Chapitre 9

Espaces de Sobolev

Dérivées généralisées

9.1 Définition. Soient $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $j \in [\![1, n]\!]$. Alors g est la dérivée généralisée $\partial_j f$ de f si

$$-\int_\Omega f \partial_j \varphi = \int_\Omega g\varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{9.1}$$

Plus généralement, si $P(\partial)$ est un opérateur à coefficients constants, alors on a $P(\partial)f = g$ au sens généralisé si

$$\int_\Omega f P(-\partial)\varphi = \int_\Omega g\varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{9.2}$$

9.2 Remarque. Le principe de localisation (Proposition 8.35) montre que g (si elle existe) est unique.

Pour quelques exemples de dérivées généralisées, voir les Exercices 9.50-9.54.

Le résultat qui suit sera prouvé en plus grande généralité dans le cadre de la théorie des distributions.

9.3 Proposition.
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ *connexe.* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. $\nabla f = 0$. [1]
Conclusion. f *est constante.*

Démonstration. La conclusion étant locale (dans un ouvert connexe, une fonction est constante si et seulement si elle est localement constante, *cf* Exercice 9.57), il suffit de considérer le cas où Ω est un cube, par exemple $\Omega = (-1,1)^n$. Soit ρ un noyau régularisant. Alors $\nabla(f * \rho_\varepsilon) = 0$ dans $(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)^n \subset \Omega_\varepsilon$ (Lemme 9.5). [2] Il s'ensuit que $f * \rho_\varepsilon = C_\varepsilon$ dans $(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)^n$, pour une constante convenable. Le long d'une suite $\varepsilon_j \to 0$, on a $f * \rho_{\varepsilon_j} \to f$ p. p. On trouve $C_{\varepsilon_j} \to C$ et $f = C$. □

Le résultat suivant décrit (à g donnée) les fonctions f telles que $\partial_j f = g$. Pour simplifier, nous prenons, dans l'énoncé qui suit, $j = 1$.

9.4 Proposition.
Hypothèses. $\Omega = I \times \omega$. I *intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$. $\omega \sqsubset \mathbb{R}^{n-1}$. $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$. $a \in I$.
Conclusion. On a l'équivalence :

1. C'est-à-dire les dérivées généralisées du premier ordre de f sont nulles.
2. Rappelons la notation $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega\,;\, \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$.

1. *$\partial_1 f = g$.*
2. *Il existe $h \in L^1_{loc}(\omega)$ telle que $f(x_1, x') = h(x') + \int_a^{x_1} g(t, x')\,dt$.*

Dans le cas $n = 1$, ceci devient $f(x) = C + \int_a^x g(t)\,dt$.

Démonstration. L'implication *2⟹1* suit de l'Exercice 9.53 combiné avec le théorème de Fubini et est laissée en exercice.

Pour l'implication inverse, notons d'abord que la conclusion est claire si $f, g \in C^1$. On applique cette remarque dans $I_\varepsilon \times \omega_\varepsilon$ à $f * \rho_\varepsilon$ et $g * \rho_\varepsilon$, où ρ est un noyau régularisant. Grâce au Lemme 9.5, on trouve

$$f * \rho_\varepsilon(x_1, x') = h_\varepsilon(x') + \underbrace{\int_a^{x_1} g * \rho_\varepsilon(t, x')\,dt}_{J_\varepsilon(x_1, x')}.$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$, on a $J_\varepsilon \to J$ dans $L^1_{loc}(\Omega)$, où $J(x_1, x') = \int_a^{x_1} g(t, x')\,dt$ (vérifier !). Par ailleurs, on a $f * \rho_\varepsilon \to f$ dans $L^1_{loc}(\Omega)$, d'où h_ε converge dans $L^1_{loc}(\Omega)$. Comme h_ε ne dépend pas de x_1, la limite h est indépendante de x_1, ce qui donne *2*. □

Régularisation (I)

Les résultats de cette partie sont importants pour comprendre la façon dont on raisonne dans avec les "fonctions généralisées" (dérivées généralisées, distributions). Rappelons qu'en intégration on commence souvent par considérer des fonctions étagées, puis on essaie de passer à la limite en utilisant la densité de ces fonctions dans les espaces L^p. Dans le cadre des dérivées généralisées, un raisonnement standard est le suivant :

1. On vérifie la propriété demandée si tout est C^∞.
2. On applique l'item 1. aux régularisées d'une fonction.
3. Le point crucial : on passe à la limite.

Nous donnerons ici quelques exemples. Bien d'autres se trouvent dans la section Exercices ou disséminés dans les preuves des résultats de ce chapitre. Les outils essentiels pour ce qui suit sont la Proposition 8.11, l'Exercice 9.59 et le

9.5 Lemme.
Hypothèses. *$\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$. $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$. $j \in [\![1, n]\!]$. $\partial_j f = g$. $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega\,;\, \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. ρ noyau régularisant.*
Conclusion. *Dans Ω_ε, on a $\partial_j(f * \rho_\varepsilon) = g * \rho_\varepsilon$.*

Démonstration. Soit $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ et soit $K = \operatorname{supp}\varphi$. Soit ε_0 tel que $B(0, \varepsilon_0) + K := K_0 \Subset \Omega$. Pour $\varepsilon < \varepsilon_0$ on a :

$$\begin{aligned}
-\int (f * \rho_\varepsilon)\partial_j\varphi &= -\int_K \left(\int_{B(x,\varepsilon)} f(y)\rho_\varepsilon(x - y)\,dy\right)\partial_j\varphi(x)\,dx \\
&= -\int_{B(0,\varepsilon)} \rho_\varepsilon(z)\left(\int_{K_0} f(y)\partial_j\varphi(y + z)\,dy\right)dz \\
&= \int_{B(0,\varepsilon)} \rho_\varepsilon(z)\left(\int_\Omega g(y)\varphi(y + z)\,dy\right)dz = \int (g * \rho_\varepsilon)\varphi.
\end{aligned}$$

L'utilisation du théorème de Fubini est justifiée par la majoration

$$|f(y)\rho_\varepsilon(z)\partial_j\varphi(y+z)| \le C|f(y)|\mathbb{1}_{K_0}(y). \qquad \square$$

9.6 Proposition.
Hypothèses. $u, v \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. $\exists \partial_j u, \partial_j v$.
Conclusions. $\exists \partial_j(uv)$ *et on a* $\partial_j(uv) = (\partial_j u)v + u\partial_j v$.

Démonstration. L'égalité est claire si $u, v \in C^1$. En particulier, elle s'applique, dans

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega\,;\,\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}, \tag{9.3}$$

à $u * \rho_\varepsilon$ et $v * \rho_\varepsilon$. D'après le Lemme 9.5, on a

$$\partial_j[(u*\rho_\varepsilon)(v*\rho_\varepsilon)] = (u*\rho_\varepsilon)((\partial_j v)*\rho_\varepsilon) + (v*\rho_\varepsilon)((\partial_j u)*\rho_\varepsilon). \tag{9.4}$$

La Proposition 8.11 donne $u*\rho_\varepsilon \to u$ dans L^r_{loc}, $r<\infty$, et donc, quitte à extraire une suite $\varepsilon_k \to 0$, on peut supposer $u*\rho_\varepsilon \to u$ p. p., et de même $v*\rho_\varepsilon \to v$, $u*\rho_\varepsilon \to u$, $(\partial_j u)*\rho_\varepsilon \to \partial_j u$ et $(\partial_j v)*\rho_\varepsilon \to \partial_j v$ p. p. Par ailleurs, on a $|u*\rho_\varepsilon| \le \|u\|_{L^\infty}$, par l'inégalité de Young. Soit $K \Subset \mathbb{R}^n$. L'inégalité

$$\int_K \left|(u*\rho_\varepsilon)((\partial_j v)*\rho_\varepsilon) - u\partial_j v)\right| \le \int_K |(u*\rho_\varepsilon - u)\partial_j v| + \int_K |u*\rho_\varepsilon((\partial_j v)*\rho_\varepsilon - \partial_j v)| \tag{9.5}$$

montre que la première intégrale de (9.5) tend vers 0 le long d'une suite $\varepsilon_k \to 0$.[3] Une inégalité similaire est vraie si on inverse les rôles de u et v. Il s'ensuit que le membre de droite de (9.4) tend vers $u\partial_j v + (\partial_j u)v$ dans L^1_{loc}. Comme, le long de la suite $\varepsilon_k \to 0$, on a $(u*\rho_\varepsilon)(v*\rho_\varepsilon) \to uv$ dans L^1_{loc},[4] le passage à la limite dans (9.4) combiné avec l'Exercice 9.59 donne la conclusion de la proposition. $\square$

9.7 Proposition.
Hypothèses. $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$. Φ *lipschitzienne.* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. $\exists \partial_j u$.
Conclusions. $\exists \partial_j(\Phi(u))$ *et* $\partial_j(\Phi(u)) = \Phi'(u)\partial_j u$.

Démonstration. On suit le schéma précédent. Avec $u^\varepsilon := u*\rho_\varepsilon$, on doit passer à la limite dans l'égalité

$$\partial_j(\Phi(u^\varepsilon)) = \Phi'(u^\varepsilon)[(\partial_j u)*\rho_\varepsilon]. \tag{9.6}$$

A une extraction près, on a $(\partial_j u)*\rho_\varepsilon \to \partial_j u$ p. p. et dans L^1_{loc}, et $\Phi'(u^\varepsilon) \to \Phi'(u)$ p. p. Par ailleurs, on a $|\Phi'(u^\varepsilon)| \le C$, où C est la constante de Lipschitz de Φ. Comme dans le preuve de (9.5), on trouve que le membre de droite de (9.6) tend vers $\Phi'(u)\partial_j u$ dans L^1_{loc}. Par ailleurs, on a

$$\int_K |\Phi(u^\varepsilon) - \Phi(u)| \le C\int_K |u*\rho_\varepsilon - u| \to 0,$$

grâce à la Proposition 8.11. On conclut *via* l'Exercice 9.59. $\square$

3. En effet, la deuxième intégrale de (9.5) tend vers 0 par convergence dominée. La troisième et majorée par $\|u\|_{L^\infty}\displaystyle\int_K |(\partial_j v)*\rho_\varepsilon - \partial_j v| \to 0$.

4. Pour le montrer, utiliser la convergence p. p. et le fait que $|u*\rho_\varepsilon| \le \|u\|_{L^\infty}$.

9.8 Proposition.
Hypothèses. $\omega, \Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$. $\Phi : \omega \to \Omega$ C^1-*difféomorphisme.* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. $\exists \nabla u$.
Conclusions. $\exists \nabla(u \circ \Phi)$ *et* $\nabla(u \circ \Phi) = [{}^t J_\Phi][(\nabla u) \circ \Phi]$.

Ici, J_Φ est la matrice jacobienne de Φ.

Démonstration. Soit $u^\varepsilon = u * \rho_\varepsilon$. Soit Ω_ε comme dans (9.3) et soit $\omega_\varepsilon = \Phi^{-1}(\Omega_\varepsilon)$. Alors

$$\partial_j(u^\varepsilon \circ \Phi) = \sum_k [(\partial_k u^\varepsilon) \circ \Phi] \partial_j \Phi_k, \quad \forall\, j \in [\![1, n]\!], \tag{9.7}$$

et l'énoncé équivaut à montrer que (9.7) reste vraie si on remplace u^ε par u. Pour passer à la limite dans (9.7) (*via* l'Exercice 9.59), il suffit de combiner la Proposition 8.11 avec l'Exercice 9.55. □

Nous finissons cette section avec un *avertissement*. On ne peut pas transférer aux dérivées généralisées *toutes* les propriétés des dérivées usuelles. Considérer l'exemple suivant : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$. Alors f a une dérivée généralisée, mais pas f^2.[5]

Espaces de Sobolev

9.9 Définition. Soient $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$, $1 \le p \le \infty$ et $k \in \mathbb{N}$. On définit

$$W^{k,p} = W^{k,p}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{C};\ \|u\|_{W^{k,p}} < \infty\},$$

où, si $1 \le p < \infty$,

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \le k} \|\partial^\alpha u\|^p_{L^p} \right)^{1/p};$$

si $p = \infty$,

$$\|u\|_{W^{k,\infty}} = \|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \le k} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty}.$$

Ainsi, $u \in W^{k,p}(\Omega)$ si et seulement si les dérivées généralisées $\partial^\alpha u$ existent et sont dans $L^p(\Omega)$ pour $|\alpha| \le k$. Ou encore : pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \le k$, il existe $g_\alpha \in L^p(\Omega)$ tel que

$$(-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f \partial^\alpha \varphi = \int_\Omega g_\alpha \varphi, \quad \forall\, \varphi \in C^\infty_c(\Omega),$$

et on prend la norme $\left(\sum_{|\alpha| \le k} \|g_\alpha\|^p_{L^p} \right)^{1/p}$ si $1 \le p < \infty$, respectivement $\sup_{|\alpha| \le k} \|g_\alpha\|_{L^\infty}$ si $p = \infty$.
Pour $p = 2$, on écrit $H^k(\Omega)$ à la place de $W^{k,2}(\Omega)$.

On définit

$$W^{k,p}_0(\Omega) = \overline{C^\infty_c(\Omega)}^{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Pour $p = 2$, on pose $H^k_0(\Omega) = W^{k,2}_0(\Omega)$.

On note, pour $1 \le p < \infty$ et q l'exposant conjugué de p, $W^{-k,q}(\Omega) = [(W^{k,p}_0)(\Omega)]^*$. Pour $p = 2$, on note $H^{-k}(\Omega) = [H^k_0(\Omega)]^*$.

5. Pour la simple raison que $f^2 \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

9.10 Remarque. Il est souvent commode de remplacer la norme de $W^{k,p}(\Omega)$ par des normes équivalentes. Quelques exemples de normes :

1. $u \mapsto \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p}$.
2. $u \mapsto \max_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p}$.
3. Si $k=1$: on note $\|\nabla u\|_{L^p} = \|\,|\nabla u|\,\|_{L^p}$.
   Alors $u \mapsto \|u\|_{L^p} + \|\nabla u\|_{L^p}$, respectivement $u \mapsto \max\{\|u\|_{L^p}, \|\nabla u\|_{L^p}\}$, sont des normes équivalentes à la norme usuelle sur $W^{1,p}(\Omega)$.

9.11 Proposition (Exemple fondamental)**.**
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ *borné contenant l'origine.* $u(x) = |x|^{-a}$*, avec* $a \in \mathbb{R}$.
Conclusion. $u \in W^{k,p}$ *si et seulement si* $p(a+k) < n$.

Démonstration. En utilisant l'Exercice 9.54, on trouve que $u \in W^{k,p}$ si et seulement si les dérivées partielles ponctuelles $\partial_p^\alpha u$ d'ordre $\le k$ de u sont dans L^p (et dans ce cas les dérivées ponctuelles et généralisées coïncident). En utilisant le fait que les dérivées ponctuelles de u vérifient

$$\sum_{|\alpha|=j} |\partial_p^\alpha u(x)| \sim |x|^{-a-j},$$

(Exercice 9.58) on trouve

$$u \in W^{k,p} \Longleftrightarrow x \mapsto |x|^{-a-j} \in L^p,\ \forall j \le k \Longleftrightarrow p(a+k) < n. \qquad \square$$

L'inégalité de Poincaré

9.12 Définition. Un ensemble A est borné dans la direction du vecteur $v \ne 0$ s'il existe $M > 0$ tel que : si $w \ne 0$ et $w \perp v$, alors l'ensemble $\{t \in \mathbb{R}; w + tv \in A\}$ est contenu dans un intervalle de longueur M.

9.13 Proposition (Inégalité de Poincaré)**.**
Hypothèse. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ *est borné dans une direction.*
Conclusion. $u \mapsto \|\nabla u\|_{L^p}$ *est une norme équivalente (à la norme usuelle) sur* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Plus généralement, $u \mapsto \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p}$ *est une norme équivalente à la norme usuelle sur* $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Démonstration. Après isométrie, on peut supposer Ω borné dans la direction x_1 (Exercice 9.56). On traite le cas où $k = 1$; le cas général s'obtient par récurrence. On doit montrer l'existence de $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$C_1\|u\|_{W^{1,p}} \le \|\nabla u\|_{L^p} \le C_2\|u\|_{W^{1,p}}, \quad \forall u \in C_c^\infty(\Omega).$$

En utilisant les inégalités $\|\partial_j u\|_{L^p} \le \|\nabla u\|_{L^p} \le \sum_j \|\partial_j u\|_{L^p}$, on voit qu'il suffit d'établir l'inégalité $\|u\|_{L^p} \le C\|\nabla u\|_{L^p}, \quad \forall u \in C_c^\infty(\Omega)$.

On traite le cas où $p < \infty$; le cas $p = \infty$ est similaire. Pour tout $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, soit $I = [a,b] = I(x')$ de longueur $\le M$ tel que $\{t \in \mathbb{R}; (t,x') \in \Omega\} \subset I$. Si $t \in I$, alors l'inégalité de Hölder donne

$$|u(t,x')|^p = \left|\int_a^t \partial_1 u(s,x')\,ds\right|^p \le M^{p-1}\int_a^b |\partial_1 u(s,x')|^p\,ds,$$

d'où

$$\|u\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{I(x')} |u(t,x')|^p \, dt dx' \le M^p \|\partial_1 u\|_{L^p}^p \le M^p \|\nabla u\|_{L^p}^p. \qquad \square$$

Régularisation (II)

Cette partie prolonge la discussion précédente sur la régularisation. Le Théorème 9.18 montre qu'afin d'établir une propriété des fonctions de $W^{k,p}$ on peut commencer par considérer une fonction de $W^{k,p} \cap C^\infty(\Omega)$ (et essayer de passer à la limite en utilisant la densité). De même, le Théorème 9.20 montre que, si Ω est suffisamment régulier, alors on peut commencer par des fonctions de $W^{k,p}(\Omega) \cap C^\infty(\overline{\Omega})$.

9.14 Proposition (Approximation par régularisation)**.**
Hypothèses. $1 \le p < \infty$. $k \in \mathbb{N}$. $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$. *$\rho$ noyau régularisant.*
Conclusion. $u * \rho_\varepsilon \to u$ *dans* $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Pour $|\alpha| \le k$, On a $\partial^\alpha(u * \rho_\varepsilon) = (\partial^\alpha u) * \rho_\varepsilon$ (Lemme 9.5) et $(\partial^\alpha u) * \rho_\varepsilon \to \partial^\alpha u$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Le même raisonnement, combiné avec la Proposition 8.11 donne

9.15 Proposition (Approximation locale par régularisation)**.**
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$. $\omega \sqsubset \Omega$ *et* $\operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega) > 0$. $1 \le p < \infty$. $k \in \mathbb{N}$. $u \in W^{k,p}(\Omega)$. *ρ noyau régularisant.*
Conclusion. $u * \rho_\varepsilon \to u$ *dans* $W^{k,p}(\omega)$.

De même, on a

9.16 Proposition.
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$. $1 \le p < \infty$. $k \in \mathbb{N}$. $u \in W_c^{k,p}(\Omega)$. *ρ noyau régularisant.*
Conclusions. $u * \rho_\varepsilon \to u$ *dans* $W^{k,p}(\Omega)$ *et, pour ε suffisamment petit,* $u * \rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$.
En particulier, $W_c^{k,p}(\Omega) \subset W_0^{k,p}(\Omega)$.

9.17 Proposition.
Hypothèses. $1 \le p < \infty$. $k \in \mathbb{N}$.
Conclusion. $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans* $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Grâce à la Proposition 9.14, il suffit de pouvoir approximer une fonction $u \in C^\infty \cap W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ par des fonctions de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi = 1$ dans $B(0,1)$. Soit $u_j(x) = u(x)\varphi(x/j)$, $j \ge 1$. Alors $u_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et (par application de la règle de Leibniz)

$$\|\partial^\alpha(u_j - u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_\alpha \sum_{\beta \le \alpha} \|\partial^\beta u\|_{L^p(\mathbb{R}^n \setminus B(0,j))} \xrightarrow{j \to \infty} 0 \quad \forall\, |\alpha| \le k. \qquad \square$$

9.18 Théorème (Théorème $H = W$ de Meyers et Serrin)**.**
Hypothèses. $1 \le p < \infty$. $k \in \mathbb{N}$.
Conclusion. $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ *est dense in* $W^{k,p}(\Omega)$.

Démonstration. On considère une *partition de l'unité* dans Ω comme dans la Proposition 8.34, plus spécifiquement une suite $(\varphi_j) \subset C_c^\infty(\Omega)$ et une suite (ω_j) d'ouverts de Ω, telles que :

a) Tout $x \in \Omega$ a un voisinage V tel que V rencontre au plus deux des φ_j.

b) $\operatorname{supp} \varphi_j \subset \omega_j$.

c) $0 \le \varphi_j \le 1$, $\forall j$.

d) $\sum_j \varphi_j = 1$ dans Ω.

Soit $u_j = u\varphi_j \in W_c^{k,p}(\Omega)$ (Exercice 9.60). Soit $\delta > 0$. Soit ε_j tel que $\| \underbrace{(u_j) * \rho_{\varepsilon_j}}_{v_j} - u_j \|_{W^{k,p}} \le 2^{-j}\delta$ et $\operatorname{supp} v_j \subset \omega_j$ (*cf* Proposition 9.16). De par la propriété a), la série $v := \sum v_j$ est dans $C^\infty(\Omega)$ et on a

$$\|v - u\|_{W^{k,p}(\omega)} \le \sum \|v_j - u_j\|_{W^{k,p}(\omega)} < \delta, \quad \forall \omega \Subset \Omega.$$

En appliquant cette inégalité pour une exhaustion (ω_l) de Ω, on trouve $v \in W^{k,p}(\Omega)$ et $\|v - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \le \delta$. □

9.19 Définition. Un ouvert standard $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ est l'un des domaines suivants :

1. $\mathbb{R}^n$.
2. un demi-espace ouvert.
3. un ouvert borné Lipschitzien.

9.20 Théorème.
Hypothèses. $1 \le p < \infty$. $k \in \mathbb{N}$. Ω *ouvert standard.*
Conclusion. $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{k,p}(\Omega)$ *est dense dans* $W^{k,p}(\Omega)$.

Preuve dans le demi-espace. Il suffit d'approcher une fonction $u \in C^\infty \cap W^{k,p}(\Omega)$ par des fonctions de $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{k,p}(\Omega)$. On suppose, par exemple, $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. Soient $\varepsilon > 0$, $\tau_\varepsilon f(t,x') = f(t+\varepsilon, x')$. Soit $u_\varepsilon = \tau_\varepsilon u$. Alors $u_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \cap W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Par ailleurs, on a $\partial^\alpha u_\varepsilon = \tau_\varepsilon(\partial^\alpha u)$. En utilisant l'Exercice 8.38, on trouve $u_\varepsilon \to u$ dans $W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)$. □

9.21 Remarque. On note que la preuve ci-dessus marche encore dans le "cas spécial" où Ω est l'épigraphe d'une fonction localement lipschitzienne et où u est à support compact. Le cas d'un domaine lipschitzien borné s'obtient en considérant une partition de l'unité $(\varphi_j)_{j \in [\![0,N]\!]}$ sur $\overline{\Omega}$ de sorte que $\operatorname{supp} \varphi_0 \Subset \Omega$ et, pour $j \ge 1$, $\operatorname{supp} \varphi_j$ soit contenu dans un voisinage convenable d'un point $x_j \in \partial\Omega$. Si on pose $u_j = u\varphi_j$, alors $u_0 \in C_c^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{k,p}(\Omega)$. Pour $j \ge 1$, après isométrie Ω devient l'épigraphe d'une fonction localement lipschitzienne, et u_j est à support compact. On est donc ramené au cas spécial.

Complétude, dual

9.22 Proposition. $W^{k,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach.*
Si $p = 2$, $H^k(\Omega)$ *est un espace de Hilbert.*
De même pour $W_0^{k,p}(\Omega)$, $W^{k,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, $H_0^k(\Omega)$ *et* $H^k(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Démonstration.

Etape 1. La norme de $H^k(\Omega)$ provient du produit scalaire

$$(u,v) \mapsto \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega \partial^\alpha u\, \partial^\alpha v.$$

Etape 2. Soit (u_j) suite de Cauchy dans $W^{k,p}(\Omega)$. Ceci équivaut à $(\partial^\alpha u_j)$ suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$, $\forall\, |\alpha| \le k$. Soit $v_\alpha \in L^p(\Omega)$ telle que $\partial^\alpha u_j \to v_\alpha$ dans $L^p(\Omega)$. De l'Exercice 9.59, on trouve $\partial^\alpha v_0 = v_\alpha$, et donc $u_j \to v_0$.

Etape 3. Les espaces $W_0^{k,p}(\Omega)$ etc. sont des sous espaces fermés de $W^{k,p}(\Omega)$ ou de $H^k(\Omega)$, donc sont des espaces de Banach ou de Hilbert. □

9.23 Proposition. *L'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est :*

1. *Uniformément convexe (et donc réflexif) si $1 < p < \infty$.*
2. *Séparable si $1 \le p < \infty$.*
3. *De même pour $W_0^{k,p}(\Omega)$ et $W^{k,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Démonstration.

Etape 1. Soit $p \in [1,\infty)$. L'application

$$W^{k,p}(\Omega) \ni u \mapsto \Phi(u) = (\partial^\alpha u)_{|\alpha|\le k}$$

est une isométrie de $W^{k,p}(\Omega)$ vers $X = \Phi(W^{k,p}(\Omega))$, qui est un sous espace de $Y = [L^p(\Omega)]^M$ (avec $M = \#\{\alpha\,;\, |\alpha| \le k\}$). Ici, on munit Y de la norme naturelle[6]

$$\|(f_\alpha)_{|\alpha|\le k}\| = \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|f_\alpha\|_{L^p}^p\right)^{1/p}.$$

Si $p \in (1,\infty)$, alors Y est uniformément convexe.[7] On trouve que X est uniformément convexe. Par isomorphisme isométrique, $W^{k,p}(\Omega)$ l'est aussi. Les espaces $W_0^{k,p}(\Omega)$ et $W^{k,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ le sont aussi, comme sous espaces de $W^{k,p}(\Omega)$.

Etape 2. De ce qui précède, on peut identifier $W^{k,p}(\Omega)$ à un sous espace de Y. Comme $p < \infty$, Y est séparable, d'où $W^{k,p}(\Omega)$ et toutes ses parties le sont aussi. □

9.24 Théorème.
Hypothèse. $1 \le p < \infty$.
Conclusions.

1. *Le dual $W^{-1,p'}(\Omega)$ de $W_0^{1,p}(\Omega)$ est $L^{p'}(\Omega) + \operatorname{div} L^{p'}(\Omega\,;\mathbb{R}^n)$, au sens suivant :*
   a) *Si $T \in (W_0^{1,p}(\Omega))^*$, alors il existe $f \in L^{p'}$ et $F \in L^{p'}(\Omega\,;\mathbb{R}^n)$ tels que $T(\varphi) = (f + \operatorname{div} F)(\varphi)$, $\forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,[8] c'est-à-dire*

$$T(\varphi) = \int_\Omega f\varphi - \int_\Omega F\cdot\nabla\varphi,\ \forall\,\varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{9.8}$$

6. C'est pour cette norme qu'on a le théorème de Riesz "vectoriel" : le dual de $[L^p(\Omega)]^M$ est isomorphe isométrique à $[L^q(\Omega)]^M$.
7. Pour s'en convaincre, il suffit d'appliquer les inégalités de Clarkson composante par composante.
8. Dans le langage des distributions, ceci revient à $T = f + \operatorname{div} F$.

b) Réciproquement, si $f \in L^{p'}$ *et* $F \in L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N)$*, alors*

$$T(u) = \int_\Omega f u - \int_\Omega F \cdot \nabla u,\ \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{9.9}$$

définit un élément de $W_0^{1,p}(\Omega)$*.*

2. *Si on suppose, de plus,* Ω *borné, alors le dual de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *peut aussi être identifié à* $\operatorname{div} L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)$*.*
3. *Si* $1 < p < \infty$*, alors on a*

$$\|T\| = \inf\left\{ \left(\|f\|_{L^{p'}}^{p'} + \sum_{j=1}^{n} \|F_j\|_{L^{p'}}^{p'} \right)^{1/p'} ; \text{on a (9.9)} \right\}; \tag{9.10}$$

une estimation similaire est valide dans le cadre de l'item 2.
Pour $p = 1$*, l'égalité correspondante devient*

$$\|T\| = \inf\left\{ \max\{\|f\|_{L^\infty}, \|F_j\|_{L^\infty}, j = [\![1,n]\!]\} ; \text{on a (9.9)} \right\}. \tag{9.11}$$

Démonstration. Soient X et Φ comme dans la preuve de la Proposition 9.23. Soit $Z = \Phi(W_0^{1,p}(\Omega))$. Soit $U = T \circ \Phi^{-1}$.

Etape 1. 1. b) et $\le$ dans (9.10) et (9.11) sont clairs.

Etape 2. On prouve *1.* a) et $\le$ dans (9.10) et (9.11).
Le théorème de Hahn-Banach donne une extension V de U à Y telle que $\|V\| = \|T\|$. Le théorème de Riesz donne

$$T(\varphi) = V(\varphi, \partial_1\varphi, \ldots, \partial_n\varphi) = \int_\Omega f\varphi - \int_\Omega F \cdot \nabla\varphi, \quad \forall\, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

avec $\|T\| = \|(f,F)\|_{[L^{p'}(\Omega)]^{n+1}}$.

Etape 3. On prouve *3.*
Si Ω, on peut munir $W_0^{1,p}(\Omega)$ de la norme équivalente $u \mapsto \|\nabla u\|_{[L^p(\Omega)]^n}$ (Proposition 9.13). On procède comme ci-dessus, mais avec $X = [L^p(\Omega)]^n$ et $\Phi(u) = \nabla u$. □

Extension

Le résultats de cette partie permettent de ramener les raisonnements dans un domaine à des raisonnements sur $\mathbb{R}^n$ tout entier.

9.25 Proposition.

Hypothèses. $1 \le p < \infty$. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. $\tilde{u} = \begin{cases} u, & \text{dans } \Omega \\ 0, & \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$.

Conclusion. $\partial_j \tilde{u} = \begin{cases} \partial_j u, & \text{dans } \Omega \\ 0, & \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$.

Démonstration. C'est clair si $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Le cas général suit par passage à la limite. □

9.26 Théorème (Extension)**.**
Hypothèses. $1 \le p \le \infty$. $k \in \mathbb{N}^*$. Ω *borné Lipschitzien.* $U \sqsubset \mathbb{R}^n$ *tel que* $\Omega \Subset U$.
Conclusion. Il existe un opérateur d'extension $P : W^{k,p}(\Omega) \to W_c^{k,p}(U)$ *tel que :*

a) $(Pu)_{|\Omega} = u$, $\forall\, u \in W^{k,p}(\Omega)$.

b) P *linéaire.*

c) P *continu.*

Même résultat si $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ *et* $U = (-1,\infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$.
De plus, dans les deux cas on peut choisir P *indépendant de* k *et* p.

Preuve pour $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, $U = (-1,\infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$ *et* $k = 1$.
Etape 1. On construit un opérateur d'extension $R : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.
Soit $Ru(x) = \begin{cases} u(x), & \text{si } x_n > 0 \\ u(x', -x_n), & \text{si } x_n < 0 \end{cases}$. On vérifie aisément que, si $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ et $j \in [\![1, n-1]\!]$, alors $\partial_j Ru$ est l'extension par parité dans la variable x_n de $\partial_j u$ à $\mathbb{R}^n$. De même, $\partial_n Ru$ est l'extension par imparité dans la variable x_n de $\partial_n u$ à $\mathbb{R}^n$. On trouve que R est (linéaire et) continu de $W^{1,p}(\Omega)$ vers $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Etape 2. On diminue le support de Ru.
Soit $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp}\zeta \in (-1,\infty)$ et $\zeta = 1$ dans $[0,\infty)$. Alors $Pu(x', x_n) = \zeta(x_1) Ru(x', x_n)$ convient. □

9.27 Remarque. On peut adapter l'argument présenté dans la Remarque 9.21 pour obtenir un P lorsque Ω est borné lipschitzien. En effet, il suffit de traiter le cas spécial où u est supportée au dessus du graphe de la fonction lipschitzienne $\psi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$. Dans ce cas, l'extension

$$Pu(x', x_n) = \begin{cases} u(x', x_n), & \text{si } x_n > \psi(x') \\ u(x', 2\psi(x') - x_n), & \text{si } x_n \le \psi(x') \end{cases}$$

envoie $W^{1,p}(\Omega)$ sur $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Puis la multiplication par une fonction plateau convenable permet d'obtenir une extension dans $W_c^{1,p}(U)$. Il est bien plus difficile (et ne sera pas utilisé ici) d'obtenir une extension indépendante de k et p ; voir [19, Theorem 5, p. 181].

Plongements

Pour les preuves des résultats de cette partie, voir [3, Section 9.3].

9.28 Théorème (Injections de Sobolev. Sobolev si $p > 1$; Gagliardo, Nirenberg si $p = 1$)**.**
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ *domaine standard.* $1 \le p < n$.
Conclusion. On a $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{np/(n-p)}(\Omega)$.

9.29 Remarque. Traditionnellement, si $1 \le p < n$, on note $p^* = \dfrac{np}{n-p}$. On a donc $W^{1,p} \hookrightarrow L^{p^*}$.

9.30 Théorème.
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ *domaine standard.*
Conclusion. On a $W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall\, p \le q < \infty$.

9.31 Théorème (Injections de Morrey).
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ *domaine standard.* $n < p < \infty$.
Conclusion. On a $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1-n/p}(\Omega)$.

9.32 Théorème (Rellich-Kondratchov).
Hypothèses. Ω *borné lipschitzien.*
Conclusion. L'inclusion $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,p}(\Omega)$ *est compacte.*
Variante :
Hypothèse. Ω *borné.*
Conclusion. L'inclusion $W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,p}(\Omega)$ *est compacte.*

9.33 Corollaire.
Hypothèse. Ω *borné.*
Conclusion. L'inclusion $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ *est compacte.*

Trace

9.34 Théorème (Trace).
Hypothèses. $1 \le p < \infty$. Ω *ouvert standard.*
Conclusion. L'application

$$C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega) \ni u \overset{\mathrm{tr}}{\longmapsto} u_{|\partial\Omega} \in C^\infty(\partial\Omega)$$

admet une (unique) extension linéaire et continue $\mathrm{tr} : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$.
De même, l'application

$$C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{1,1}_{loc}(\Omega) \ni u \overset{\mathrm{tr}}{\longmapsto} u_{|\partial\Omega} \in C^\infty(\partial\Omega)$$

admet une (unique) extension linéaire et continue $\mathrm{tr} : W^{1,1}_{loc}(\Omega) \to L^1_{loc}(\partial\Omega)$.

9.35 Proposition (Intégration par parties).
Hypothèses. Ω *ouvert lipschitzien.* $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$.
Conclusion. On a

$$\int_\Omega u\,(\partial_j\varphi) = \int_{\partial\Omega} \nu_j(\mathrm{tr}\,u)\,\varphi - \int_\Omega (\partial_\mathrm{j} \mathrm{u})\,\varphi, \quad \forall\, \varphi \in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(\mathbb{R}^\mathrm{n}). \tag{9.12}$$

9.36 Théorème.
Hypothèses. Ω *ouvert standard.* $1 \le p < \infty$.
Conclusion. Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$*, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
2. $\mathrm{tr}\,u = 0$.
3. *L'application* $\tilde{u} = \begin{cases} u, & \textit{dans } \Omega \\ 0, & \textit{dans } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$ *appartient à* $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

9.37 Remarque. Par conséquent, si Ω est standard alors $W_0^{1,p}(\Omega) \ne W^{1,p}(\Omega)$. Autrement dit, $C_c^\infty(\Omega)$ n'est pas dense dans $W^{1,p}(\Omega)$, contrairement à ce qui se passe dans $L^p(\Omega)$ si $p < \infty$.

Si Ω n'est pas suffisamment régulier, on peut avoir $W_0^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega)$. Exemple : $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $n \ge 2$, $1 \le p \le n$ (Exercice 9.65).

9.38 Théorème (Gagliardo)**.**
Hypothèses. $1 < p < \infty$. Ω *ouvert standard.*
Conclusion. L'image de l'application tr *est l'espace*

$$W^{1-1/p,p}(\partial\Omega) := \left\{ f \in L^p(\partial\Omega) ; \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+p-2}}\, d\mathscr{H}^{n-1}(x)\, d\mathscr{H}^{n-1}(y) < \infty \right\}.$$

Hypothèses. $p = 1$. Ω *ouvert standard.*
Conclusion. L'image de l'application tr *est* $L^1(\partial\Omega)$.

Pour $p = 2$, l'espace $W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ est noté $H^{1/2}(\Omega)$.

Règle de la chaîne

9.39 Théorème (Règle de la chaîne pour des fonctions C^1)**.**
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$. $F \in C^1(\mathbb{R})$. $F(0) = 0$. *F lipschitzienne.* $1 \le p \le \infty$. $u \in W^{1,p}(\Omega)$.
Conclusions. $F(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ *et*

$$\partial_j[F(u)] = F'(u)\partial_j u, \quad j \in [\![1,n]\!] \quad \text{(règle de la chaîne).} \tag{9.13}$$

(Pour cette partie, l'hypothèse $F(0) = 0$ *est inutile si* $|\Omega| < \infty$.*)*
Si, de plus, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *alors* $F(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

9.40 Théorème (de la Vallée Poussin)**.**
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$. $u \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$. $A \subset \mathbb{R}$ *borélien négligeable.*
Conclusion. $\nabla u = 0$ *dans l'ensemble* $\{x \in \Omega ; u(x) = A\}$.

9.41 Remarque. Comme une conséquence de ce qui précède, si $u \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$ et F est lipschitzienne, alors on peut définir le produit $F'(u)\partial_j u$. En effet, soit

$$A = \{t \in \mathbb{R} ; F \text{ n'est pas dérivable en } t\}.$$

Alors A est borélien et (par le théorème de Rademacher Théorème 8.36) négligeable. Il s'ensuit que la fonction

$$\Omega \ni x \mapsto \begin{cases} F'(u(x))\partial_j u(x), & \text{si } u(x) \notin A \\ 0, & \text{si } u(x) \in A \end{cases}$$

est bien définie (p. p.) et ne dépend pas du choix de u dans la classe d'équivalence. Cette fonction sera désignée en bref comme $F'(u)\partial_j u$.

9.42 Théorème (Règle de la chaîne pour des fonctions lipschitiziennes)**.**
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$. *F lipschitzienne.* $F(0) = 0$. $1 \le p \le \infty$. $u \in W^{1,p}(\Omega)$.
Conclusions. $F(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ *et* (9.13) *est valable. (Pour cette partie, l'hypothèse* $F(0) = 0$ *est inutile si* $|\Omega| < \infty$.*)*
Si, de plus, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *alors* $F(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
Cas particulier : si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *alors* $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$ *et* $\partial_j|u| = sgn\, u \partial_j u$. *Si, de plus,* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *alors* $|u| \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Le cas de la dimension un de l'espace

Dans cette section, on prend $\Omega = I \sqsubset \mathbb{R}$, avec I intervalle ouvert.

La description des espaces de Sobolev en dimension 1 est une conséquence immédiate de la Proposition 9.4.

9.43 Théorème. *Si $x_0 \in \bar{I}$, alors on a*

$$W^{k,p}(I) = \{u \in C^{k-1}(I); u^{(j)} \in L^p(I), \forall j \le k-1 \text{ et il existe } f \in L^p(I), C \in \mathbb{R} \text{ tels que}$$
$$u^{(k-1)}(x) = C + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\}.$$

9.44 Corollaire. *On a $W^{k,p}(I) \hookrightarrow C^{k-1}(\bar{I})$, avec inclusion continue.*

9.45 Corollaire (Théorème de différentiabilité Lebesgue)**.**
Hypothèse. $u \in W^{1,1}_{loc}(I)$.
Conclusions. u est dérivable (au sens ponctuel) presque partout, et $u'_p = u'$ p. p.

Le résultat suivant relie la dérivabilité à la continuité.

9.46 Théorème (Lebesgue)**.**
Hypothèse. I borné.
Conclusion. On a $u \in W^{1,1}$ ssi u est absolument continue. [9]

9.47 Corollaire. *Les fonctions lipschitziennes d'une variable sont dérivables p. p.*

Le résultat suivant caractérise l'espace $W_0^{1,p}(I)$.

9.48 Théorème. *Les propriétés suivantes sont équivalentes, pour $1 \le p < \infty$:*

1. *$u = 0$ on ∂I.*
2. *$u \in W_0^{1,p}(I)$.*
3. *L 'application $\tilde{u} = \begin{cases} u, & \text{dans } I \\ 0, & \text{dans } R \setminus I \end{cases}$ appartient à $W^{1,p}(\mathbb{R})$.*

Le cas $p = \infty$

9.49 Théorème. *On a $u \in W^{1,\infty}$ si et seulement si u est bornée et il existe $C > 0$ tel que*

$$|u(x) - u(y)| \le C|x - y| \text{ si } [x, y] \subset \Omega. \tag{9.14}$$

Dans le cas spécial où Ω est convexe, ceci équivaut à u bornée et lipschitzienne. Dans ce cas,

$$\|u\|_{W^{1,\infty}} = \max\left\{\|u\|_{L^\infty}, |u|_{Lip}\right\}.$$

Plus généralement, on a $u \in W^{k,\infty}$ si et seulement si $u \in C_b^{k-1}$ et $D^{k-1}u \in W^{1,\infty}$. Dans le cas particulier d'un ensemble convexe, on a

$$\|u\|_{W^{k,\infty}} = \max\left\{\max_{|\alpha| \le k-1} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty}, \max_{|\alpha| = k} |\partial^\alpha u|_{Lip}\right\}.$$

9. Une fonction $u : I \to \mathbb{R}$ est absolument continue si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots x_k < y_k$ sont des points de I tels que $\sum(y_j - x_j) < \delta$, alors $\sum |u(y_j) - u(x_j)| < \varepsilon$.

Si Ω est standard, on a

$$W^{k,\infty}(\Omega) = \{u \in C_b^{k-1}\,;\, D^{k-1}u \text{ est lipschitzienne}\},$$

et

$$\|u\|_{W^{k-1,\infty}} \sim \|u\|_{C^{k-1}} + \sum_{|\alpha|=k-1} |\partial^\alpha u|_{Lip}.$$

Exercices

9.50 Exercice. *

1. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $\partial_j f$ (au sens généralisé) existe et vaut $\partial_j f$ (au sens usuel). Plus généralement, si $P(\partial)$ est d'ordre m et $f \in C^m(\Omega)$, alors $P(\partial)f$ au sens généralisé existe et vaut $P(\partial)f$ au sens usuel.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 par morceaux. [10] Montrer que la dérivée usuelle de f coïncide avec la dérivée généralisée.
3. Calculer la dérivée généralisée de $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x|$.
4. Montrer que la fonction sgn n'a pas de dérivée généralisée dans $\mathbb{R}$.

9.51 Exercice. * Montrer que l'égalité $f = \partial_j g$ est équivalente à la condition (apparemment plus forte)

$$-\int_\Omega f\,\partial_j\varphi = \int_\Omega g\varphi, \quad \forall\, \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

9.52 Exercice. *
Hypothèses. $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. $u(x,t) = \dfrac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t)) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t} g(y)\,dy$.
Conclusion. $\Box u = 0$ au sens généralisé.
[Indication : commencer par remplacer f et g par $f * \rho_\varepsilon$ et $g * \rho_\varepsilon$, avec ρ noyau régularisant dans $\mathbb{R}$.]

9.53 Exercice.
Hypothèses. $I \sqsubset \mathbb{R}$ intervalle. $a \in I$. $g \in L^1_{loc}(I)$. $C \in \mathbb{R}$. $f(x) := C + \displaystyle\int_a^x g(t)\,dt$.
Conclusions. $f \in L^1_{loc}(I)$. $g' = f$.

9.54 Exercice. *
Hypothèses. $x_0 \in \Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$. $n \geq 2$. $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. $f \in C^1(\Omega \setminus \{x_0\})$. $j \in [\![1, n]\!]$.
Conclusion. La dérivée généralisée $\partial_j f$ existe si et seulement si $\partial_j f$ (usuelle) est localement intégrable sur Ω, et dans ce cas les deux dérivées coïncident.

Application : étudier l'existence de $\partial_j f$ si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{|x|^a}$, $a \in \mathbb{R}$.

9.55 Exercice. *
Hypothèses. $\omega, \Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$. $\Phi : \omega \to \Omega$ C^1-difféomorphisme. $f_j \to f$ dans $L^1_{loc}(\Omega)$.
Conclusion. $f_j \circ \Phi \to f \circ \Phi$ dans $L^1_{loc}(\omega)$.

---

10. C'est-à-dire : $f \in C(\mathbb{R})$ et il existe une suite discrete et croissante (a_j), éventuellement finie, telle que $f \in C^1([a_j, a_{j+1}])$. Si la suite (a_j) a un premier terme a_m, on ajoute la condition $f \in C^1((-\infty, a_m])$. De même, si (a_j) a un dernier terme a_m, on impose $f \in C^1([a_m, +\infty))$.

9.56 Exercice. * Cet exercice est la suite de la Proposition 9.8.

Soient $\omega,\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ et $\Phi : \omega \to \Omega$ un C^1-difféomorphisme. Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ ayant des dérivées généralisées du premier ordre. Soit $\widetilde{f} := f \circ \Phi$ sur ω. Rappelons que

$$\partial_j \widetilde{f} = \sum_k [(\partial_k f)\circ \Phi]\partial_j \Phi_k. \tag{9.15}$$

1. Cas particuliers.
   a) Si $A \in \mathscr{O}(n)$, montrer que $|\nabla(f\circ A)| = |(\nabla f)\circ A|$.
   b) Si Φ est bi-lipschitzienne, [11] alors $f \mapsto f\circ\Phi$ est un homéomorphisme de $W^{1,p}(\Omega)$ vers $W^{1,p}(\omega)$.

En utilisant le théorème de Rademacher et le théorème du changement de variables (Théorèmes 8.36 et 8.21), montrer que (9.15) reste vraie sous l'hypothèse plus faible que Φ est un homéomorphisme localement bi-lipschitzien. [12]

9.57 Exercice.
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$. Ω connexe. $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. f localement constante. [13]
Conclusion. f constante.

9.58 Exercice. * Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$. f est m-homogène si $f(tx) = t^m f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $\forall\, t>0$. On suppose $f \not\equiv 0$.

1. Montrer qu'il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que $C_1 r^m \le \max_{S(0,r)} |f(x)| \le C_2 r^m$.
2. Montrer que $\partial^\alpha f$ est $(m-|\alpha|)$-homogène.
3. En calculant $\lim_{t\to 1} \dfrac{f(tx)-f(x)}{t}$, montrer l'identité d'Euler $x\cdot\nabla f(x) = mf(x)$, $\forall\, x\neq 0$.
4. En déduire l'identité $\sum_{|\alpha|=k} x^\alpha \partial^\alpha f(x) = m(m-1)\dots(m-|\alpha|+1)f(x)$, $\forall\, x\neq 0$.
5. On suppose $m \not\in \mathbb{N}$. De ce qui précède, déduire l'existence de $C_{1,k}$ et $C_{2,k}$ tels que
$$C_{1,k} r^{m-k} \le \max_{S(0,r)} \sum_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha f| \le C_{1,k} r^{m-k}, \quad \forall\, r>0.$$
6. Dans le cas particulier où $f(x) = |x|^m$ (avec $m \not\in \mathbb{N}$), améliorer la conclusion du point précédent à
$$C_{1,k}|x|^{m-k} \le \sum_{\alpha|=k} |\partial^\alpha f(x)| \le C_{2,k}|x|^{m-k}, \quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}.$$

9.59 Exercice. *
Hypothèses. $f_j, f, g_j, g \in L^1_{loc}(\Omega)$. $\alpha \in \mathbb{N}^n$. $g_j = \partial^\alpha f_j$. $f_j \to f$ dans $L^1_{loc}(\Omega)$. $g_j \to g$ dans $L^1_{loc}(\Omega)$.
Conclusion. $\partial^\alpha f = g$.

Cas particulier : celui où $f_j \to f$, $g_j \to g$ dans $L^p(\Omega)$.

9.60 Exercice (Règle de Leibniz). *
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$. $u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$. $\varphi \in C^k(\Omega)$.
Conclusions. $\varphi u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ et

$$\partial^\alpha(\varphi u) = \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta}\varphi\, \partial^\beta u, \quad \forall\, |\alpha| \le k.$$

Même conclusion sous l'hypothèse plus faible $\varphi \in W^{k,\infty}_{loc}(\Omega)$.

---

11. C'est-à-dire Φ et Φ^{-1} sont lipschitziennes.
12. C'est-à-dire Φ et Φ^{-1} sont localement lipschitziennes.
13. C'est-à-dire, tout $x_0 \in \Omega$ a un voisinage ouvert $\omega \sqsubset \Omega$ tel que $f = C$ dans ω. A priori, C dépend de x.

9.61 Exercice. * Soient $u \in W^{k,p}(\Omega)$ et $h \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\tau_h u \in W^{k,p}(h+\Omega)$, et que $\partial^\alpha(\tau_h u) = \tau_h(\partial^\alpha u)$, $\forall\, |\alpha| \le k$.

9.62 Exercice. *
Hypothèse. $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. ρ noyau régularisant.

1. Montrer que
$$\|\tau_h u - u\|_{L^p} \le |h| \|\nabla u\|_{L^p}, \ \forall\, h \in \mathbb{R}^n.$$
2. En déduire que $\|u * \rho_\varepsilon - u\|_{L^p} \le \varepsilon \|\nabla u\|_{L^p}$.

9.63 Exercice. *
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ borné lipschitzien. $u \in C^1(\overline{\Omega})$.
Conclusion. $\operatorname{tr} u = u_{|\partial\Omega}$.
Même conclusion si $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

9.64 Exercice. * Soient $1 \le p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$ et $u \in W^{k,p}(\Omega)$. On suppose $\operatorname{supp} u \subset F \subset \Omega$, avec $\operatorname{dist}(F, \partial\Omega) > 0$. Montrer que $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$.
[Indication : régulariser u.]

9.65 Exercice. * Soient $n \ge 2$ et $1 \le p \le n$.

1. Construire une suite $\varphi_j \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ telle que :
   a) Pour tout j, $\varphi_j = 1$ dans un voisinage de l'origine.
   b) $\operatorname{supp} \varphi_j \to 0$.
   c) $\varphi_j \to 0$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

   [Essayer avec des fonctions de la forme $\varphi_j(x) = f_j(|x|)$. Le cas $p = n$ est un peu plus difficile.]
2. Soient $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $f \in W^{1,p}(\Omega)$. Construire une suite $(f_j) \subset W^{1,p}(\Omega)$ telle que :
   a) $f_j \to f$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.
   b) $f_j = 0$ au voisinage de Ω.
3. En déduire que $W_0^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega)$.

Solution des exercices

Exercice 9.53. g est continue, donc localement intégrable. Soit $\varphi \in C_c^\infty(I)$. Quitte à changer a, on peut supposer $\operatorname{supp} \varphi \subset [a,b] \Subset I$. On a alors

$$-\int_I f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_a^b \int_a^x g(t)\varphi'(x)\,dt\,dx = -\int_a^b g(t)\left(\int_t^b \varphi'(x)\,dx\right)dt$$
$$= \int_a^b g(t)\varphi(t)\,dt = \int_I g(x)\varphi(x)\,dx.$$

L'application du théorème de Fubini est justifiée par la majoration

$$|g(t)\varphi'(x)| \le C|g(t)|\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \in L^1([a,b]^2).$$

Exercice 9.57. Soient $x_0 \in \Omega$, $R > 0$ et C tels que $f = C$ dans $B(x_0, R)$. Soit

$$M = \{x \in \Omega\,;\, f = C \text{ au voisinage de } x\}.$$

Clairement, M est ouvert. Pour conclure, il suffit de montrer que M est un fermé de Ω. Soient $(x_j) \subset M$ et $x \in \Omega$ tels que $x_j \to x$. Soit $r > 0$ tel que $f = D$ dans $B(x, r)$. Soient j tel que $x_j \in B(x, r)$ et ρ tel que $f = C$ dans $B(x_j, \rho)$. Alors $C = D$ p. p. dans $B(x, r) \cap B(x_j, \rho)$ qui est de mesure > 0, d'où $C = D$. On trouve $x \in M$.

Commentaires