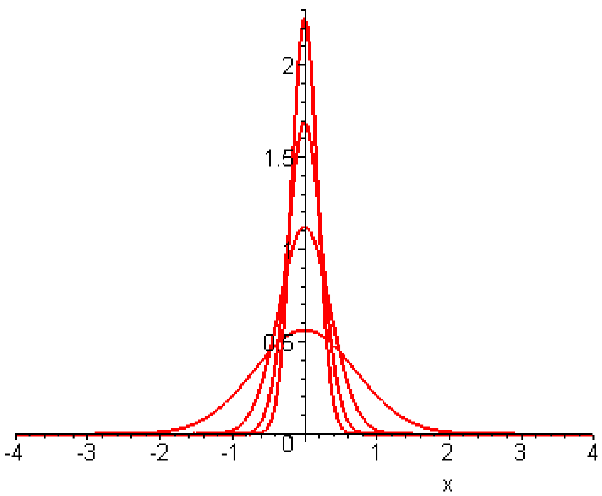
<u>Conclusion</u> : $(f_n) \to \delta$, $(F_n) \to H$, ce qui est assez logique.

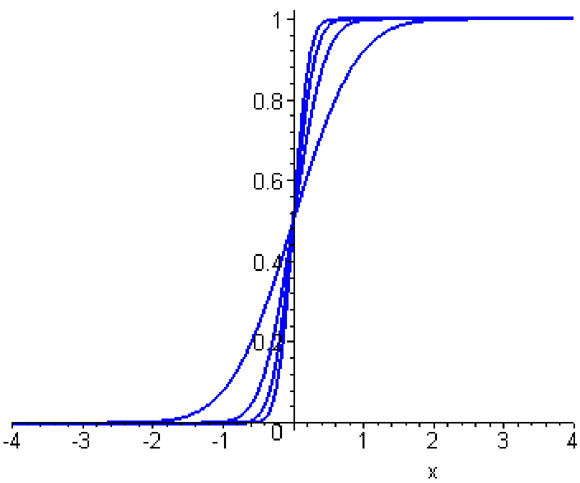
Avec Maple :

```
> f:=(n,x)->n/sqrt(Pi)*exp(-n^2*x^2);
> F:=(n,x)->int(f(n,t),t=-infinity..x);
> int(f(n,x),x=-infinity..infinity);
```

$$\begin{cases} \operatorname{csgn}(n) & \operatorname{csgn}(n^2) = 1 \\ \infty & \textit{otherwise} \end{cases}$$

```
> with(plots):
> p:=n->plot(f(n,x),x=-4..4, thickness=2);display([seq(p(n),n=1..4)]);
> q:=n->plot(F(n,x),x=-4..4, thickness=2,color=blue);
display([seq(q(n),n=1..4)]);
```





Exercice 19 : Montrer que

$$\text{Lim}_{\lambda\to+\infty}\ \lambda e^{-\lambda x}H(x) = \delta \qquad\qquad \text{Lim}_{\lambda\to0+}\ \lambda e^{-\lambda x}H(x) = 0$$

Solution : Par convergence dominée (φ est bornée !)

$$< \lambda e^{-\lambda x}H(x)\,,\,\varphi(x) > = \int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}.\varphi(x).dx = \int_0^{+\infty}e^{-u}.\varphi(\frac{u}{\lambda}).du$$

tend vers $\int_0^{+\infty}e^{-u}.\varphi(0).du = \varphi(0)$ quand $\lambda\to+\infty$, et vers 0 quand $\lambda\to 0+$.

On reconnaît les propriétés de la valeur initiale et de la valeur finale vues dans le chapitre sur la transformée de Laplace.

Plus généralement, nous avons vu (chap. sur transformation de Laplace, exercice final) que

$$< e^{-\lambda x}H(x)\,,\,\varphi(x) > = \int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}.\varphi(x).dx = \frac{\varphi(0)}{\lambda} + \frac{\varphi'(0)}{\lambda^2} + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{\lambda^{n+1}} + O(\frac{1}{\lambda^{n+2}}) \text{ au V}(+\infty).$$

On en déduit par exemple que $\text{Lim}_{\lambda\to+\infty}\ (\lambda^2 e^{-\lambda x}H(x) - \lambda\delta) = -\delta'$, etc.

Exercice 20 : **Suites de fonctions tendant vers δ** . Montrer que :

$$\text{Lim}_{\varepsilon\to0+}\ \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \delta \qquad \text{Lim}_{\varepsilon\to0+}\ -\frac{2}{\pi}\frac{\varepsilon x}{(x^2+\varepsilon^2)^2} = \delta' \qquad \text{Lim}_{t\to0+}\ \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/4t} = \delta$$

Solution :

$$< \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,,\,\varphi > = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}.\varphi(x).dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}.\varphi(\varepsilon t).dt \to \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}.\varphi(0).dt = \varphi(0),$$

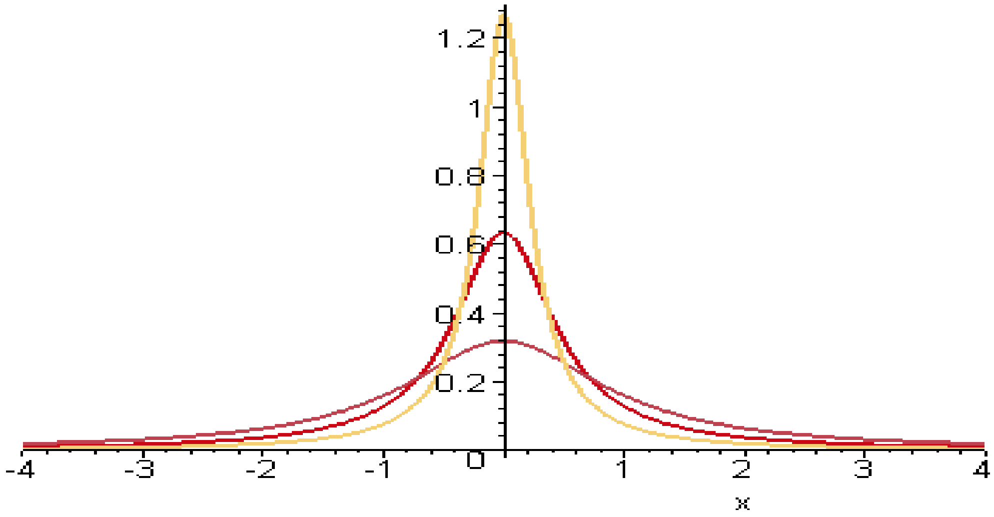
par convergence dominée (φ est bornée).

La deuxième limite se traite par IPP ou par continuité de la dérivée.

$$<\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/4t}\,,\,\varphi > = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2/4t}.\varphi(x).dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}.\varphi(2u\sqrt{t}).du \quad (\text{ chgt de var } x = 2u\sqrt{t}\ )$$

$$\to \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}.\varphi(0).du = \varphi(0)$$ par convergence dominée (φ est bornée).

```
> with(plots):f:=(epsilon,x)->1/Pi*epsilon/(x^2+epsilon^2);
p:=epsilon->plot(f(epsilon,x),x=-4..4,color=COLOR(RGB, rand()/10^12,
rand()/10^12, rand()/10^12),thickness=2);display({p(1),p(0.5),p(0.25)});
```



Exercice 21 : Montrer qu'au sens des distributions

$$\text{Lim}_{\varepsilon\to0+}\ \frac{x}{x^2+\varepsilon^2} = \text{v.p. }\frac{1}{x} \qquad , \qquad \text{Lim}_{\varepsilon\to0+}\ \frac{1}{x+i\varepsilon} = \text{v.p. }\frac{1}{x} - i\pi\delta.$$

Solution :

$< \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}, \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}.\varphi(x).dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2}.\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}.dx$, après pliage.

Or $\left|\frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2}\,\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\right| \leq \left|\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\right|$, majorante intégrable.

Par conséquent $< \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}, \varphi > \to \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}.dx = <$ v.p. $\frac{1}{x}$, φ >.

Autre solution :

$\frac{x}{x^2+\varepsilon^2} = \frac{d}{dx}\frac{1}{2}\ln(x^2+\varepsilon^2)$. Or $\frac{1}{2}\ln(x^2+\varepsilon^2)$ tend vers $\ln|x|$ en tant que distribution.

Par continuité de la dérivation, $\frac{d}{dx}\frac{1}{2}\ln(x^2+\varepsilon^2)$ tend vers $\frac{d}{dx}\ln|x|$ = v.p. $\frac{1}{x}$.

$< \frac{1}{x+i\varepsilon}, \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}.\varphi(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}.\varphi(x).dx - i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}.\varphi(x).dx$

et l'on conclut à l'aide de ce qui précède et de l'exercice précédent.

Exercice 22 : Trouver les limites, au sens des distributions, de cos(*nx*) , sin(*nx*) , e^{inx} .

En déduire qu'au sens des distributions $\lim_{\nu\to+\infty} \frac{1}{\pi}\frac{\sin(\nu x)}{x} = \delta$.

Montrer que < v.p. $\frac{\cos\nu x}{x}$, φ > = v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\nu x)}{x}.\varphi(x).dx$ définit une distribution,

et que $\lim_{\nu\to+\infty}$ v.p. $\frac{\cos\nu x}{x} = 0$.

Solution :

1) $< e^{inx}, \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{inx}.\varphi(x).dx = \int_{-A}^{+A} e^{inx}.\varphi(x).dx$ = (IPP) = $-\frac{1}{in}\int_{-A}^{+A} e^{inx}.\varphi'(x).dx$,

la partie intégrée étant nulle. On en déduit que $|< e^{inx}, \varphi >| \leq \frac{1}{n}\int_{-A}^{+A}|\varphi'(x)|.dx = O(\frac{1}{n})$.

Conclusion : bien que la suite de fonctions (e^{inx}) diverge presque en tous points, elle tend vers 0 au sens des distributions. Idem pour les suites de distributions (cos(*nx*)) et (sin(*nx*)).

Remarques : a) Voici une autre preuve. La suite de fonctions ($\frac{1}{in}e^{inx}$) tend uniformément vers 0, donc tend vers 0 au sens des distributions. Par continuité de l'opérateur de dérivation, la suite de ses dérivées tend vers 0.

b) Le fait que *n* soit entier n'est pas indispensable.

c) Ces résultats rentrent dans un lemme de Riemann-Lebesgue général mentionné en cours.

2) Montrons maintenant que $\lim_{\nu\to+\infty} \frac{1}{\pi}\frac{\sin(\nu x)}{x} = \delta$.

$<\frac{1}{\pi}\frac{\sin(\nu x)}{x}, \varphi > = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\nu x)}{x}.\varphi(x).dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}.\varphi(\frac{t}{\nu}).dt \to \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}.\varphi(0).dt = \varphi(0)$,

mais là il n'y a pas convergence dominée… Ecrivons :

$<\frac{1}{\pi}\frac{\sin(\nu x)}{x}, \varphi > - < \delta, \varphi > = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\nu x)}{x}.(\varphi(x)-\varphi(0)).dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(\nu x).\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}.dx \to 0$

en vertu de ce qui précède, car $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$ est une fonction-test en vertu du théorème de division des fonctions dérivables.

3) Par définition, v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\nu x)}{x}.\varphi(x).dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{|x\geq\varepsilon|} \frac{\cos(\nu x)}{x}.\varphi(x).dx$.

Après pliage, $\int_{|x\geq\varepsilon|} \frac{\cos(\nu x)}{x}.\varphi(x).dx = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \cos(\nu x).\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}.dx \to \int_{0}^{+\infty} \cos(\nu x).\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}.dx$.

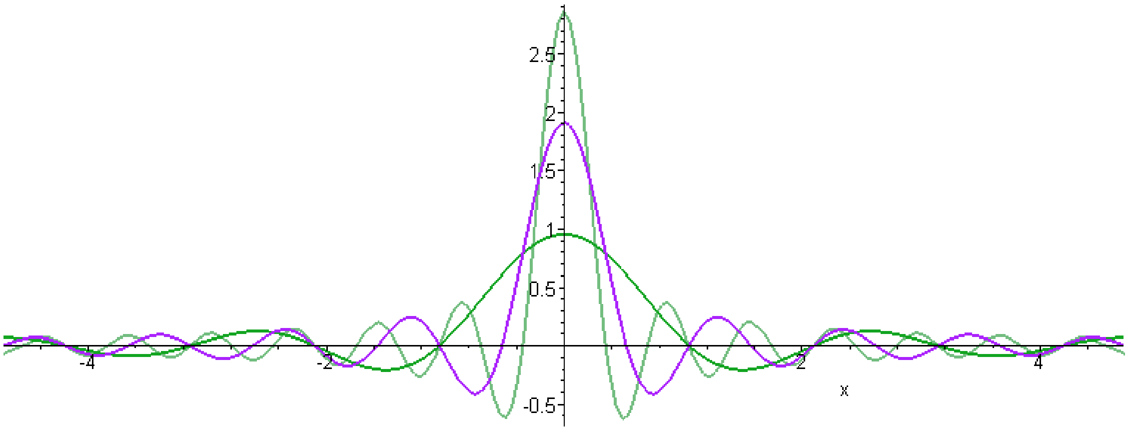
Ainsi, pour toute fonction-test, $\int_{|x\geq\varepsilon|} \frac{\cos(\nu x)}{x}.\varphi(x).dx$ a une limite.

Cette limite est une distribution en vertu du théorème de Banach-Steinhaus-Schwartz.

A noter que v.p. $\frac{\cos \nu x}{x}$ = cos(νx). v.p. $\frac{1}{x}$.

Enfin $\int_{0}^{+\infty} \cos(\nu x).\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}.dx \to 0$ quand $\nu \to \pm\infty$ en vertu de ce qui précède…

```
> with(plots):f:=(nu,x)->1/Pi*sin(nu*x)/x;
> p:=nu->plot(f(nu,x),x=-3*Pi/2..3*Pi/2,color=COLOR(RGB, rand()/10^12, rand()/10^12, rand()/10^12),thickness=2);display({p(3),p(6),p(9)});
```



<u>Exercice 23</u> : Trouver la limite, au sens des distributions, du noyau de Dirichlet $D_n(x) = \sum_{k=-n}^{+n} e^{ikx}$.

<u>Solution</u> :

Ce résultat a déjà été établi dans le cours, mais nous allons le retrouver par deux méthodes.

<u>1ère méthode, directe</u>.

On sait que $D_n(x) = \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}$ pour $x \notin 2\pi\mathbf{Z}$, $2n + 1$ sinon

Soit φ une fonction-test, de support inclus dans [a, b] ⊂ [−(2N + 1)π, (2N + 1)π].

On a : $< D_n , \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}.\varphi(x).dx = \sum_{k=-N}^{+N} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}.\varphi(x).dx$

$$= \sum_{k=-N}^{+N} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}.\varphi(x+2n\pi).dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}.\psi(x).dx$$

où $\psi(x) = \sum_{n=-N}^{+N} \varphi(x+2n\pi)$. Ecrivons alors :

$$< D_n , \varphi > = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}.\psi(0).dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}.(\psi(x)-\psi(0)).dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x).\psi(0).dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin((n+\frac{1}{2})x).\frac{x}{\sin(x/2)}.\frac{\psi(x)-\psi(0)}{x}.dx .$$

Cette dernière intégrale tend vers 0 en vertu de Riemann-Lesbegue.

La première vaut $2\pi.\psi(0) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(2k\pi)$.

En conclusion $< D_n , \varphi > = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}.\varphi(x).dx \to 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(2k\pi)$.

Rappelons que la somme est à support fini, car φ est à support borné.

> Conclusion : La suite (D_n) tend vers le peigne de Dirac $2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_{(2k\pi)}$.

2ème méthode, indirecte.

Commençons par montrer que la suite (D_n) converge dans l'espace des distributions, autrement dit que la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{inx}$ converge (au sens des sommes partielles symétriques).

Pour cela, considérons la série $\sum_{n\in Z, n\neq 0} \frac{e^{inx}}{n^2}$. Elle converge normalement dans **R**, donc uniformément, et sa somme est une fonction continue 2π-périodique et paire, *f*.

Par conséquent, $\sum_{n\in Z, n\neq 0} \frac{e^{inx}}{n^2}$ converge vers T_f dans l'espace des distributions.

Du coup, sa dérivée seconde $\sum_{n\in Z, n\neq 0} e^{inx}$ converge, ainsi bien sûr que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{inx} = T$.

Reste à montrer que $T = 2\pi\delta$.

$e^{ix}\,T = e^{ix} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{inx} = T$, donc $(e^{ix} - 1).T = 0$. Cela s'écrit aussi $x\frac{e^{ix}-1}{x}.T = 0$, où $\frac{e^{ix}-1}{x}$ est C^∞.

On en déduit, en vertu des propriétés de la multiplication des distributions (voir exercice), que

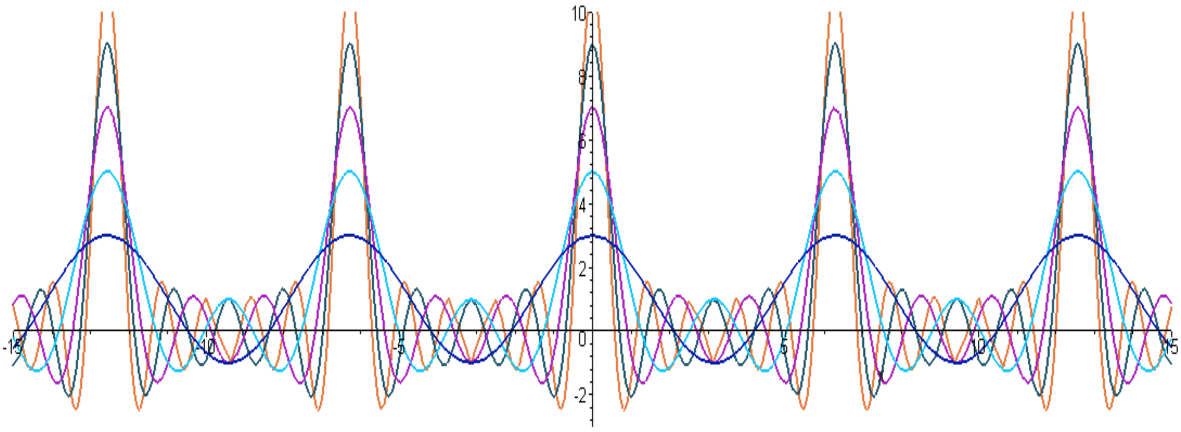
$$\frac{e^{ix}-1}{x}.T = c.\delta\ , \quad \text{donc} \quad T = a.\delta.$$

Autrement dit $< D_n , \varphi > \to a.\varphi(0)$ pour toute fonction-test φ. Reste à montrer que $a = 1$…

Pour cela, choisissons une fonction-test φ de support inclus dans $[-\pi, \pi]$ et telle que $\varphi(0) = 1$.

Par Dirichlet, $< D_n , \varphi > \to 2\pi$, donc $a = 2\pi$.

```
> with(plots):
> p:=n->plot(sin((n+1/2)*x)/sin(x/2),x=-15..15,-3..10,thickness=2,
color=COLOR(RGB, rand()/10^12, rand()/10^12, rand()/10^12));
> display([seq(p(n),n=1..5)]);
```



Convergence du noyau de Dirichlet vers le peigne de Dirac

Exercice 24 : **Quelques équations différentielles**.
Résoudre dans l'espace des distributions les équations différentielles :

$$u' + x\,u = \delta \quad , \quad u' + u = H \quad , \quad u' + e^{-x}u = \delta'$$

Solution :

• $u' + x\,u = \delta \Leftrightarrow (u' + x\,u)\,e^{x^2/2} = \delta\,e^{x^2/2} \Leftrightarrow \dfrac{d}{dx}(ue^{x^2/2}) = \delta$, car $\delta\,e^{x^2/2} = \delta$.

$$\Leftrightarrow u.\,e^{x^2/2} = H(x) + c \Leftrightarrow u = (H(x) + c)\,e^{-x^2/2}$$

• $u' + u = H \Leftrightarrow (u' + x\,u)\,e^{x} = H(x)\,e^{x} \Leftrightarrow \dfrac{d}{dx}(ue^{x}) = H(x)\,e^{x}$

$$\Leftrightarrow u.\,e^{x} = \int_{-\infty}^{x} H(t)e^{t}.dt + c \Leftrightarrow u = (H(x)(e^{x} - 1) + c)\,e^{-x}$$

car $\int_{-\infty}^{x} H(t)e^{t}.dt = 0$ pour $x < 0$, $e^{x} - 1$ pour $x \geq 0$.

• $u' + e^{-x}u = \delta' \Leftrightarrow (u' + e^{-x}u)\,e^{-e^{-x}} = e^{-e^{-x}}\,\delta' \Leftrightarrow \dfrac{d}{dx}(u\,e^{-e^{-x}}) = e^{-e^{-x}}\,\delta'$.

Or $a(x).\delta' = -a'(0).\delta + a(0).\delta'$. Ici $e^{-e^{-x}}\,\delta' = -\,e^{-1}.\delta + e^{-1}.\delta'$.

Au final $u\,e^{-e^{-x}} = -\,e^{-1}.H(x) + e^{-1}.\delta + c$, donc $u = (-\,e^{-1}.H(x) + e^{-1}.\delta + c)\,e^{e^{-x}}$.

Maple confirme !

```
> dsolve(diff(u(x),x)+x*u(x)=Dirac(x),u(x));
```

$$u(x) = (\mathrm{Heaviside}(x) + \_C1)\,\mathbf{e}^{(-1/2\,x^2)}$$

```
> dsolve(diff(u(x),x)+u(x)=Heaviside(x),u(x));
```

$$u(x) = (\mathrm{Heaviside}(x)\,\mathbf{e}^{x} - \mathrm{Heaviside}(x) + \_C1)\,\mathbf{e}^{(-x)}$$

```
> dsolve(diff(u(x),x)+exp(-x)*u(x)=diff(Dirac(x),x),u(x));
```

$$u(x) = (\mathbf{e}^{(-1)}\,\mathrm{Dirac}(x) - \mathbf{e}^{(-1)}\,\mathrm{Heaviside}(x) + \_C1)\,\mathbf{e}^{(\mathbf{e}^{(-x)})}$$

Exercice 25 : Trouver une distribution F(t) = H(t).f(t) où H est la fonction de Heaviside et f est une fonction de classe C^2, qui vérifie au sens des distributions :

$$a\,\frac{d^2F}{dt^2} + b\,\frac{dF}{dt} + c\,F = m\,\delta + n\,\delta'$$

où a, b, c, m, n sont des constantes données.
Cas particuliers :

- $a = c = 1$, $b = 2$, $m = n = 1$;
- $a = 1$, $b = 0$, $c = 4$, $m = 1$, $n = 0$;
- $a = 1$, $b = 0$, $c = -4$, $m = 2$, $n = 1$.

Solution :

$$a\,\frac{d^2F}{dt^2} + b\,\frac{dF}{dt} + c\,F = H(t)(\,a\,f''(t) + b\,f'(t) + c\,f(t)\,) + (\,a\,f'(0) + b\,f(0)\,).\delta + a\,f(0).\delta' = m\,\delta + n\,\delta'$$

est satisfaite pour $a\,f''(t) + b\,f'(t) + c\,f(t) = 0$, $a\,f'(0) + b\,f(0) = m$, $a\,f(0) = n$
Il y a une discussion à mener.
Il reste à ajouter la solution générale de l'équation homogène associée.

Avec Maple :

```
> ed:=a*diff(T(x),x,x)+b*diff(T(x),x)+c*T(x)=
m*Dirac(x)+n*diff(Dirac(x),x);
```

$$ed := a\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{T}(x)\right) + b\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{T}(x)\right) + c\,\mathrm{T}(x) = m\,\mathrm{Dirac}(x) + n\,\mathrm{Dirac}(1, x)$$

```
> dsolve(subs([a=1,c=1,b=2,m=1,n=1],ed),T(x));
```

$$T(x) = e^{(-x)}\_C2 + e^{(-x)}x\_C1 + \mathrm{Heaviside}(x)\,e^{(-x)}$$

```
> dsolve(subs([a=1,c=4,b=0,m=1,n=0],ed),T(x));
```

$$T(x) = \sin(2x)\_C2 + \cos(2x)\_C1 + \frac{1}{2}\mathrm{Heaviside}(x)\sin(2x)$$

```
> dsolve(subs([a=1,c=-4,b=0,m=2,n=1],ed),T(x));
```

$$T(x) = e^{(2x)}\_C2 + e^{(-2x)}\_C1 + e^{(2x)}\mathrm{Heaviside}(x)$$

```
> dsolve(ed,T(x));
```

$$T(x) = e^{\left(-1/2\frac{(b-\sqrt{b^2-4ca})x}{a}\right)}\_C2 + e^{\left(-1/2\frac{(b+\sqrt{b^2-4ca})x}{a}\right)}\_C1 + \mathrm{Heaviside}(x)\,e^{\left(-\frac{xb}{a}\right)}\Bigg(\left(-m\,a+\frac{1}{2}n\,b+\frac{1}{2}n\sqrt{b^2-4ca}\right)e^{\left(1/2\frac{(b-\sqrt{b^2-4ca})x}{a}\right)}$$
$$+\left(m\,a-\frac{1}{2}n\,b+\frac{1}{2}n\sqrt{b^2-4ca}\right)e^{\left(1/2\frac{(b+\sqrt{b^2-4ca})x}{a}\right)}\Bigg)\Big/\left(\sqrt{b^2-4ca}\;a\right)$$

Exercice 26 : Dans le plan (*x*, *y*), on appelle fonction de Heaviside la fonction H(*x*, *y*) égale à 1 si *x* > 0 et *y* > 0, et à 0 ailleurs. Montrer que l'on a, au sens des distributions :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \delta_{(0,0)}.$$

Solution :

$$< \frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}, \varphi > = < H, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} > = \iint_{R^2} H(x,y).\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}.dxdy = \iint_D \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}.dxdy \text{ , où } D = [0, +\infty[^2$$

$$= \int_{y=0}^{y=+\infty}\left(\int_{x=0}^{x=+\infty}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}.dx\right).dy = \int_{y=0}^{y=+\infty} -\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,y).dy = \varphi(0,0).$$

Exercice 27 : Dans le plan (*x*, *y*), soit T la distribution égale à 1 sur [a, b]×[c, d], à 0 ailleurs.
Calculer $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 T}{\partial x.\partial y}$ et $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

Solution :

$$< \frac{\partial T}{\partial x}, \varphi(x,y) > = -< T, \frac{\partial\varphi}{\partial x} > = -\int_{y=c}^{y=d}\left(\int_{x=a}^{x=b}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y).dx\right).dy = -\int_c^d(\varphi(b,y)-\varphi(a,y)).dy$$

$$< \frac{\partial T}{\partial y}, \varphi(x,y) > = -< T, \frac{\partial\varphi}{\partial y} > = -\int_{x=a}^{x=b}\left(\int_{y=c}^{y=d}\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y).dx\right).dy = -\int_a^b(\varphi(x,d)-\varphi(x,c)).dy$$

Du coup,

$$< \frac{\partial^2 T}{\partial x.\partial y}, \varphi(x,y) > = -\int_c^d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}(b,y)-\frac{\partial\varphi}{\partial y}(a,y)\right).dy = -\varphi(b,d)+\varphi(b,c)+\varphi(a,d)-\varphi(a,c)$$

Exercice 28 : Dans le plan (*x*, *t*), on pose $E(x,t) = \frac{H(t)}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$.

Calculer, au sens des distributions : $\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$.

Solution : Faisons confiance à Maple :

```
> E:=(t,x)->Heaviside(t)/(2*sqrt(Pi*t))*exp(-x^2/(4*t));
```

$$E := (t, x) \to \frac{1}{2}\,\frac{\text{Heaviside}(t)\,\mathbf{e}^{\left(-1/4\,\frac{x^2}{t}\right)}}{\sqrt{\pi\,t}}$$

```
> diff(E(t,x),t);diff(E(t,x),x,x);
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{\text{Dirac}(t)\,\mathbf{e}^{\left(-1/4\,\frac{x^2}{t}\right)}}{\sqrt{\pi\,t}} - \frac{1}{4}\,\frac{\text{Heaviside}(t)\,\mathbf{e}^{\left(-1/4\,\frac{x^2}{t}\right)}\,\pi}{(\pi\,t)^{(3/2)}} + \frac{1}{8}\,\frac{\text{Heaviside}(t)\,x^2\,\mathbf{e}^{\left(-1/4\,\frac{x^2}{t}\right)}}{\sqrt{\pi\,t}\,t^2}$$

$$-\frac{1}{4}\,\frac{\text{Heaviside}(t)\,\mathbf{e}^{\left(-1/4\,\frac{x^2}{t}\right)}}{\sqrt{\pi\,t}\,t} + \frac{1}{8}\,\frac{\text{Heaviside}(t)\,x^2\,\mathbf{e}^{\left(-1/4\,\frac{x^2}{t}\right)}}{\sqrt{\pi\,t}\,t^2}$$

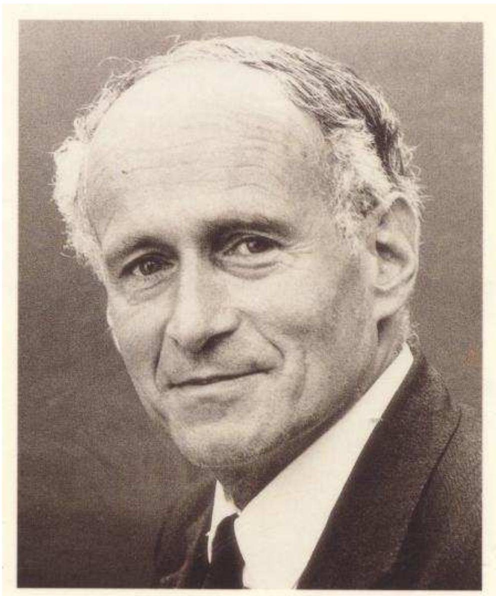
```
> simplify(diff(E(t,x),t)-diff(E(t,x),x,x));assume(t >
0);simplify(diff(E(t,x),t)-diff(E(t,x),x,x));
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{\left(\lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{e}^{\left(-1/4\,\frac{x^2}{t}\right)}}{\sqrt{t}}\right)\text{Dirac}(t)}{\sqrt{\pi}}$$

$$0$$

Hommage à Laurent Schwartz

Mathématicien français né à Paris en 1915, mort à Autouillet en 2002, Laurent Schwartz est issu d'une famille d'origine juive qui a compté dans ses rangs des hommes politiques (Michel Debré et ses fils), des médecins (Robert Debré, etc.), le mathématicien Jacques Hadamard et d'autres scientifiques, ainsi que le capitaine Alfred Dreyfus.



Ancien élève du lycée Janson-de-Sailly, Laurent Schwartz est reçu à l'École normale supérieure en 1934, où il a pour condisciples Gustave Choquet (1915–2006), Michel Queysanne et André Revuz. Il épouse en 1938 Marie-Hélène Lévy (1913-2013), fille du grand probabiliste Paul Lévy (1886-1971), et elle aussi mathématicienne (elle travaillera sur les classes de Chern des ensembles analytiques et finira sa carrière à l'université de Lille). Après sa démobilisation en 1940, il s'installe à Clermont-Ferrand, où s'est repliée l'université de Strasbourg. Il y subit l'influence des fondateurs du groupe Bourbaki. Sa thèse, présentée en 1943 sous la direction de Georges Valiron, porte sur l'approximation et l'étude des sommes d'exponentielles, et complète un théorème de Müntz. Il passe les années d'occupation dans la clandestinité, sous un faux nom, dans la région de Grenoble, tout en poursuivant ses recherches. Professeur aux Universités de Nancy, puis de Paris, il a enseigné de 1959 à 1960 et de 1963 à 1983 à l'École polytechnique. Le Centre de mathématiques de l'Ecole, qu'il a fondé en 1963, a adopté pour emblème un papillon, en hommage à Schwartz, grand collectionneur de lépidoptères. En 1975, il est élu membre de l'Académie des sciences..

Les travaux de Laurent Schwartz sont principalement relatifs à l'analyse. La théorie des distributions, dont l'idée initiale remonte à 1944-1945, lui a valu la médaille Fields en 1950, au congrès de Harvard. Les distributions généralisent les fonctions continues ou localement intégrables, et même les mesures de Radon. Elles sont par nature indéfiniment dérivables, et, de ce fait, une fonction continue est toujours dérivable au sens des distributions. Le langage et les notations de Schwartz pour les distributions ont été universellement adoptées par les mathématiciens et constituent le cadre naturel de la théorie des équations aux dérivées partielles, mais aussi des séries de Fourier, et des transformations de Fourier et de Laplace. En 1952, Schwartz fait venir à Nancy un jeune prodige, Alexandre Grothendieck (1928-2014), qui prépare sous sa direction une thèse remarquable sur les produits tensoriels d'espaces vectoriels topologiques. De 1959 à 1962, Laurent Schwartz se consacre à la physique théorique : l'emploi des distributions lui permet une formulation mathématique correcte de la théorie des particules élémentaires. Il est membre du groupe Bourbaki. Par la suite, il a effectué des recherches sur l'extension des mesures de Radon aux espaces topologiques quelconques ; il a écrit diverses publications sur les probabilités cylindriques et les désintégrations de mesures.

Intellectuel engagé, de sensibilité trotskiste modérée, Schwartz a milité contre les guerres coloniales et post-coloniales (Algérie, Vietnam, etc.) et contre les totalitarismes fasciste et stalinien, au sein notamment du Tribunal Russell, puis du Comité des mathématiciens. En 1960, il signe le *Manifeste des 121* proclamant le droit à l'insoumission pour les appelés du contingent envoyés en Algérie. Deux semaines plus tard, le ministre des armées Pierre Messmer juge *« contraire au bon sens et à l'honneur »* qu'il continue d'enseigner les mathématiques à l'Ecole polytechnique, et le révoque. La réponse de Schwartz ne se fait pas attendre : « *Si j'ai signé la déclaration des 121, c'est en partie pour avoir vu depuis plusieurs années la torture impunie et les tortionnaires récompensés. Mon élève Maurice Audin a été torturé et assassiné en juin 1957, et c'est vous, Monsieur le ministre, qui avez signé la promotion du capitaine Charbonnier au grade d'officier de la Légion d'honneur. Venant d'un ministre qui a pris de telles responsabilités, les considérations sur l'honneur ne peuvent que me laisser froid.* » Aucun mathématicien n'ayant accepté de le remplacer à Polytechnique, Laurent Schwartz retrouve son poste deux ans plus tard. Mais en 1961 son fils Marc-André avait été enlevé par l'O.A.S. ; le jeune homme ne s'est jamais remis de cet enlèvement, et est mort prématurément en 1971. Le 31 octobre 2000, Laurent Schwartz a signé avec Madeleine Rebérioux, Pierre Vidal-Naquet, Germaine Tillion et Henri Alleg un appel pour la reconnaissance et la condamnation de la torture pendant la guerre d'Algérie.

Lors de l'arrivée de la gauche au pouvoir, Laurent Schwartz a fait partie de la *Commission du bilan* instituée le 10 juin 1981. C'est sous son autorité que fut publié en décembre le volume 4 de *La France en mai 1981*, intitulé *L'enseignement et le développement scientifique*. C'est un fait que la recherche scientifique française, publique et privée, a connu un grand essor sous la présidence de François Mitterrand, après la stagnation et la régression des années antérieures.

J'ai suivi les cours de Laurent Schwartz en 1972 et 1973 à l'Ecole polytechnique. Pourquoi taire ici l'impatience que nous avions en première année, et la fierté que nous avions en seconde année, d'avoir pour professeur un mathématicien mondialement connu ? C'était un privilège de voir exposer une théorie par celui-là même qui l'avait découverte. Laurent Schwartz était un conférencier brillant et souriant, très agréable à écouter. Il avait du charme et un évident plaisir à enseigner des théories auxquelles il avait apporté des contributions décisives. Il mettait son talent pédagogique à les présenter de manière très claire et très accessible, mais ce souci de l'élégance le conduisait parfois à en sauter les difficultés, à en gommer les aspérités, et, comme bien des bourbakistes, il n'insistait pas assez sur les problèmes encore ouverts. Cette légère réserve n'entame pas la haute estime et le beau souvenir que j'ai gardés de lui.

Pierre-Jean Hormière

D'où parle le mathématicien ? D'où vient-il ? Il n'est pas du Ciel, puisque son dire n'est jamais tout entier déjà dit. Il n'est pas de la Terre qui nous tient d'autres discours ; nous « rencontrons » *des* cailloux et *des* arbres. Mais *trois* cailloux, *deux* arbres ? Jamais. Pour les voir, il y faut déjà quelque opération.

On a beau enterrer Pythagore. Le sol qui le reçoit ne portera pas spontanément le fruit mathématique. Quel est donc ce lieu où s'inscrit le texte selon lequel naît la stricte parole mathématique ? Mais parler ? Qu'est-ce que cela veut dire au juste ? Qu'est le lieu de ta parole quand tu ne parles plus ? Et ta « science », Archimède, quel devint son lieu à l'instant même où — dit-on — sur la plage déserte, un soudard qui peut-être ne parlait pas ta langue, t'a brisé la tête ? Elle était écrite, en partie. Par chance ? Par nécessité ? Et pourquoi, écrite, n'a-t-elle pas dormi, inerte et tranquille ? Quel est dont ce lieu qui n'est ni Ciel ni Terre, où la Mathématique, produite, peut ne pas mourir ?

Jean Toussaint Desanti (1914-2002)
Les idéalités mathématiques

L'un des traits fondamentaux de la nature semble être que les lois fondamentales de la physique s'expriment en termes d'une théorie mathématique très belle et très puissante, dont la compréhension exige une haute culture mathématique. On peut se demander pourquoi la nature est ainsi faite. Contentons-nous de répondre que nos connaissances actuelles semblent confirmer cette hypothèse : nous n'avons qu'à l'accepter comme un fait. Peut-être peut-on imaginer que Dieu est un grand mathématicien, et qu'il s'est servi de mathématiques très complexes pour construire le monde. Nos faibles connaissances mathématiques actuelles nous permettent de comprendre un fragment de l'ensemble et nous espérons que le développement des mathématiques enrichira notre connaissance de l'Univers.

Paul Adrien Maurice Dirac (1902 – 1984)

Bibliographie

Laurent Schwartz :

[1] Théorie des distributions (Hermann, 1966)
[2] Méthodes mathématiques pour les sciences physiques (Hermann, 1969)
[3] Cours de l'Ecole polytechnique (1972)
[4] Un mathématicien aux prises avec le siècle, chap. 6 (Odile Jacob, 1997)

Robert E. Edward : Functional analysis, Theory and applications, Chap 5 (1965, rééd. : Dover)

Claude Gasquet et Patrick Witomski : Analyse de Fourier et applications (Masson, 1997)

Vladimir Smirnov : Cours de mathématiques supérieures, t. 2 (Mir)

I. M. Guelfand et G. E. Chilov : Les distributions (tomes 1, 2, 3) (Dunod, 1961)

Roger Godement : Analyse mathématique, tome II, chap. V § 10 (Springer, 1998)

Paul Krée : Distributions (Encyclopedia universalis)

Robert Pallu de la Barrière : Calcul symbolique (Encyclopedia universalis)

Journées mathématiques X-UPS 2003 :

J.-M. Bony, Fronts d'onde et opérations sur les distributions

B. Malgrange, Idéaux de fonctions différentiables et division des distributions

C. Sabbah, Aspects algébriques de la division des distributions