
Feuille d'exercices n° 7
FORMES DIFFÉRENTIELLES. THÉORÈME DE GREEN-RIEMANN

Formes différentielles

Exercice 1.

Simplifier :

$$dx \wedge dz \wedge dy + 3dz \wedge dy \wedge dx - dy \wedge dz \wedge dx + 5dx \wedge dx \wedge dx - 7dz \wedge dz \wedge dy.$$

Exercice 2.

Donner la formule pour d , l'opérateur de de Rham (différentielle extérieure) en dimension 3 et calculer $d\alpha$ où :

$$\alpha := x^2 y dx + z dy + (y + x + 2z) dz$$

et $d\omega$ où :

$$\omega := x^2 y dy \wedge dz + z dz \wedge dx + (y + x + 2z) dx \wedge dy.$$

Exercice 3.

Soit $\{dx_1, \dots, dx_p\}$ une base dans l'espace des formes différentielles $\Omega^1(\mathbb{R}^p)$.

1. Le produit extérieur a pour propriété $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$ pour $\alpha, \beta \in \Omega^1(\mathbb{R}^p)$. En déduire que $dx_i \wedge dx_i = 0, \forall i \in [1, p]$.
2. Existe-t-il une 1-forme $\gamma \in \Omega^1(\mathbb{R}^p)$ telle que $\gamma \wedge \gamma \neq 0$?
3. Existe-t-il une 2-forme $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^p)$ telle que $\omega \wedge \omega \neq 0$?

Exercice 4.

Déterminer si les formes suivantes dans \mathbb{R}^2 sont des formes différentielles exactes. Si c'est le cas trouver leur primitives.

- a) $2(x+y)dx + 2(x-3y)dy$, b) $\cos(x)dx + \sin(y)dy$, c) $(x-y)dx + (x+y)dy$,
d) $dx - dy$, e) $dx \wedge dy$, f) $x^2 y dx \wedge dy$.

Exercice 5.

Resoudre l'équation différentielle $y' \cos x - y \sin x = 0$ en la voyant comme une équation sur une forme différentielle exacte : $dy \cos x - y \sin x dx = 0$. Puis résoudre $y' - (\tan x)y = 0$.

Exercice 6.

Soit $p : \mathbb{R}_+ \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$ une application qui envoie $(r, t) \mapsto (x, y) : x = r \cos t, y = r \sin t$. L'espace $\Omega^1(\mathbb{R}^2)$, de 1-formes dans \mathbb{R}^2 , a pour base $B = \{dx, dy\}$ et l'espace $\Omega^1(\mathbb{R}_+ \times [0, +\infty[)$, de 1-formes dans $\mathbb{R}_+ \times [0, +\infty[$, a pour base $B' = \{dr, dt\}$.

1. Exprimer la base B dans la base B' .
2. Quel est la base de $\Omega^2(\mathbb{R}^2)$, de 2-formes dans \mathbb{R}^2 ?

Exercice 7.

Soit $\{dx, dy, dz\}$ une base dans $\Omega^1(\mathbb{R}^3)$, l'espace des 1-formes différentielles de \mathbb{R}^3 . Soit $\Omega^2(\mathbb{R}^3)$, l'espace de 2-formes différentielles. On considère l'application $*$ de Hodge.

1. Calculer $*(dx)$. Quelle est la valeur de $*(ydx)$?
2. Soit $\mu = dx \wedge dz$. Quelle est la forme $*\mu$?

Théorème de Green-Riemann

Soient D un domain de \mathbb{R}^2 et $C = \partial D$, le bord de D . Soit $P, Q : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions C^1 . Alors, la formule de Green-Riemann relie l'intégrale curviligne avec l'intégrale double :

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

En particulier, si $Q = x$ et $P = y$,

$$\text{Aire}(D) = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx.$$

On remarque aussi la formule de Green-Riemann relie une 1-forme différentielle avec sa différentielle - c'est une formule de Stokes :

$$\oint_C \alpha = \iint_D d\alpha, \text{ où } C = \partial D.$$

Cela se généralise en \mathbb{R}^3 en un lien de l'intégrale curviligne sur une courbe C avec l'intégrale de surface sur une surface S si la courbe C est le bord de la surface $S : C = \partial S$. En particulier, si $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$ on a

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Soit α une forme exacte, i.e. il existe une fonction f tel que $\alpha = du$.

L En particulier, si $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$ telle que $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial u}{\partial z} = R$, par la formule de Stokes on a $\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = 0$. La conséquence de ce resultat est que l'intégrale curviligne d'une forme exacte sur un parcours C menant d'un point A au point B d'une forme exacte dépend que de A et de B et ne dépend pas de parcours choisi entre A et B . En effet,

$$\int_C du = u(B) - u(A).$$

Exercice 8.

Soit la courbe C un cercle donné par l'équation $x^2 + y^2 = a^2$.

En utilisant la formule de Green-Riemann calculer les intégrales :

1. $\oint_C xydx + (x + y) dy$,
2. $\oint_C (x - y) dx + (x + y) dy$,
3. $\oint_C x^2 y dx - xy^2 dy$.

Exercice 9.

Soit la courbe E un ellipse donné par l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

En utilisant la formule de Green-Riemann calculer l'intégrale : $\oint_E (x + y) dx - (x - y) dy$.

Exercice 10.

Soit la courbe T un triangle ABC de sommets $A(a, 0)$, $B(a, a)$, $D(0, a)$

En utilisant la formule de Green-Riemann calculer l'intégrale : $\oint_T y^2 dx + (x + y)^2 dy$.

Exercice 11.

Soit la courbe L un quart du cercle d'équation $x^2 + y^2 = a^2$, $x \geq 0$ et $y \geq 0$. En utilisant la formule de

Green-Riemann calculer l'intégrale : $\oint_L (y - x^2) dx - (x + y^2) dy$.

Exercice 12.

Soit la courbe Q un carré $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $D(-1, 0)$, $E(0, -1)$.

En utilisant la formule de Green-Riemann calculer l'intégrale : $\oint_Q \left(\frac{dx - dy}{x + y} \right)$.

Exercice 13.

Soit R le domaine délimité par l'astroïde de l'équation $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. En utilisant la formule de Green-Riemann calculer son aire.

Exercice 14.

Trouver l'aire de l'ellipse définie paramétriquement : $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Exercice 15.

On considère $\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, avec $P(x, y) := \frac{-y}{x^2 + y^2}$ et $Q(x, y) := \frac{x}{x^2 + y^2}$ définie sur un ouvert $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

1. Vérifier que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

la condition nécessaire pour que la 1-forme $Pdx + Qdy$ soit exacte.

2. Calculer $\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ où C est un cercle unitaire paramétré comme suit :

$$\gamma(t) := (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad x(t) := \cos t, \quad y(t) := \sin t.$$

3. Conclure que la forme $Pdx + Qdy$ n'est pas exacte.

Exercice 16.

Montrer que l'intégrale $\int_L \frac{\partial(x^2 y^3)}{\partial x} dx + \frac{\partial(x^2 y^3)}{\partial y} dy$, le long du segment de droite allant du point $(7, 1)$ au point $(5, 2)$ est égale à 151. Quelle est la valeur de la même intégrale si L est une partie d'une parabole passant du point $(7, 1)$ au point $(5, 2)$.