Licence Mathématiques et Gestion 2012-2013
Optimisation

Examen du vendredi 11 janvier 2013. Durée deux heures

Exercice 1. (Barème indicatif : 5 p.)
Nous considérons le problème (P) $\min(x_1 - x_2 + x_3)$ sous les contraintes $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, $x_1 + x_2 = 5$, $x_2 + x_3 = 7$.

1. Résoudre (P) en utilisant la méthode du simplexe. (On détaillera les calculs.)
2. Résoudre (P) directement, de la manière suivante : exprimer x_1 et x_3 en fonction de x_2, puis minimiser en tenant compte des contraintes $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Exercice 2. (Barème indicatif : 8 p.)
Soit $C \in M_n(\mathbb{R})$. Le rayon spectral de C est

$$\rho(C) := \max\{|\lambda|\,;\, \lambda \text{ valeur propre de } C\}.$$

Rappelons le résultat suivant, vu en cours :
La suite $(x^k) \subset \mathbb{R}^n$ donnée par $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $x^{k+1} = Cx^k + c$ (avec $c \in \mathbb{R}^n$ donné), converge, pour tout choix de x^0 et pour tout choix de c, vers l'unique solution de l'équation $x = Cx + c$ si et seulement si $\rho(C) < 1$.

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice injective et soit $b \in R^m$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2}|Ax - b|^2$.

Posons $B := A^*A$ et $d := A^*b$. Notons $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de B.

1. Rappeler les formules donnant $\nabla f(x)$ et $H_x f$.
2. Trouver deux quantités explicites $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que $\alpha \mathrm{I}_n \leq H_x f \leq \beta \mathrm{I}_n$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.
   Dans la suite, nous nous intéressons au problème (P) $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$.
3. Rappeler pourquoi (P) a exactement une solution x^*, ainsi que la formule explicite de x^*.
4. Ecrire, en fonction du point initial $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et du paramètre $\rho > 0$, la suite $(x^k) \subset \mathbb{R}^n$ correspondant à la méthode du gradient à pas constant (fixe) appliquée au problème (P).
5. Donner (d'après un résultat du cours) un nombre explicite $\gamma > 0$ tel que la méthode décrite au point précédent converge si $\rho \in]0, \gamma[$.

   Dans la suite, nous nous proposons de montrer que la valeur de γ ci-dessus est optimale, c'est-à-dire, que si la méthode converge alors $\rho \in]0, \gamma[$.
6. Ecrire la récurrence satisfaite par x^k sous la forme $x^{k+1} = Cx^k + c$, avec $C \in M_n(\mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}^n$ convenables, que l'on explicitera.

7. Déterminer les valeurs propres de C.
8. Conclure grâce au résultat rappelé au début de l'exercice.

Exercice 3. (Barème indicatif : 3 p.)
Mettre le problème suivant sous la forme d'un (PLS) : $\min |x_1 + x_2|$ sous la contrainte $x_1 - x_2 \geq 1$.

Exercice 4. (Barème indicatif : 4 p.)
Considérons le problème $\min(x^2 + y^2)$ sous la contrainte $2x + 3y = 13$.

1. Montrer que ce problème a une solution.
2. Ecrire le lagrangien L du problème.
3. Résoudre le problème de minimisation en utilisant le théorème des multiplicateurs de Fritz John.