Licence Mathématiques et Gestion 2013–2014
Optimisation

Contrôle continu du jeudi 17 octobre 2013

Durée 90 minutes

Exercice 1. (**2 p.**) Ecrire le tableau initial du problème suivant :
$\max\ (3x_1 + x_2 - x_3),$ sous les contraintes $x_1, x_2 \geq 0,\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5.$

Exercice 2. (**2,5 p.**) Trouver les valeurs du paramètre réel a telles que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ satisfasse $A > 0$.

Exercice 3. (**2,5 p.**) Décrire l'objet calculé par la fonction suivante

```
B=function(A)
{
m=dim(A)[1]
n=min(dim(A)[2],2*m)
C=array(0,dim=c(2*m,2*m))
{
for (i in 1:m)
for (j in 1:n)
C[i,j]=A[i,j]
}
{
for (i in (m+1):(2*m))
C[i,2*i-2*m-1]=-1
}
{
for (i in (m+1):(2*m))
C[i,2*i-2*m]=1
}
return(C)
}
```

Remarque commune aux exercices 4 et 5 : il s'agit de problèmes de modélisation, dont on ne demande pas la résolution numérique.

Exercice 4. (**4 p.**) Nous considérons n points du plan, $P_1, \ldots, P_n$. Désignons par d_{ij}, avec $1 \leq i < j \leq n$, la distance de P_i à P_j. Nous nous donnons un entier $N < n$, et nous cherchons à résoudre le problème suivant :

Regrouper les points $P_1, \ldots, P_n$ en au plus N paquets disjoints, de telle sorte que la distance maximale entre deux points d'un même paquet soit aussi petite que possible.

La formulation du problème passe par l'introduction de variables binaires exprimant l'appartenance ou non du point P_i au k^{e} paquet. Justifier le fait suivant : le problème d'optimisation associé à ce problème est

$$\left[\begin{array}{ll} \min \alpha & \\ \text{sous contraintes} & \left[\begin{array}{l} x_{ik} \in \{0,1\},\ \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \forall\, k \in [\![1,N]\!] \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} x_{ik} = 1,\ \ \forall\, i \in [\![1,n]\!] \\ d_{ij}(x_{ik} + x_{jk} - 1) \leq \alpha,\ \forall\, 1 \leq i < j \leq n,\ \forall\, k \in [\![1,N]\!] \end{array}\right. \end{array}\right. . \tag{1}$$

Pour justifier, on expliquera la signification des variables x_{ik} et α, ainsi que l'origine de chacune des contraintes apparaissant dans (1).

De quel type de problème s'agit-il ?

Exercice 5. (9 p.) Une société spécialisée dans la production d'un article A souhaite implanter m nouvelles usines, $U_1, \ldots, U_m$, afin de fournir p clients connus à l'avance, $cl_1, \ldots, cl_p$. Nous avons les faits suivants :
(F1) La production annuelle des différentes usines est fixe : celle de l'usine U_i est N_i, $i \in [\![1,m]\!]$.
(F2) Il existe n sites $s_1, \ldots, s_n$ (avec $n > m$), fixés à l'avance, susceptibles d'accueillir ces usines.
(F3) Chaque site ne peut recevoir qu'au plus une usine.
(F4) La demande annuelle du client cl_j est connue à l'avance. Elle vaut q_j, avec q_j entier.
(F5) On suppose que la somme des demandes correspond exactement à la production totale, c'est-à-dire que $N_1 + \cdots + N_m = q_1 + \cdots + q_p$.
On connaît la distance, en kilomètres, qui sépare chaque site potentiel de production de chaque client. On note d_{ij} la distance entre le site s_i et le client cl_j, $i \in [\![1,n]\!]$, $j \in [\![1,p]\!]$.
(F6) Chaque client doit recevoir exactement sa demande, qui peut être livrée à partir de plusieurs usines.
(F7) Un article n'est pas fractionnable.

Le problème à modéliser consiste à minimiser, sur une année, la somme des coûts de fonctionnement des usines et des coûts de livraison des clients.
1. Introduire de nouveaux paramètres du problème : la coût annuel du fonctionnement de l'usine U_j sur le site s_i, et le coût du transport par article au kilomètre. On supposera ce dernier coût indépendant de l'article, du site, de l'usine et du client.
2. Préciser quelles sont les inconnues du problème. On donnera l'ensemble des indices qui les décrivent, et on précisera pour chacune s'il s'agit d'une variable réelle, entière ou bivalente.
3. Ecrire le problème d'optimisation associé. On précisera l'interprétation de chaque contrainte (en fonction des faits (F1)–(F7)).
4. Le problème de la question précédente est un problème de programmation linéaire. On se propose d'écrire un programme 1.R et de créer un fichier de données 1.RData, les deux sous R, dont le but est respectivement de permettre la résolution du problème avec lpsolve, et de stocker les données d'un problème concret. Quels sont les objets stockés dans 1.RData ? Quels sont leurs types et leurs tailles ? Expliquer (sans programmer) de quelles fonctions nous avons besoin pour créer, à partir des données de 1.RData, les données nécessaires au package lpsolve.