

ISFA 2010-2011
Optimisation

Examen d'Optimisation
Le vendredi 13 mai de 14 heures à 16 heures
Tous documents autorisés. Ordinateur avec le logiciel R
installé obligatoire

Exercice 1 (Ne pas utiliser l'ordinateur pour cet exercice.)

1. Mettre sous forme standard le polytope

$$\{x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, x_1 - x_2 - x_3 \leq -2, x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 3, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}.$$

2. Trouver, par la méthode du simplexe, une base admissible pour le polytope en forme standard.

Exercice 2 Soit $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire injective, que l'on identifie à une matrice $(a_{ij})_{i=1,\dots,m,j=1,\dots,n}$.

Soit $b \in \mathbb{R}^m$ un vecteur fixé.

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |Ax - b|^2$.

La norme euclidienne standard dans \mathbb{R}^n est notée $|\cdot|$, et le produit scalaire standard \cdot .

1. Montrer que

$$(x, y) \mapsto (Ax) \cdot (Ay)$$

est un produit scalaire dans \mathbb{R}^n .

2. Montrer que f est $2a$ -convexe, où a est la plus petite valeur propre de la matrice $A^T A$.
3. En déduire que f a un point de minimum x_0 et un seul.
4. Par un calcul direct, donner l'équation satisfaite par x_0 .
5. Ecrire, sous R, un programme pour calculer x_0 en fonction de A et b , avec les données numériques suivantes :

$$n = 2, m = 3, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ telle que f' soit strictement positive et croissante.

1. On suppose d'abord que l'équation $f(x) = 0$ a une solution x^* .
Montrer que la suite donnée par la méthode de Newton

$$x^0 \in \mathbb{R}, \quad x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

converge vers x^* .

2. On suppose que l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution. Dans ce cas, montrer que la suite précédente tend vers $-\infty$.

Exercice 4 Modéliser le problème suivant comme un problème de programmation linéaire :

Un avion-cargo a trois compartiments : avant, médian et arrière. Ces compartiments ont les capacités suivantes :

Compartiment	Tonnage (tonnes)	Volume (m^3)
Avant	10	6800
Médian	16	8700
Arrière	8	5300

De plus, les chargements des compartiments doivent être proportionnels à leurs capacités, de sorte à assurer la stabilité de l'avion.

Quatre cargos sont prêts pour l'expédition. Leurs caractéristiques sont les suivantes :

Cargo	Tonnage (tonnes)	Volume (m^3 /tonne)	Profit (€/tonne)
C1	18	480	310
C2	15	650	380
C3	23	580	350
C4	12	390	285

On peut charger dans l'avion toute proportion de chaque cargaison.

Déterminer quel proportion de chaque cargo doit être chargée dans chaque compartiment afin de maximiser le profit.