Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2015-2016
Maths 5 Cours : P. Mironescu, TD : O. Kravchenko

Feuille d'exercices n° 8
THÉORÈMES D'OSTROGRADSKI-GAUSS ET DE STOKES

Théorème d'Ostrogradski-Gauss

Soit G un domaine de $\mathbb{R}^3$ borné par une surface fermée S. Soit

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)),$$

un champs de vecteurs de classe C^1. La formule d'Ostrogradski-Gauss (aussi appelé la formule de divergence) donne un lien entre l'intégrale triple sur D et l'intégrale de surface sur S :

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_G (\nabla\cdot\mathbf{F})\,dV, \text{ où } \nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

est la divergence du champs de vecteurs $\operatorname{div}\mathbf{F}$. Cette formule pour les formes différentielles se reécrit

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Dans le cas particulier quand $P = x$, $Q = y$, $R = z$, on trouve la formule pour le volume de G en tant que l'intégrale de surface qui l'entoure S :

$$Vol(G) = \frac{1}{3}\left|\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|.$$

<u>Exercice 1.</u> Calucler l'intégrale de surface $\iint_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où S est une surface de sphère de l'équation $x^2+y^2+z^2=a^2$ orienté à l'exterieur.

<u>Exercice 2.</u> À l'aide du théorème d'Ostrogradski-Gauss calculer l'intégrale $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ du champs $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$, où S est une surface entourant le cylindre $x^2+y^2 \le a^2$ entre les deux plans $z=-1$, et $z=1$.

<u>Exercice 3.</u> À l'aide du théorème d'Ostrogradski-Gauss calculer l'intégrale de surface $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ du champs de vecteurs $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^3,y^3,z^3)$, où S est une surface entourant le domaine borné par $x^2+y^2-z^2=0$ et $z=1$.

<u>Exercice 4.</u>
Calculer l'intégrale de surface $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ du champs de vecteurs $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xy, 8xz, 4yz)$, où S est une surface de tetrahedron de sommets $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$.

<u>Exercice 5.</u>
Calculer l'intégrale de surface $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ du champs de vecteurs $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x^2y, xz^2, 4yz)$, où S est une surface de parallélépipède formé par le domaine entre les plans déquations $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=2$, $z=0$, $z=3$.

Théorème de Stokes

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ un esurface et C - une courbe, qui est son bord. Alors pour tout champs de vecteurs $\mathbf{F}$ de classe C^1 : $\mathbf{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ on a le théorème de Stokes (appellé aussi le théorème du rotationnel) qui relie l'integrale de surface sur l'intégrale curviligne

$$\oint\limits_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint\limits_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S},$$

où

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

le rotationnel du champs $\mathbf{F}$. Le cercle autour de l'intégrale $\oint$ indique que l'intégrale est prise sur un circuit fermé.
En utilisant les formes différentielles le théorème de Stokes est reécrit comme suit

$$\oint\limits_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Exercice 6. Montrer que l'intégrale curviligne $\oint\limits_C yzdx + xzdy + xydz$ est égale à 0 lelong tout le circuit fermé C.

Exercice 7.
Utiliser le théorème de Stokes pour trouver l'intégrale curviligne $\oint\limits_C (y+2z)\,\mathrm{d}x + (x+2z)\,\mathrm{d}y + (x+2y)\,\mathrm{d}z$, où la courbe $C = S \bigcap P$ où $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ et P est le plan $x + 2y + 2z = 0$.

Exercice 8. Utiliser le théorème de Stokes pour trouver l'intégrale curviligne $\oint\limits_C y^3\mathrm{d}x - x^3\mathrm{d}y + z^3\mathrm{d}z$.
La courbe C est l'intersection du cylindre $x^2 + y^2 = a^2$ et le plan $x + y + z = b$.

Exercice 9.
Utiliser le théorème de Stokes pour trouver l'intégrale curviligne $\oint\limits_C (x+z)\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$, où la courbe C est une ellipse d'équation $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ dans le plan $z = 1$.

Exercice 10.
Utiliser le théorème de Stokes pour trouver l'intégrale curviligne $\oint\limits_C (z-y)\,\mathrm{d}x + (x-z)\,\mathrm{d}y + (y-x)\,\mathrm{d}z$.
La courbe C est un triangle de sommets $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$, $D(0,0,2)$.

Exercice 11.
Utiliser le théorème de Stokes pour trouver l'intégrale curviligne $\oint\limits_C \left(z^2 - y^2\right) dx + \left(x^2 - z^2\right) dy + \left(y^2 - x^2\right) dz$.
La courbe C est l'intersection du paraboloïde de l'équation $z = 5 - x^2 - y^2$ et du plan de l'équation $x + y + z = 1$.

Exercice 12.
Montrer que le volume d'ellipsoïde $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ est égale à $\dfrac{4\pi abc}{3}$.