OPTIMISATION

LICENCE MATHÉMATIQUE ET GESTION 2013-2014

Pratique de l'algorithme du simplexe

1. Tableau initial d'un $(PL\Sigma)$

Pour un problème de la forme $\min d \cdot x$ sous $Ax \leq b$ et $x \geq 0$ (avec $A \in M_{m,n}$ et $b \geq 0$), on a :

1. Base initiale $\mathcal{B} = \{n+1, \dots, n+m\}$
2. $B = I_m$, $N = A$
3. $c_B = 0$, $c_N = d$
4. $c = (d, 0)$
5. $x_B = b$, $x_N = 0$
6. Dernière ligne du tableau :

$$c^T - c_B^T B^{-1}(A \,|\, \mathrm{I}_m) = c^T = (d^T, 0^T)$$

7. $w = -(c_B \cdot x_B + c_N \cdot x_N) = 0$

Ce qui donne le tableau initial

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|c}
 & 1 & \dots & n & n+1 & \dots & n+m & \\ \hline
n+1 & & & & & & & \\
\vdots & & A & & & \mathrm{I}_m & & b \\
n+m & & & & & & & \\ \hline
 & & d^T & & 0 & \dots & 0 & 0
\end{array}$$

2. Tableau initial du (PA)

Pour un problème de la forme (PLS) $\min d \cdot x$, sous $Ax = b$ et $x \geq 0$, en absence de base admissible « visible », on part du (PA) $\min y_1 + \dots + y_m$ sous $Ax + y = b$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Ici, $b \geq 0$ et $A \in M_{m,n}$. Pour ce problème :

1. Base initiale $\mathcal{B} = \{n+1, \dots, n+m\}$
2. $B = I_m$, $N = A$

3. $c_B = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{m})^T$, $c_N = 0$
4. $c = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m})^T$
5. $x_B = b$, $x_N = 0$
6. Dernière ligne du tableau :

$$c^T - c_B^T B^{-1}(A \,|\, \mathrm{I}_m) = (-c_B^T A, 0^T) = -(s_1, \ldots, s_n, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m}),$$

   avec s_j la somme de la j^{e} colonne de A.
7. $w = -c_B \cdot b - c_N \cdot 0 = -c_B \cdot b = -s$, avec s la somme de b

Ce qui donne le tableau initial

	1	…	n	n+1	…	n+m	
n+1							
⋮		A			I_m		b
n+m							
	$-s_1$	…	$-s_n$	0	…	0	-s

Dans le même tableau, la ligne correspondant au problème initial (PLS) s'obtient comme suit.

1. $c_B = 0$, $c_N = d$
2. $c = (d, 0)$
3. Dernière ligne du tableau :

$$c^T - c_B^T B^{-1}(A \,|\, \mathrm{I}_m) = (-(c_B A)^T, 0^T) = c^T = (d^T, 0^T)$$

4. $w = -c_B \cdot b - c_N \cdot 0 = -0 \cdot b = 0$

Ce qui donne le tableau « à double comptabilité »

	1	…	n	n+1	…	n+m	
n+1							
⋮		A			I_m		b
n+m							
(PA)	$-s_1$	…	$-s_n$	0	…	0	-s
(PLS)		d^T		0	…	0	0

3. Passage du (PA) au (PLS)

Soit z_0 le minimum de (PA). Rappelons que, si $z_0 > 0$, alors le système $Ax = b$, $x \geq 0$ n'a pas de solution.

Si $z_0 = 0$, alors soit $\mathcal{B} \subset \{1, \dots, n+m\}$ la base obtenue par la méthode du simplexe appliquée au (PA). Soit $X = (x, y)$ la solution optimale de (PA) correspondant à la base $\mathcal{B}$. On peut aussi écrire $X \sim (X_B, X_N) = (X_B, 0)$.

- Commençons par noter que $0 = z_0 = y_1 + \cdots + y_m$, d'où $y = 0$. Il s'ensuit que $X = (x, 0)$.
- On décompose $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. Ici, $\mathcal{B}_1 \subset \{1, \dots, n\}$ contient les indices de $\mathcal{B}$ qui correspondent aux variables originales $x_1, \dots, x_n$ du problème. $\mathcal{B}_2$ correspond aux variables artificielles $y_1, \dots, y_m$.
- Commençons par le cas où $\mathcal{B}_2 = \emptyset$, et donc $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$ (ce qui arrive le plus souvent en pratique).
- Notons que les colonnes correspondant à $\mathcal{B}$ sont des colonnes de A, et qu'elles sont libres (car $\mathcal{B}$ est une base de $(A \,|\, \mathrm{I}_m)$.
- En utilisant les contraintes $Ax + y = b$, $x \geq 0$, et le fait que $y = 0$, on trouve que $Ax = b$ et $x \geq 0$. Donc x est la solution de base correpondant à la base $\mathcal{B}$ de A, et $x \geq 0$.
- Conclusion : $\mathcal{B}$ est une base admissible.
- Supposons maintenant que $\mathcal{B}_2 \neq \emptyset$.
- Rappelons que $y = 0$. Par ailleurs, les coordonnées de X hors base sont nulles, c'est-à-dire $X_N = 0$. Nous obtenons que les coordonnées (strictement) positives de X correspondent à $\mathcal{B}_1$.
- Comme les colonnes correspondant à $\mathcal{B}_1$ sont libres (pourquoi ?), on trouve que x est une solution de base admissible (cf Corollaire 2.9, p. 5 du poly).
- La preuve de la Proposition 2.8, pp. 4-5, montre que une base admissible $\mathcal{C}$ donnant x comme solution de base admissible s'obtient en complétant la famille libre $\mathcal{B}_1$ à une base $\mathcal{C} \subset \{1, \dots, n\}$.
- Concrètement, ceci se fait ainsi : nous disposons d'une base $\mathcal{B} \subset \{1, \dots, n+m\}$ donnant $(x, 0)$ comme solution de base admissible. Soit $l = \#\mathcal{B}_2$. On sort $\mathcal{B}_2$ de la base et on fait rentrer dans la base l coordonnées parmi $\{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{B}_2$ en utulisant l pivots de Gauss. La seule condition est de choisir à chaque fois un pivot non nul.
- Preuve du fait que la famille $\mathcal{C}$ obtenue à la fin donne x comme solution de base admissible : soit B_1 la matrice correspondant à $\mathcal{B}_1$, de sorte que si $(A \,|\, \mathrm{I}_m) \sim (B_1 \,|\, N_1)$, alors (1) $(x, 0) \sim (x_{B_1}, 0)$. Dans la base $\mathcal{C}$ (qui contient $\mathcal{B}_1$), $(x, 0)$ s'écrit $(x_C, 0)$ (grâce à (1)). D'où $(x, 0)$ est la solution de base associée à $\mathcal{C}$ (pour le système $Ax + y = b$). Il s'ensuit que x est la solution de base associée à $\mathcal{C}$ pour le système $Ax = b$ (pourquoi ?).