Chapitre 12

Séries de Fourier

12.0 Aperçu

Dans ce chapitre, nous considérons des fonctions $f : I \to \mathbb{C}$, avec $I \subset \mathbb{R}$ *intervalle*. Le but est d'écrire f comme une « superposition d'ondes (co)sinusoïdales », ou encore comme la somme d'une *série de Fourier*.

Le choix de I n'est pas important, les plus populaires étant $I =]0,1[$ et $I =]0,2\pi[$. *Nous travaillons dans $I =]0,2\pi[$, muni de la tribu de Lebesgue et de la mesure $\mu = (1/m(I))\,\lambda_1 = (1/(2\pi))\,\lambda_1$.* Ainsi, si $1 \le p < \infty$, alors

$$\|f\|_{L^p} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.^{\dagger} \tag{12.1}$$

Toutes les fonctions f considérées sont supposées être Lebesgue intégrables sur I. I étant de mesure finie, il s'ensuit que l'hypothèse d'intégrabilité est satisfaite si $f \in L^p(I)$ pour un $p \ge 1$ (remarque 10.15).

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique et suffisamment lisse (de classe C^1 suffit, voir la section 12.4), alors nous avons

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n(f)\,e^{\imath nx} := \lim_{\substack{M\to-\infty\\ N\to\infty}} \sum_{n=M}^{n=N} c_n(f)\,e^{\imath nx},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \tag{12.2}$$

avec

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\,e^{-\imath ny}\,dy.^{\dagger} \tag{12.3}$$

†. Rappelons la convention $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = \int_{]a,b[} g\,d\lambda_1$.

La définition (12.3) s'obtient à partir du *calcul formel* † suivant (avec δ_m^n le symbole de Kronecker) ‡ :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n(f)\, e^{\imath nx} \\ \Longrightarrow \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-\imath nx}\, dx &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} c_m(f)\, e^{\imath mx}\, e^{-\imath nx}\, dx \\ \Longrightarrow \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-\imath nx}\, dx &= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} c_m(f) \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{\imath mx}\, e^{-\imath nx}\, dx}_{=\,2\pi\,\delta_m^n} \\ \Longrightarrow \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-\imath nx}\, dx &= \sum_{m=-\infty}^{m} c_m(f)\, \delta_m^n = c_n(f). \end{aligned}$$

Ce calcul permet de dégager la définition (12.3). Ses lignes *formelles* sont la première et la troisième, car il faut pouvoir justifier (12.2) et la permutation de la somme et de l'intégrale.

Dans ce chapitre, nous allons justifier et donner un sens à la première égalité (12.2). *Ce sens ne sera pas, en général, celui de la deuxième égalité de* (12.2).

La section 12.1 permet de faire le lien entre (12.3) et la décomposition d'un vecteur dans une base orthonormée. Ce sujet sera revu dans le chapitre 14, dans le cadre des espaces de Hilbert; nous donnerons ici le cadre minimal permettant de comprendre (12.3) si $f \in L^2(I)$.

La section 12.2 est consacrée à l'égalité (12.2) si $f \in L^2(I)$. Le résultat principal est le *théorème de Fatou* 12.4 qui affirme que

$$f = \lim_{\substack{M\to-\infty \\ N\to\infty}} \sum_{n=M}^{n=N} c_n(f)\, e^{\imath n\cdot} \text{ dans } L^2(I).$$

Ce résultat est complété par l'*égalité de Parseval* (12.13)

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2$$

et par le *théorème de Riesz-Fischer* 12.8.

---

†. En analyse, un *calcul formel* est un calcul que l'on ne peut pas nécessairement justifier. En dehors de l'analyse, cette expression est synonyme de *calcul symbolique* **Calcul formel (Wikipédia)** En anglais, il n'y a pas d'ambiguïté : *formal computation* en analyse, vs *symbolic calculus*.

‡. Le *symbole de Kronecker* δ_i^j, avec $i, j \in I$, est défini par $\delta_i^j := \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Un autre résultat significatif qui sera obtenu dans cette section est le *lemme de Riemann-Lebesgue* 12.9.

La section 12.3 est dédiée au comportement ponctuel † de la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{\imath nx}$: plus spécifiquement, on s'intéresse à la validité de (12.2) (ou d'une variante de (12.2)) à x fixé. Pour des fonctions dérivables par morceaux, cette convergence (énoncée proprement) est le contenu du *théorème de Dirichlet* 12.13.

Dans la cas d'un fonction continue par morceaux, la série de Fourier peut ne pas converger. La bonne notion de convergence est celle de convergence *en moyenne*; le résultat de convergence correspondant est le *théorème de Fejér* 12.15.

La section 12.4 est dédiée à la convergence uniforme ou normale de la série de Fourier. Cette section est plus avancée que les autres et peut servir de base à la préparation à l'agrégation. Notons, dans cette introduction, deux résultats marquants et simples à énoncer (Corollaire 12.25) :

a) Si $f(0) = f(2\pi)$ et il existe $\alpha > 0$ et $C < \infty$ tels que $|f(x) - f(y)| \le C|x - y|^\alpha$, $\forall\, x, y \in [0, 2\pi]$, alors $\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e^{\imath kx}$ converge uniformément vers f quand $n \to \infty$.

b) Si $f(0) = f(2\pi)$ et il existe $\alpha > 1/2$ et $C < \infty$ tels que $|f(x) - f(y)| \le C|x - y|^\alpha$, $\forall\, x, y \in [0, 2\pi]$, alors $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{\imath nx}$ converge normalement vers f.

Dans la section 12.5, nous mentionnons sans preuve d'autres résultats célèbres de (non) convergence.

Compétences minimales attendues.

a) Savoir utiliser l'égalité de Parseval, le théorème de Fatou et le théorème de Riesz-Fischer.

b) Savoir utiliser le théorème de Dirichlet. ◇

12.1 Un peu d'algèbre bilinéaire

Soit H un espace vectoriel complexe, muni d'un produit scalaire complexe $<\,,\,>$, ‡ qui induit la norme $\|x\| :=< x, x >^{1/2}$, $\forall\, x \in H$.

Si $(e_j)_{j\in J} \subset H$ est une famille orthonormée, § alors pour tout $x \in H$ et toute

†. *Ponctuel* : en tout point $x \in I$.

‡. Nous considérons un produit scalaire *linéaire* dans le premier argument et *antilinéaire* dans le deuxième argument. L'exemple typique est $\mathbb{C}^2 \ni (z_1, z_2) \mapsto z_1\overline{z_2}$. C'est le produit scalaire des mathématiciens. Les physiciens considèrent des applications antilinéaires dans le premier argument, linéaires dans le deuxième argument. L'exemple typique est $\mathbb{C}^2 \ni (z_1, z_2) \mapsto \overline{z_1}z_2$.

§. Donc $< e_j, e_\ell >= 0$, $\forall\, j \ne \ell$ et $< e_j, e_j >= 1$, $\forall\, j$.

famille *finie* $L \subset J$ nous avons les propriétés suivantes.

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \left\| \sum_{j\in L} < x, e_j > \ e_j \right\|^2 + \left\| x - \sum_{j\in L} < x, e_j > \ e_j \right\|^2 \\ &= \sum_{j\in L} | < x, e_j > |^2 + \left\| x - \sum_{j\in L} < x, e_j > \ e_j \right\|^2,\end{aligned} \tag{12.4}$$

d'où en particulier

$$\sum_{j\in L} | < x, e_j > |^2 \leq \|x\|^2. \tag{12.5}$$

$$\begin{aligned}&\text{Si } x \in \text{Vect}\,\{e_j\,;\, j \in L\},\ \text{alors } x = \sum_{j\in L} < x, e_j > \ e_j \\ &\qquad\qquad \text{et } \|x\|^2 = \sum_{j\in L} | < x, e_j > |^2.\end{aligned} \tag{12.6}$$

Nous allons appliquer ceci à l'espace $L^2 := L^2(]0, 2\pi[)$, muni du produit scalaire

$$< f, g > := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{g}(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\, \overline{g}\, d\nu_1. \tag{12.7}$$

12.1 Notation. Si $n \in \mathbb{Z}$,

$$e_n(x) := e^{\imath n x},\ \forall\, x \in \mathbb{R}. \qquad \diamond \tag{12.8}$$

12.2 Définition. Si $f \in L^1 := L^1(]0, 2\pi[)$, le n^{e} *coefficient de Fourier* de f $(n \in \mathbb{Z})$ est

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{e_n}(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-\imath n x}\, dx. \tag{12.9}$$

Si $f \in L^2$, nous avons $c_n(f) =< f, e_n >$.

La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ étant orthonormée (exercice 12.3 b)), les relations (12.4), (12.6), respectivement (12.5) avec $J := \mathbb{Z}$ et $L := \{n \in \mathbb{Z}\,;\, n_0 \leq n \leq n_1\}$ donnent l'*inégalité de Bessel*

$$\begin{aligned}\sum_{n=n_0}^{n_1} |c_n(f)|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=n_0}^{n_1} c_n(f)\, e^{\imath n x} \right|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = \|f\|_{L^2}^2,\ \forall\, f \in L^2(]0, 2\pi[)\end{aligned} \tag{12.10}$$

et l'identité

$$\|f\|_{L^2}^2 = \left\| \sum_{n=n_0}^{n_1} c_n(f)\, e^{\imath n\cdot} \right\|_{L^2}^2 + \left\| f - \sum_{n=n_0}^{n_1} c_n(f)\, e^{\imath n\cdot} \right\|_{L^2}^2 . \tag{12.11}$$

Exercices

12.3 Exercice.
a) Montrer que (12.7) définit un produit scalaire sur L^2.
b) Montrer que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par (12.8) est orthonormée dans L^2 muni du produit scalaire (12.7). ◇

12.2 Séries de Fourier dans L^2

12.4 Théorème (Théorème de Fatou et égalité de Parseval)**.** Soit $f \in L^2 = L^2(]0, 2\pi[)$. Alors :

a) (Théorème de Fatou) Nous avons

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{\imath n\cdot} = \lim_{\substack{M\to-\infty \\ N\to\infty}} \sum_{n=M}^{n=N} c_n(f)\, e^{\imath n\cdot} \text{ dans } L^2. \tag{12.12}$$

b) Nous avons l'*égalité de Parseval*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = \|f\|_{L^2}^2. \tag{12.13}$$

12.5 Remarque. Une somme de la forme $x \mapsto \sum_{n=M}^{n=N} c_n(f)\, e^{\imath nx}$ est un *polynôme trigonométrique*, c'est-à-dire une *somme finie de la forme* $\sum_n a_n e^{\imath nx}$. ◇

12.6 Définition. Si $f \in L^1$, nous posons

$$S_n(f) := \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e_k. \tag{12.14}$$

En combinant le théorème 12.4 et le corollaire 10.28, nous obtenons la conséquence suivante.

12.7 Corollaire. Si $f \in L^2 = L^2(]0, 2\pi[)$, alors il existe une sous-suite $(n_j)_j$ de $\mathbb{N}$ telle que

$$S_{n_j}(f)(x) \to f(x) \text{ quand } j \to \infty, \text{ pour presque tout } x \in]0, 2\pi[. \quad ◇ \tag{12.15}$$

L'inégalité de Bessel (12.10) implique que, si $f \in L^2$, alors la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ des coefficients de Fourier de f appartient à $\ell^2(\mathbb{Z})$. Remarquablement, la réciproque est vraie. C'est le contenu du théorème suivant.

12.8 Théorème (Théorème de Riesz-Fischer)**.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite telle que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Alors il existe une et une seule fonction $f \in L^2 = L^2(]0, 2\pi[)$ telle que $c_n(f) = a_n$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

La preuve du théorème 12.4 se fait par densité, en commençant par des fonctions de $C_c^\infty(]0, 2\pi[)$. C'est une situation analogue à celle rencontrée dans la section 11.3. Voici un autre résultat important dont la preuve est dans cet esprit.

12.9 Lemme (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.** Soit $f \in L^1 = L^1(]0, 2\pi[)$. Nous avons $c_n(f) \to 0$ quand $|n| \to \infty$. ◇

Exercices

12.10 Exercice. Soit

$$P = \sum_{n\in I} a_n\, e^{\imath n\cdot} = \sum_{n\in I} a_n\, e_n$$

(avec $I \subset \mathbb{Z}$ fini) un polynôme trigonométrique. Montrer que $P \in L^1$ et que

$$c_n(P) = \begin{cases} a_n, & \text{si } n \in I \\ 0, & \text{si } n \notin I \end{cases}.$$ ◇

12.11 Exercice. Que donne l'égalité de Parseval pour $f(x) = x$? ◇

Démonstrations

Démonstration du théorème 12.4. L'ingrédient fondamental dans la preuve est le résultat suivant de densité, qui sera démontré plus tard.

12.12 Théorème. Soit $g \in C([0, 2\pi]; \mathbb{C})$ telle que $g(0) = g(2\pi)$. Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe un polynôme trigonométrique P tel que $|g(x) - P(x)| < \varepsilon$, $\forall\, x \in [0, 2\pi]$.

De manière équivalente, soit $C_{\text{pér}} := \{g \in C([0, 2\pi]; \mathbb{C})\,;\, g(0) = g(2\pi)\}$, muni de la norme uniforme. Alors les polynômes trigonométriques sont denses dans $C_{\text{pér}}$. ◇

Démonstration du théorème 12.4 (en admettant le théorème 12.12).

a) Soit $f \in L^2$ et soit $\varepsilon > 0$. Soit $g \in C_c^\infty(]0, 2\pi[)$ telle que $\|f - g\|_{L^2} < \varepsilon$ (l'existence de g suit du théorème 11.11). Soit P un polynôme trigonométrique tel que $|g(x) - P(x)| < \varepsilon$, $\forall\, x \in [0, 2\pi]$ (l'existence de P suit du théorème 12.12). Notons que $\|g - P\|_{L^2} < \varepsilon$, ce qui implique $\|f - P\|_{L^2} < 2\,\varepsilon$.

Soient $n_0, n_1 \in \mathbb{Z}$ tels que $P = \sum_{n=n_0}^{n_1} a_n\, e_n$. Si $M \le n_0$ et $N \ge n_1$, nous avons

$$\sum_{n=M}^{N} c_n(P)\, e_n = P \tag{12.16}$$

(justifier, en utilisant l'exercice 12.10).

Pour de tels M et N, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\left\| f - \sum_{n=M}^{N} c_n(f)\, e_n \right\|_{L^2} &\le \|f - P\|_{L^2} + \left\| P - \sum_{n=M}^{N} c_n(f)\, e_n \right\|_{L^2} \\
&= \|f - P\|_{L^2} + \left\| \sum_{n=M}^{N} c_n(P)\, e_n - \sum_{n=M}^{N} c_n(f)\, e_n \right\|_{L^2} \\
&= \|f - P\|_{L^2} + \left\| \sum_{n=M}^{N} c_n(P - f)\, e_n \right\|_{L^2} \\
&\le \|f - P\|_{L^2} + \|P - f\|_{L^2} < 4\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

Au passage, nous avons utilisé : (12.16), la linéarité de l'application $f \mapsto c_n(f)$ (la justifier) et l'inégalité

$$\left\| \sum_{n=n_0}^{n_1} c_n(g)\, e_n \right\|_{L^2} \le \|g\|_{L^2},\ \forall\, g \in L^2,$$

qui découle de (12.10).

$\varepsilon > 0$ étant arbitraire, nous obtenons que

$$\lim_{\substack{M\to-\infty \\ N\to\infty}} \sum_{n=M}^{N} c_n(f)\, e_n = f \text{ dans } L^2. \tag{12.17}$$

b) découle de (12.6) et de (12.17). En effet,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 = \lim_{\substack{M\to-\infty \\ N\to\infty}} \sum_{n=M}^{N} |c_k(f)|^2 = \lim_{\substack{M\to-\infty \\ N\to\infty}} \left\| \sum_{n=M}^{N} c_n(f)\, e_n \right\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2.$$

CQFD

Démonstration du théorème 12.8. Existence. Soit $P_n := \sum_{k=-n}^{n} a_k\, e_k$. L'identité (12.6) donne, pour $0 \le n < m$:

$$\|P_m - P_n\|_{L^2}^2 = \left\| \sum_{n+1\le|k|\le m} a_k\, e_k \right\|_{L^2}^2 = \sum_{n+1\le|k|\le m} |a_k|^2 \to 0 \text{ quand } n, m \to \infty.$$

Il s'ensuit que $(P_n)_n$ est une suite de Cauchy dans L^2. Par complétude de L^2 (théorème de Fatou 10.27), il existe $f \in L^2$ telle que $P_n \to f$ dans L^2 quand $n \to \infty$. Si $n \geq |k|$, alors $c_k(P_n) = a_k$ (exercice 12.10), d'où (justifier)

$$\begin{aligned}|c_k(f) - a_k| &= |c_k(f) - c_k(P_n)| = |c_k(f - P_n)| = |< f - P_n, e_k >| \\ &\leq \|f - P_n\|_{L^2} \|e_n\|_{L^2} = \|f - P_n\|_{L^2} \to 0 \text{ quand } n \to \infty,\end{aligned}$$

ce qui implique $c_k(f) = a_k$ pour tout k.

Unicité. Notons que, si $c_k(f) = c_k(g)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, avec $f, g \in L^2$, alors l'égalité de Parseval appliquée à $f - g$ donne $f = g$. CQFD

Démonstration du lemme 12.9. Soient $f \in L^1$ et $\varepsilon > 0$. Soit $g \in C_c^\infty(]0, 2\pi[)$ telle que $\|f - g\|_{L^1} < \varepsilon$ (l'existence de g suit du théorème 11.11).

Si $n \neq 0$, alors une intégration par parties donne

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x)\, e^{-\imath n x}\, dx = \frac{1}{2\imath\, \pi\, n} \int_0^{2\pi} g'(x)\, e^{-\imath n x}\, dx,$$

d'où $|c_n(g)| \leq \dfrac{1}{|n|} \max\limits_{[0,2\pi]} |g'| \to 0$ quand $|n| \to \infty$.

Il existe donc n_0 tel que $|c_n(g)| < \varepsilon$ si $|n| \geq n_0$. Pour un tel n, nous avons

$$|c_n(f)| \leq |c_n(g)| + |c_n(f - g)| \leq |c_n(g)| + \|f - g\|_{L^1} < 2\,\varepsilon.$$ CQFD

12.3 Comportement ponctuel des séries de Fourier

La question fondamentale étudiée dans cette section est le comportement de la suite

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e^{\imath k x}, \quad n \in \mathbb{N}, x \in I.^\dagger$$

Il sera commode de travailler avec des fonctions définies d'abord sur $[0, 2\pi[$, qui sont prolongées par 2π-périodicité à $\mathbb{R}$. Par exemple, si $f(x) = x$, $x \in [0, 2\pi[$, alors le prolongement 2π-périodique de f est

$$f(x) = x - 2\pi E\left(\frac{x}{2\pi}\right), \ \forall\, x \in \mathbb{R}.^\ddagger$$

Toutes les fonctions définies dans cette section sont supposées 2π-périodiques et intégrables sur $I =]0, 2\pi[$.

Le premier résultat fondamental de cette section est le *théorème de Dirichlet*.

†. L'étude du comportement de $\sum_{n=M}^{N} c_n(f)\, e^{\imath n x}$ quand $M \to -\infty$ et $N \to \infty$ *de manière indépendante* est un sujet très délicat qui dépasse largement le cadre de ce cours. Dans cette section, nous considérons uniquement le cas où $M = -N$.

‡. $E(x)$ désigne la partie entière de x.

12.13 Théorème.

a) (Critère de Dini) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. S'il existe deux nombres $f(x_0\pm)$ et une fonction $G \in L^1(]0,\pi[)$ telle que

$$|f(x_0\pm) - f(x_0 \pm y)| \le y\, G(y), \forall\, 0 < y < \pi, \tag{12.18}$$

alors

$$S_n(f)(x_0) \to \frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2} \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.19}$$

b) En particulier, (12.19) est vraie si f a des limites latérales $f(x_0\pm)$ en x_0, et les limites

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(x_0 \pm y) - f(x_0\pm)}{y}$$

existent et sont finies.

c) (Théorème de Dirichlet) En particulier, (12.19) est vraie en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ si f est « dérivable par morceaux ».

Si, dans le théorème précédent, nous voulons abaisser la condition de régularité sur f de « dérivable » à « continue », alors la bonne notion de convergence est celle de convergence *en moyenne* (*théorème de Fejér* 12.15), la moyenne étant définie ci-dessous.

12.14 Définition. Si $f \in L^1$, nous posons

$$T_n(f) := \frac{S_0(f) + S_1(f) + \cdots S_n(f)}{n+1}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.^{\dagger} \tag{12.20}$$

12.15 Théorème (Théorème de Fejér)**.**

a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f a des limites latérales finies $f(x_0\pm)$ en x_0, alors

$$T_n(f)(x_0) \to \frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2} \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.21}$$

b) Si f est continue, alors $T_n(f) \to f$ uniformément quand $n \to \infty$.
De manière équivalente, soit $f \in C([0,2\pi])$ telle que $f(0) = f(2\pi)$. Alors $T_n(f) \to f$ uniformément sur $[0,2\pi]$ quand $n \to \infty$.

†. $(T_n(f))_n$ est la *moyenne de Cesàro* de $(S_n(f))_n$.

Exercices

L'exercice suivant est *fondamental*. Il montre que, dans les calculs, on peut remplacer $]0, 2\pi[$ par tout intervalle de longueur 2π.

12.16 Exercice. Soit f 2π-périodique et intégrable sur $]0, 2\pi[$. Montrer que :

a) f est intégrable sur tout intervalle borné.

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(y)\, dy = \int_a^{a+2\pi} f(y)\, dy$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$. ◇

Les *noyaux de Dirichlet* interviennent dans la preuve du *théorème de Dirichlet* 12.13.

12.17 Définition (Noyau de Dirichlet)**.** Le n^{e} *noyau de Dirichlet* ($n \in \mathbb{N}$) est

$$D_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} e^{\imath kx},\ \forall\, x \in \mathbb{R}. \qquad ◇ \quad (12.22)$$

12.18 Exercice. Soit f 2π-périodique et intégrable sur $]0, 2\pi[$. Montrer que :

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)\, D_n(y)\, dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, D_n(y)\, dy,\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \qquad (12.23)$$

$$\begin{aligned} D_n(y) &= \begin{cases} \dfrac{\sin((n+1/2)y)}{\sin(y/2)}, & \text{si } y \notin 2\pi\,\mathbb{Z} \\ 2n+1, & \text{si } y \in 2\pi\,\mathbb{Z} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sin(ny)\ \text{cotan}\,(y/2) + \cos(ny), & \text{si } y \notin 2\pi\,\mathbb{Z} \\ 2n+1, & \text{si } y \in 2\pi\,\mathbb{Z} \end{cases}, \end{aligned} \qquad (12.24)$$

$$\int_0^{\pi} D_n(y)\, dy = \int_{-\pi}^{0} D_n(y)\, dy = \pi. \qquad ◇ \quad (12.25)$$

Les *noyaux de Fejér* interviennent dans la preuve du théorème de Fejér 12.15.

12.19 Définition (Noyau de Fejér)**.** Le n^{e} *noyau de Fejér* ($n \in \mathbb{N}$) est

$$F_n := \frac{D_0 + \cdots + D_n}{n+1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \qquad ◇ \quad (12.26)$$

12.20 Exercice. Soit f 2π-périodique et intégrable sur $]0, 2\pi[$. Montrer les propriétés suivantes.

$$\begin{aligned} T_n(f)(x) =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)\, F_n(y)\, dy \\ =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, F_n(y)\, dy,\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \end{aligned}, \tag{12.27}$$

$$F_n(y) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2[(n+1)y/2]}{(n+1)\, \sin^2(y/2)}, & \text{si } y \notin 2\pi\,\mathbb{Z} \\ n+1, & \text{si } y \in 2\pi\,\mathbb{Z} \end{cases}, \tag{12.28}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y)\, dy = 2\pi \tag{12.29}$$

$$\int_0^{\pi} F_n(y)\, dy = \int_{-\pi}^{0} F_n(y)\, dy = \pi. \tag{12.30}$$

Par ailleurs, montrer que

a) $F_n(y) \geq 0, \forall\, n, \forall\, y \in \mathbb{R}$.

b) Pour tout $0 < \delta < \pi$, $F_n \to 0$ uniformément sur $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ quand $n \to \infty$.

c) Pour tout $0 < \delta < \pi$,

$$\int_{[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]} F_n(y)\, dy \to 0 \text{ quand } n \to \infty. \qquad \diamond \tag{12.31}$$

Démonstrations

Démonstration du théorème 12.13. Étape 1. Preuve de (12.19) *sous l'hypothèse* (12.18). Posons

$$g(y) := \begin{cases} \dfrac{[f(x_0-y) - f(x_0-)]\, \cos(y/2)}{\sin(y/2)}, & \text{si } 0 < y < \pi \\ \dfrac{[f(x_0-y) - f(x_0+)]\, \cos(y/2)}{\sin(y/2)}, & \text{si } -\pi < y < 0 \end{cases}$$

et

$$h(y) := \begin{cases} f(x_0-y) - f(x_0-), & \text{si } 0 < y < \pi \\ f(x_0-y) - f(x_0+), & \text{si } -\pi < y < 0 \end{cases}.$$

Notons que

$$|g(y)| \leq \frac{y}{\sin(y/2)} G(|y|),\ \forall\, 0 < |y| < \pi,$$

avec G comme dans (12.18). La fonction

$$]-\pi, \pi[\setminus\{0\} \ni y \mapsto \frac{y}{\sin(y/2))}$$

se prolongeant par continuité en 0 et $\pm\pi$, il existe une constante $C < \infty$ telle que

$$|g(y)| \leq C\,G(|y|),\ \forall\, 0 < |y| < \pi. \tag{12.32}$$

Par ailleurs, g est mesurable (justifier). De (12.18) et (12.32), g est intégrable sur $]-\pi,\pi[$ (détailler).

De manière analogue,

$$|h(y)| \leq |y|G(|y|) \leq \pi G(|y|),$$

et donc h est intégrable sur $]-\pi,\pi[$.

En utilisant l'exercice 12.18, nous obtenons (détailler)

$$\begin{aligned}
S_n f(x_0) - \frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2} =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0-y)\,D_n(y)\,dy\\
&- \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x_0+)\,D_n(y)\,dy\\
&- \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x_0-)\,D_n(y)\,dy\\
=& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} (f(x_0-y)-f(x_0+))\,D_n(y)\,dy\\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} (f(x_0-y)-f(x_0-))\,D_n(y)\,dy\\
=& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(ny)\,g(y)\,dy + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(ny)\,h(y)\,dy\\
=& \frac{1}{4\imath\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\,[e^{\imath ny}-e^{-\imath ny}]\,dy\\
&+ \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(y)\,[e^{\imath ny}+e^{-\imath ny}]\,dy\\
=& \frac{1}{2\imath}[c_{-n}(g)-c_n(g)] + \frac{1}{2}[c_{-n}(h)+c_n(h)]\\
&\to 0 \text{ quand } n\to\infty,
\end{aligned}$$

la conclusion finale étant une conséquence du lemme de Riemann-Lebesgue.

Étape 2. Preuve des items b) et c). Il faut montrer que les hypothèses des items b) et c) impliquent l'existence d'une fonction intégrable G ayant la propriété (12.18). Posons

$$G(y) := \left|\frac{f(x_0+y)-f(x_0+)}{y}\right| + \left|\frac{f(x_0-y)-f(x_0-)}{y}\right|,\ \forall\, 0<y<\pi.$$

Alors G est mesurable et satisfait, par construction, (12.18).

Si f est comme dans l'item b), alors G a une limite finie en 0, et donc G est bornée (et donc intégrable) dans un voisinage $]0,\varepsilon[$ de 0. Par ailleurs, si $y \geq \varepsilon$, nous avons

$$G(y) \leq \varepsilon^{-1}(|f(x_0+y)|+|f(x_0+)|+|f(x_0-y)|+|f(x_0-)|) := H(y),$$

et cette majorante est intégrable (justifier), d'où G est intégrable.

Enfin, l'item c) est un cas particulier de l'item b). CQFD

Démonstration du théorème 12.15. Étape 1. Preuve de l'item a). Soit $\varepsilon > 0$. Soit $0 < \delta < \pi$ tel que

$$0 < y \leq \delta \implies |f(x_0 \pm y) - f(x_0\pm)| \leq \varepsilon. \tag{12.33}$$

Posons

$$m_n := \max\{F_n(y)\,;\, \delta \leq |y| \leq \pi\},$$

de sorte que

$$\lim_{n\to\infty} m_n = 0 \tag{12.34}$$

(exercice 12.20).

En utilisant l'exercice 12.20 et (12.33), nous obtenons, avec $a := [f(x_0+) + f(x_0-)]/2$:

$$\begin{aligned}
|T_n f(x_0) - a| =& \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, F_n(y)\, dy - \pi\, f(x_0+) - \pi\, f(x_0-)\right|\\
\leq& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} |f(x-y) - f(x_0+)|\, F_n(y)\, dy\\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} |f(x-y) - f(x_0-)|\, F_n(y)\, dy\\
\leq& \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} F_n(y)\, dy\\
&+ \frac{m_n}{2\pi}\int_{[\delta,\pi]} (|f(x_0+)| + |f(x_0-)| + |f(x_0-y)| + |f(x_0+y)|)\, dy\\
\leq& \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y)\, dy + \frac{m_n}{2}(|f(x_0+)| + |f(x_0-)|)\\
&+ \frac{m_n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx\\
=& \varepsilon + \frac{m_n}{2}(|f(x_0+)| + |f(x_0-)| + 2\|f\|_1) \to \varepsilon \text{ quand } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'il existe n_0 tel que $|T_n f(x_0) - a| \leq 2\varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$.

Étape 2. Preuve de l'item b). Rappelons qu'une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée et uniformément continue. Il s'ensuit qu'il existe un δ indépendant de x_0 tel que (12.33) soit satisfaite, et pour ce δ nous avons, en reprenant les calculs précédents,

$$\begin{aligned}
|T_n f(x_0) - a| \leq& \varepsilon + \frac{m_n}{2}(|f(x_0+)| + |f(x_0-)| + 2\|f\|_{L^1})\\
\leq& \varepsilon + \frac{m_n}{2}(2\|f\|_{L^\infty} + 2\|f\|_{L^1}) \to \varepsilon \text{ quand } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons l'existence d'un n_0 *indépendant de* x_0 tel que $|T_n f(x_0) - a| \leq 2\varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$, d'où la conclusion de l'item b). CQFD

Démonstration du théorème 12.12. Au vu du théorème de Fejér (item b)), il suffit de prendre $P := T_n(g)$ avec n suffisamment grand. CQFD

12.4 Comportement global des séries de Fourier

La question fondamentale étudiée dans cette section est celle de la convergence uniforme ou normale de la suite $(S_n(f))$.[†] Notons que la convergence *normale* de la série *de fonctions* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{ın\cdot}$ revient à la convergence de la série *numérique* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|$.

Dans ce qui suit, *les fonctions f sont continues*[‡] *et* 2π*-périodiques.*Elles sont donc en particulier *uniformément continues sur* $\mathbb{R}$.[§]

La philosophie générale est que plus f est lisse, plus la convergence de sa série de Fourier est forte. Notons, par exemple que, si $f \in C^2$, alors

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{ın\cdot}, \tag{12.35}$$

la série de (12.35) étant normalement convergente (exercice 12.26). Une quantité qui mesure la continuité de f est le *module de continuité*.

12.21 Définition. Le *module de continuité* de f est $\delta \mapsto \omega(\delta)$, où

$$\omega(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)|\,;\, x, y \in \mathbb{R},\ |x-y| \le \delta\},\ \forall\, 0 < \delta \le 2\pi.^{¶} \qquad \diamond \tag{12.36}$$

L'interprétation intuitive de la taille de ω est que plus $\omega(\delta)$ tend vers 0 rapidement quand $\delta \to 0$, plus la fonction f est lisse. (Voir néanmoins l'exercice 12.28.)

On peut montrer que, dans (12.36), le $\sup$ est un $\max$ (exercice 12.27).

Il sera instructif d'illustrer la calcul de $\omega(\delta)$ et les résultats généraux qui suivent sur les fonctions hölderiennes, qui sont une généralisation des fonctions lipschitziennes.

12.22 Définition. Soit $0 < \alpha \le 1$. Une fonction $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ est α*-hölderienne* si $|f|_{C^\alpha} < \infty$, où

$$|f|_{C^\alpha} := \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}\,;\, x, y \in [0, 2\pi],\ x \ne y\right\}.$$

Une fonction est *hölderienne* si elle est α-hölderienne pour un α. $\diamond$

†. Pour la convergence de la suite $(T_n(f))$, le théorème de Fejér 12.15 fournit une réponse convenable.

‡. On ne peut espérer de la convergence uniforme de $(S_n(f))$ en l'absence de la continuité de f, car une limite uniforme de fonctions continues est encore continue.

§. Voir l'étape 2 de la preuve du théorème 12.15.

¶. La définition la plus courante du module de continuité est légèrement différente, mais pour énoncer les résultats de cette section la définition via la formule (12.36) convient.

Si f est α-hölderienne sur $[0, 2\pi]$ et, de plus, $f(0) = f(2\pi)$, alors le prolongement par périodicité de f est continu et nous avons (exercice 12.29)

$$\omega(\delta) \leq 2|f|_{C^\alpha}\, \delta^\alpha,\ 0 < \delta \leq 2\pi. \tag{12.37}$$

12.23 Théorème. (Théorème de Jackson) Si

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(\delta)\, |\ln \delta| = 0, \tag{12.38}$$

alors $S_n(f) \to f$ uniformément quand $n \to \infty$. ◇

12.24 Théorème. Si

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta^{3/2}}\, d\delta < \infty, \tag{12.39}$$

alors la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{\imath n\cdot}$ converge normalement vers f. ◇

En combinant les théorèmes 12.23 et 12.24 avec l'inégalité (12.37), nous obtenons le résultat important suivant.

12.25 Corollaire. Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ une fonction telle que $f(0) = f(2\pi)$.

a) Si f est α-hölderienne pour un $\alpha > 0$, alors $\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e^{\imath k\cdot}$ converge uniformément vers f quand $n \to \infty$.

b) (Théorème de Bernstein) Si f est α-hölderienne pour un $\alpha > 1/2$ (donc, en particulier, si f est de classe C^1, ou si f est lipschitzienne), alors la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{\imath n\cdot}$ converge normalement et sa somme est f.

Exercices

12.26 Exercice. Soit $f \in C^k(\mathbb{R})$ une fonction 2π-périodique. Montrer que

$$|c_n(f)| \leq \frac{\|f^{(k)}\|_{L^\infty}}{|n|^k},\ \forall\, n \in \mathbb{Z}^*.$$

En particulier, si $f \in C^2$, montrer que sa série de Fourier $x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{\imath nx}$ converge normalement, et que la somme de la série est f. ◇

12.27 Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique. Soit ω son module de continuité,

$$\omega(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)|\,;\ x, y \in \mathbb{R},\ |x - y| \leq \delta\},\ \forall\, 0 < \delta \leq 2\pi. \tag{12.40}$$

1. Montrer que, dans (12.40), le $\sup$ est un $\max$.
2. Montrer que ω est continue et croissante. ◇

12.28 Exercice. Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ une fonction telle que $\omega(\delta) \ll \delta$ quand $\delta \to 0$. Montrer que f est constante (et réciproquement). ◇

12.29 Exercice. Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ une fonction α-hölderienne telle que $f(0) = f(2\pi)$. Nous notons encore f son prolongement par 2π-périodicité.

1. Montrer que

$$\omega(\delta) \leq 2\,|f|_{C^\alpha}\delta^\alpha, \forall\, 0 < \delta \leq 2\pi. \tag{12.41}$$

2. Améliorer (12.41) à

$$\omega(\delta) \leq 2^{1-\alpha}\,|f|_{C^\alpha}\delta^\alpha, \forall\, 0 < \delta \leq 2\pi.$$ ◇

12.30 Exercice. Montrer que $S_n(T_n(f)) = T_n(f)$. ◇

12.31 Exercice. Montrer que

$$\|S_n(f)\|_{L^\infty} \leq \|D_n\|_{L^1}\|f\|_{L^\infty},\ \forall\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ mesurable, bornée, } 2\pi\text{-périodique.} \diamond \tag{12.42}$$

12.32 Exercice.

1. Montrer que

$$|D_n(y)| \leq \frac{\pi}{|y|}\min\left((n+1/2)|y|, 1\right),\ \forall\, n \geq 0,\ \forall\, 0 < |y| \leq \pi. \tag{12.43}$$

On pourra utiliser les inégalités suivantes :

$$|\sin t| \leq \min\left(|t|, 1\right), \forall\, t \in \mathbb{R},$$
$$\sin t \geq \frac{2}{\pi}t,\ \forall\, t \in [0, \pi/2].$$ ◇

2. En déduire que

$$\|D_n\|_{L^1} \leq 1 + \ln\pi + \ln(n+1/2),\ \forall\, n \geq 0. \quad \diamond \tag{12.44}$$

12.33 Exercice. Montrer que

$$|F_n(y)| \leq \frac{\pi^2}{(n+1)y^2}\min\left(((n+1)y/2)^2, 1\right),\ \forall\, n \geq 0,\ \forall\, 0 < |y| \leq \pi. \quad \diamond \tag{12.45}$$

12.34 Exercice. Si f est localement intégrable et 2π-périodique, montrer que $c_n(f(\cdot+h)) = e^{\imath nh}c_n(f)$, $\forall\, h \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$. ◇

Démonstrations

Démonstration du théorème 12.23. Étape 1. Stratégie générale de la preuve. La fonction f étant continue, nous avons $T_n(f) \to f$ uniformément (théorème 12.15 item b)). Il suffit donc de montrer que $S_n(f) - T_n(f) \to 0$ uniformément. En notant que $T_n(f) = S_n(T_n(f))$ (exercice 12.30), nous devons montrer que

$$S_n(f - T_n(f)) \to 0 \text{ uniformément quand } n \to \infty. \tag{12.46}$$

La preuve de (12.46) repose sur les exercices 12.31 et 12.32, qui donnent

$$\|S_n(f - T_n(f))\|_{L^\infty} \leq (1 + \ln \pi + \ln(n + 1/2))\|f - T_n(f)\|_{L^\infty}. \tag{12.47}$$

Pour compléter la preuve du théorème, nous allons obtenir les résultats suivants :

$$\|f - T_n(f)\|_{L^\infty} \leq \frac{\pi}{2}\omega(2/(n+1)) + \frac{\pi}{n+1}\int_{2/(n+1)}^{\pi} \frac{\omega(y)}{y^2}\,dy, \tag{12.48}$$

$$\text{sous l'hypothèse (12.38), nous avons } \lim_{\delta\to 0} \delta\,|\ln \delta| \int_{\delta}^{\pi} \frac{\omega(y)}{y^2}\,dy = 0, \tag{12.49}$$

résultats qui, combinés avec (12.47), permettent de conclure (vérifier).

Étape 2. Preuve de (12.48). En reprenant le début de la preuve du théorème 12.15, et en utilisant les propriétés de F_n (exercices 12.20 et 12.27), la définition de ω, et la monotonie de ω (exercice 12.27), nous obtenons successivement, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
|T_n f(x) - f(x)| =& \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} [f(x-y) - f(x)]\, F_n(y)\,dy\right| \\
\leq& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \omega(|y|)\, F_n(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \omega(y)\, F_n(y)\,dy \\
\leq& \frac{\pi(n+1)}{4}\int_0^{2/(n+1)} \omega(y)\,dy + \frac{\pi}{n+1}\int_{2/(n+1)}^{\pi} \frac{\omega(y)}{y^2}\,dy \\
\leq& \frac{\pi^2}{2}\omega(2/(n+1)) + \frac{\pi}{n+1}\int_{2/(n+1)}^{\pi} \frac{\omega(y)}{y^2}\,dy.
\end{aligned} \tag{12.50}$$

On obtient (12.48) en prenant, dans (12.50), le sup sur x.

Étape 3. Preuve de (12.49). La règle de l'Hospital « $?/\infty$ », qui s'applique car ω est continue (exercice 12.27), donne, grâce à l'hypothèse (12.38),

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0} \delta\,|\ln \delta| \int_{\delta}^{\pi} \frac{\omega(y)}{y^2}\,dy &= \lim_{\delta\to 0} \frac{\displaystyle\int_{\delta}^{\pi} \frac{\omega(y)}{y^2}\,dy}{\dfrac{-1}{\delta\,\ln\delta}} = \lim_{\delta\to 0} \frac{-\dfrac{\omega(\delta)}{\delta^2}}{\dfrac{1}{\delta^2\,\ln\delta} + \dfrac{1}{\delta^2\,(\ln\delta)^2}} \\
&= \lim_{\delta\to 0} \frac{-\omega(\delta)\,\ln\delta}{1 + \dfrac{1}{\ln\delta}} = 0.
\end{aligned}$$

CQFD

Démonstration du théorème 12.24. Rappelons que notre principal but est de montrer la convergence de la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|$.

Étape 1. Utilisation de l'égalité de Parseval et du module de continuité. Pour $0 < h \leq 2\pi$, soit $f_h(x) := f(x+h)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$c_n(f_h) = e^{\imath nh} c_n(f) \tag{12.51}$$

(exercice 12.34) et, clairement,

$$\|f_h - f\|_{L^2} \leq \|f_h - f\|_{L^\infty} \leq \omega(h). \tag{12.52}$$

De (12.51), (12.52) et l'égalité de Parseval (12.13), nous obtenons

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |e^{\imath nh}-1|^2|c_n(f)|^2 \leq \omega^2(h),\ \forall\, 0<h\leq 2\pi. \tag{12.53}$$

Étape 2. Contrôle de $\sum |c_n(f)|$ si $|n|$ est de l'ordre de $1/h$. Prenons $h:=1/2^\ell$, avec $\ell\in\mathbb{N}$, et les $n\in\mathbb{Z}$ vérifiant $2^\ell\leq |n|<2^{\ell+1}$. Pour de tels n et h, nous avons $1\leq |nh|<2$, et donc

$$|e^{\imath nh}-1|^2\geq C, \tag{12.54}$$

où

$$C:=\min\{|e^{\imath t}-1|^2\,;\,1\leq |t|\leq 2\}>0$$

(justifier le fait que $C>0$).

De (12.53), (12.54), et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\begin{aligned}\left(\sum_{2^\ell\leq|n|<2^{\ell+1}} |c_n(f)|\right)^2 \leq & \sum_{2^\ell\leq|n|<2^{\ell+1}} |e^{\imath n/2^\ell}-1|^2|c_n(f)|^2\\ &\times \sum_{2^\ell\leq|n|<2^{\ell+1}} \frac{1}{|e^{\imath n/2^\ell}-1|^2}\leq \frac{2^{\ell+1}}{C^2}\omega^2(1/2^\ell),\ \forall\,\ell\in\mathbb{N}.\end{aligned} \tag{12.55}$$

Étape 3. Comparaison série-intégrale. La monotonie de ω (exercice 12.27) et la sommation par paquets (proposition 6.48) donnent

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta^{3/2}}\,d\delta &= \sum_{\ell\geq 0}\int_{1/2^{\ell+1}}^{1/2^\ell} \frac{\omega(\delta)}{\delta^{3/2}}\,d\delta \geq \sum_{\ell\geq 0}\int_{1/2^{\ell+1}}^{1/2^\ell} \frac{\omega(1/2^{\ell+1})}{\delta^{3/2}}\,d\delta\\ &\geq \sum_{\ell\geq 0}\int_{1/2^{\ell+1}}^{1/2^\ell} \frac{\omega(1/2^{\ell+1})}{(1/2^\ell)^{3/2}}\,d\delta = 2^{-3/2}\sum_{\ell\geq 1} 2^{\ell/2}\omega(1/2^\ell).\end{aligned} \tag{12.56}$$

Étape 4. Convergence normale de la série de Fourier. En utilisant la sommation par paquets, (12.55), (12.56), et l'hypothèse (12.39), nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)| =& |c_0(f)| + \sum_{\ell\geq 0}\sum_{2^\ell\leq|n|<2^{\ell+1}} |c_n(f)| \leq |c_0(f)| + \frac{2^{1/2}}{C}\sum_{\ell\geq 0} 2^{\ell/2}\omega(1/2^\ell)\\ \leq& |c_0(f)| + \frac{2^{1/2}}{C}\omega(1) + \frac{4}{C}\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta^{3/2}}\,d\delta < \infty.\end{aligned}$$

Étape 5. Identification de la limite. Notons $S(f):=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\,e^{\imath n\cdot}$, qui est continue, comme somme d'une série normalement convergente de fonctions continues. Du corollaire 12.7, il existe une suite $n_j\nearrow\infty$ telle que

$$\lim_{j\to\infty}\sum_{k=-n_j}^{n_j} c_k(f)\,e^{\imath kx} = f(x) \text{ pour presque tout } x\in\mathbb{R}. \tag{12.57}$$

Nous avons donc $S(f)=f$ presque partout d'où, par continuité de $S(f)$ et f, $S(f)=f$ *partout* (justifier). CQFD

12.5 Pour aller plus loin

Les résultats des sections précédentes, notamment la comparaison entre le théorème de Fejér 12.15 et le théorème de Dirichlet 12.13, montrent que la « bonne » notion de convergence des séries de Fourier est la convergence en moyenne : *il est plus approprié d'approcher f par $T_n(f)$ plutôt que par $S_n(f)$*. Ce phénomène est également illustré par le *phénomène de Gibbs*, instabilité numérique associée à $S_n(f)$ (mais pas à $T_n(f)$) étudiée en analyse numérique. (Voir la présentation historique de ces types de phénomènes dans Hewitt et Hewitt [13].)

Néanmoins, l'étude du comportement de la suite $(S_n(f))_n$ a été l'un des moteurs importants du développement de l'analyse entre 1850 et 1970. Signalons, sans preuve, quelques résultats marquants.

12.35 Théorème (Critère de Jordan)**.** Si $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ est monotone (et étendue par 2π-périodicité à $\mathbb{R}$), alors

$$S_n(f)(x_0) \to \frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2} \text{ quand } n \to \infty, \ \forall\, x_0 \in \mathbb{R}. \qquad \diamond$$

.

12.36 Théorème (Théorème de du Bois-Reymond)**.** Il existe une fonction continue et 2π-périodique f telle que $S_n(f)(0) \not\to f(0)$ quand $n \to \infty$.† ◇

12.37 Théorème (Théorème de M. Riesz)**.** Soient $1 < p < \infty$ et $f \in L^p = L^p(]0, 2\pi[)$. Nous avons $S_n(f) \to f$ dans L^p quand $n \to \infty$. ◇

12.38 Théorème (Théorème de Kolmogorov)**.** Il existe une fonction $f \in L^1 = L^1(]0, 2\pi[)$ telle que la suite $(S_n(f)(x_0))$ diverge, $\forall\, x_0 \in [0, 2\pi]$. ◇

Enfin, une amélioration remarquable du corollaire 12.7.

12.39 Théorème (Théorème de Carleson-Hunt)**.** Soient $1 < p < \infty$ et $f \in L^p = L^p(]0, 2\pi[)$. Nous avons $S_n(f) \to f$ p. p. sur $[0, 2\pi]$ quand $n \to \infty$.‡

Pour une description historique de ces problèmes, une bonne référence est Edwards [6, Chapitre 10], qui contient aussi des (ébauches de) démonstrations de ces résultats, sauf du dernier. La preuve du dernier théorème est longue et difficile, même si elle a été beaucoup simplifiée entre 1973 et 2000 ; voir Grafakos [9, Chapitre 11].

†. Cette propriété négative est vraie pour « la plupart » des fonctions continues, mais donner un sens précis à « la plupart » nécessite un formalisme qui ne sera pas développé ici.

‡. Le cas $p = 2$ est dû à Carleson, qui conjectura que le cas général $1 < p < \infty$ devait se faire de manière analogue. Une preuve pour $1 < p < \infty$ fut trouvée ultérieurement par Hunt.