Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 3e année
Approfondissement en analyse — Année 2018-2019

Quelques exercices et questions de cours à préparer pour les contrôles #2 et terminal

Exercice # 1. Soit $f : U \to \mathbb{R}$, avec $U \subset E$ (espace normé). Soit $a \in U$. Montrer que

$$[f \text{ est continue en } a] \iff [f(a+h) = f(a) + o(1) \text{ quand } h \to 0].$$

Exercice # 2. Soit $f : U \to \mathbb{R}$, avec E espace normé de dimension finie et $U \subset E$ ouvert. Soit $a \in U$. Si f est différentiable en a, montrer que f est continue en a.

Exercice # 3. La notation $f(x) = O(g(x))$ quand $x \to \ell$ signifie :

$$\exists C < \infty,\ \exists V \text{ voisinage de } \ell \text{ tel que } |f(x)| \le C|g(x)|,\ \forall x \in V \setminus \{\ell\}.$$

Si $g_1, g_2 \ne 0$ dans $V \setminus \{\ell\}$, montrer que

$$[f_1(x) = o(g(x)),\ f_2(x) = O(h(x)) \text{ quand } x \to \ell]$$
$$\implies [f_1(x)f_2(x) = o(g(x)h(x)) \text{ quand } x \to \ell].$$

Question de cours # 1. Expliquer pourquoi le théorème de Schwarz en dimension deux implique le théorème de Schwarz en toute dimension $N \ge 2$.

Question de cours # 2. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un voisinage ouvert du rectangle R de sommets (a,b), $(a+h,b)$, $(a+h,b+k)$, $(a,b+k)$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $\partial_2 f$ et $\partial_1\partial_2 f$.

Montrer qu'il existe $(a+\xi, b+\eta) \in R$ tel que

$$\underbrace{f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b)}_{A=A(a,b,h,k)} = hk\,\partial_1\partial_2 f(a+\xi, b+\eta). \tag{1}$$

Exercice # 4. (Basé sur la Question de cours #2.) On se propose de montrer la généralisation suivante du théorème de Schwarz. Soit $f : U \to \mathbb{R}$, avec $U \subset \mathbb{R}^2$ ouvert. On fait les hypothèses suivantes :

(a) f a des dérivées partielles du premier ordre, $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$.

(b) $\partial_1\partial_2 f$ existe et est continue.

Alors il existe $\partial_2\partial_1 f$ et $\partial_2\partial_1 f = \partial_1\partial_2 f$.

Question préliminaire. Pourquoi ce résultat est-il plus général que le théorème de Schwarz ?

Prouver le résultat, par exemple via les étapes suivantes.

1. En considérant une suite $h_n \to 0$ dans (1) (à $k \ne 0$ fixé), montrer qu'il existe un η' entre 0 et k tel que

$$\partial_1 f(a, b+k) - \partial_1 f(a,b) = k\partial_1\partial_2 f(a, b+\eta'). \tag{2}$$

2. En utilisant (2), montrer qu'il existe $\partial_2\partial_1 f(a,b)$, et l'égalité $\partial_2\partial_1 f(a,b) = \partial_1\partial_2 f(a,b)$.

Exercice # 5. (Basé sur la Question de cours #2.) On se propose de montrer la généralisation suivante du théorème de Schwarz. Soit $f : U \to \mathbb{R}$, avec $U \subset \mathbb{R}^2$ ouvert. On suppose f une fois différentiable dans U et deux fois différentiable en $(a,b) \in U$. Alors $\partial_2\partial_1 f(a,b) = \partial_1\partial_2 f(a,b)$.

Question préliminaire. Pourquoi ce résultat est-il plus général que le théorème de Schwarz ?

Prouver le résultat, par exemple via les étapes suivantes.

1. En reprenant le début de (la preuve de) la Question de cours #2, montrer qu'il existe un η compris entre 0 et h tel que

$$A(a,b,h,h) = h[\partial_2 f(a+h,b+\eta) - \partial_2 f(a,b+\eta)]. \tag{3}$$

2. En utilisant (3) et le fait que $\partial_2 f$ est différentiable en (a,b), montrer que

$$A(a,b,h,h) = h^2[\partial_1\partial_2 f(a,b) + o(1)] \text{ quand } h \to 0. \tag{4}$$

3. Trouver une autre formule du style (4) et conclure.

Exercice # 6. Soit $g \in \mathscr{C}^n([0,1],\mathbb{R})$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k = 1,\dots,n$, soit

$$I_k = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^1 (1-t)^{k-1} g^{(k)}(t)\,dt.$$

1. Calculer I_1.
2. Pour $k \geq 2$, calculer I_k en fonction de I_{k-1}.
3. En déduire la formule de Taylor à l'ordre n avec reste intégral,

$$g(1) = g(0) + \frac{1}{1!}g'(0) + \frac{1}{2!}g''(0) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}g^{(n-1)}(0) + R_n,$$

avec R_n une intégrale dont on donnera l'expression.

Exercice # 7. Avec g et n comme dans l'exercice précédent, en déduire l'inégalité

$$\left|g(1) - \left[g(0) + \frac{1}{1!}g'(0) + \frac{1}{2!}g''(0) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}g^{(n-1)}(0)\right]\right| \leq \frac{1}{n!}\max_{t\in[0,1]}|g^{(n)}(t)|.$$

Exercice # 8. Soit $f \in \mathscr{C}^n([a,b],\mathbb{R})$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) := f(a+t(b-a))$, $\forall\, t \in [0,1]$. En appliquant à g la formule de Taylor avec reste intégral, en déduire la formule analogue pour f.

Exercice # 9. Soit $N \geq 2$ un entier. Soit $U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. Soit $f \in \mathscr{C}^n(U,\mathbb{R})$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a,b \in U$ tels que $[a,b] \subset U$. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) := f(a+t(b-a))$, $\forall\, t \in [0,1]$. Obtenir la formule de Taylor avec reste intégral pour $n = 1$ et pour $n = 2$.

Exercice # 10. Soit $N \geq 2$ un entier. Soient $U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert tel que $0 \in U$. Soit $g : U \to \mathbb{R}$.

1. On suppose g différentiable, avec $g(0) = 0$ et les dérivées partielles de g du premier ordre égales à 0 en 0. Montrer que $g(x) = o(\|x\|)$ quand $x \to 0$.
2. On suppose g deux fois différentiable, avec $g(0) = 0$ et les dérivées partielles de g du premier et second ordre égales à 0 en 0. Montrer que $g(x) = o(\|x\|^2)$ quand $x \to 0$.
3. Énoncer et prouver la généralisation de cette propriété aux dérivées d'ordre supérieur.

Exercice # 11. Soit $N \geq 2$ un entier. Soit $V \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. Soit $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable. Soit $a \in V$. Soit

$$g(x) = f(a+x) - f(a) - \sum_{j=1}^N \partial_j f(a)x_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^N\sum_{k=1}^N \partial_k\partial_j f(a)x_jx_k,\ \forall\, x \text{ tel que } a+x \in V.$$

En utilisant g et l'exercice précédent, montrer la formule de Taylor à l'ordre deux avec reste :

$$f(a+x) = f(a) + \sum_{j=1}^N \partial_j f(a)x_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^N\sum_{k=1}^N \partial_k\partial_j f(a)x_jx_k + o(\|x\|^2) \text{ quand } x \to 0.$$

Généralisation ? Idée de preuve ?

Pour l'exercice suivant, il est utile de se rappeler le « théorème de Darboux » : si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable (avec $I \subset \mathbb{R}$ intervalle) et si $f'(x) \neq a$, $\forall x \in I$, alors $f'(x) - a$ est de signe constant.

Exercice # 12. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Montrer qu'il existe un $\xi \in]0,1[$ tel que $g(1) = g(0) + g'(0) + \dfrac{1}{2} g''(\xi)$.

Exercice # 13. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Soient $a, b \in I$. Montrer qu'il existe c entre a et b tel que $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dfrac{1}{2}(b-a)^2 f''(c)$. [On pourra considérer la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) := f(a + t(b-a))$, $\forall t \in [0,1]$.]

Exercice # 14. Soit $N \geq 2$ un entier. Soit $U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable. Soient $a, b \in U$ tels que $[a,b] \subset U$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$f(b) = f(a) + \sum_{j=1}^{N} \partial_j f(a)(b_j - a_j) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \partial_k \partial_j f(c)(b_j - a_j)(b_k - a_k).$$