T.D. 2 : Probabilités élémentaires

Exercice 1 :

On choisit 3 cartes dans un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'avoir :

a) 3 as ?
b) au moins 2 as ?
c) 2 rois et 1 dame ?
d) au moins 2 rois et au moins une dame ?
e) au moins un valet et au plus un as ?
f) un roi et un pique ?

Exercice 2 :

Dans une urne il y a 4 boules vertes, 2 bleues, et 3 rouges.
Quelle est la probabilité de tirer :

a) une de chaque couleur en tirant une poignée de 3 ?
b) d'abord une verte, puis, après remise, une bleue, puis après remise une rouge ?
c) une de chaque couleur en tirant les boules une à une avec remise ?
d) k vertes, (avec k=0, puis k=1, puis k=2, puis k=3) avec la règle: « on tire une boule, si elle est verte on la garde, sinon on la remet », sachant que l'on fait 3 tirages ?

Exercice 3 :

Vous montez dans un avion qui a 2 réacteurs sur chaque aile.
Chaque réacteur a 2% de chances de tomber en panne, mais l'avion peut continuer à voler avec au moins un réacteur sur chaque aile. Quelle chance avez vous d'arriver à bon port ?

Exercice 4 :

On lance 2 dés. Quelle est la probabilité d'avoir:

a) un double ?
b) un 2 et un 5 ?
c) une somme égale à 5 ? à7 ?
d) 2 nombres qui se suivent ?

TD 2. Probabilités élémentaires

Exercice 1

L'univers est constitué des mains de 3 cartes. Pas d'ordre, pas de répétition.

$$\mathrm{Card}(\Omega) = C_{32}^{\square} = 4960$$

(a) paquet 1 : les as $n_1 = 4, p_1 = \square \rightsquigarrow C_4^{\square}$
paquet 2 : les cartes restantes $n_2 = 28, p_2 = \square \rightsquigarrow C_{28}^0$

$$p(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{C_4^{\square} \cdot C_{28}^{\square}}{C_{32}^{\square}} = 4/4960$$

(b) On utilise les mêmes paquets et les sous-cas sont :

p_1	p_2	nombre de solutions
2	0	$C_4^{\square} \cdot C_{28}^{\square} = 168$
3	0	$C_4^{\square} \cdot C_{28}^{\square} = 4$

On fait la somme :

$$168 + 4 = 172$$

Finalement la propabilité d'avoir au moins deux as est de 172/4960.

(c) paquet 1 : les rois $n_1 = \square, p_1 = 2$
paquet 2 : les dames $n_2 = 4, p_2 = \square$
paquet 3 : les cartes restantes $n_3 = \square, p_3 = 0$ Le nombre de solution est donc :

$$C_{\square}^{2} \cdot C_4^{\square} \cdot C_{\square}^{0} = 24.$$

La probabilité d'avoir deux rois et une dame est donc de 24/4960.

(d) Comme on n'a que trois cartes, c'est le même cas que la question c).

(e) paquet 1 : les valets $n_1 = 4, p_1 \geq 1$
paquet 2 : les as $n_2 = 4, p_2 \leq 1$
paquet 3 : les cartes restantes $n_3 = 24, p_3 =?$

On fait un tableau des sous-cas :

p_1	p_2	p_3	nombre de solutions
1	1	1	$C_4^{\square} \cdot C_4^{\square} \cdot C_{24}^{\square} = 384$
1	0	2	$C_4^{\square} \cdot C_4^{\square} \cdot C_{24}^{\square} = 1104$
2	1	0	$C_4^{\square} \cdot C_4^{\square} \cdot C_{24}^{\square} = 24$
2	0	1	$C_4^{\square} \cdot C_4^{\square} \cdot C_{24}^{\square} = 144$
3	0	0	$C_4^{\square} \cdot C_4^{\square} \cdot C_{24}^{\square} = 4$

Au total on a

$$384 + 1104 + 24 + 144 + 4 = 1660$$

mains. La probabilité d'avoir au moins un valet et au plus un as est donc de 1660/4960.

(f) Attention au roi de pique!!!

paquet 1 : le roi de pique $n_1 = 1$
paquet 2 : les autre rois $n_2 = 3$
paquet 3 : les autres piques $n_3 = 7$
paquet 4 : les cartes restantes $n_4 = 32 - 1 - 3 - 7 = 21$

On fait le tableau des cas :

p_1	p_2	p_3	p_4	nombre de solutions
1	0	0	2	$C_4^{\square} \cdot C_4^{\square} \cdot C_7^{\square} \cdot C_{21}^{\square} = 840$
0	1	1	1	$C_4^{\square} \cdot C_4^{\square} \cdot C_7^{\square} \cdot C_{21}^{\square} = 588$

En tout : $840 + 588 = 1428$ mains donc la probabilité d'avoir un roi et un pique est de 1428/4960

Exercice 2

On a $n_1 = 4$ boules vertes, $n_2 = 2$ boules bleues et $n_3 = 3$ boules rouges. On note p_1, p_2, p_3 les nombres respectifs de boules vertes, bleues, rouges qu'on ramasse.

(a) Il n'y a pas d'ordre et pas de répétition. Ici, $n = 9$,$p = 3$ donc :

$$\mathrm{Card}(\Omega) = \square = 84.$$

On note

$$A = \{p_1 = 1, p_2 = 1, p_3 = 1\}$$

les poignées avec une boule de chaque couleur. Alors :

$$\mathrm{Card}(A) = C_4^{\square} \cdot C_2^{\square} \cdot C_3^{\square} = 24.$$

La probabilité est donc :

$$p(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}.$$

(b) Maintenant il y a a ordre et répétition. Ici, $n = 9, p = 3$ donc :

$$\mathrm{Card}(\Omega) = \square = 729.$$

Les tirages sont indépendants. Pour chaque tirage de une boule il n'y a pas d'ordre, pas de répétition (puisqu'on qu'une boule!) et donc la probabilité de tirer une couleur est le nombre de boules de cette couleur (nombre de cas favorables) sur le nombre de boules total (nombre total de cas). Donc $p(V) = \square/9$, $p(B) = \square/9$ et $p(R) = \square/9$.

Pour la suite de trois tirages, par indépendance :

$$p(V, B, R) = p(V) \cdot p(B) \cdot p(R) = 24/729.$$

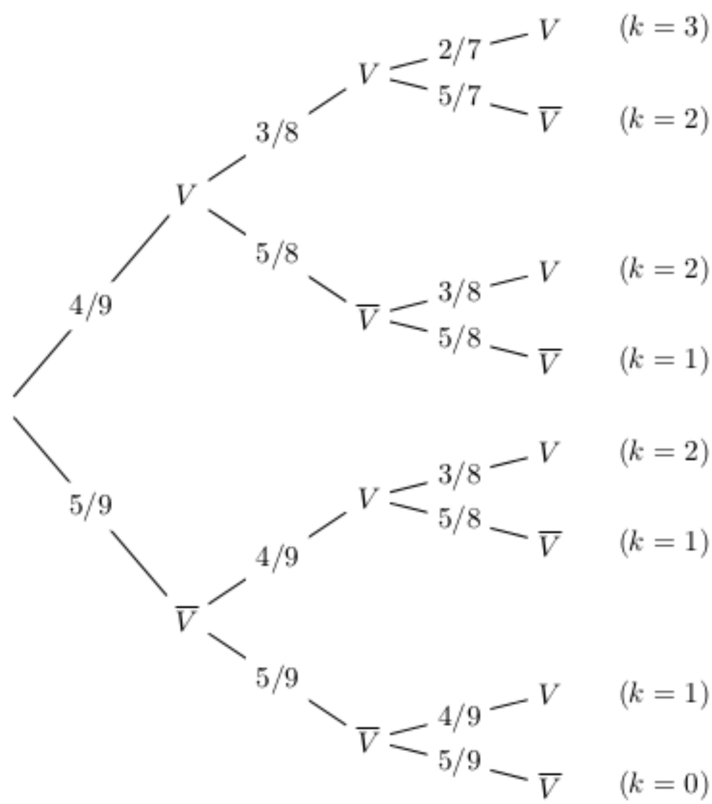
(c) Comme les trois tirages sont indépendants, la probabilité de R, V, B dans n'importe quel ordre est toujours la même, égale à proba :

$$p(V) \cdot p(B) \cdot p(R)$$

Le nombre d'ordres qu'on peut donner à ces trois couleurs, c'est $\boxed{}$: on choisit la première puis la deuxième, puis on n'a plus de choix. Finalement : la proba. totale est :

$$\boxed{} * (24/729) = 144/729.$$

(d) Les tirages ne sont plus indépendants. Proba conditionnelles. On fait donc un arbre



$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(k=3) &= 4/9 \cdot 3/8 \cdot 2/7 \\
&= 1/21 \simeq 0,05 \\
\mathbb{P}(k=2) &= 4/9 \cdot 3/8 \cdot 5/7 + 4/9 \cdot 5/8 \cdot 3/8 + 5/9 \cdot 4/9 \cdot 3/8 \\
&= 955/3024 \simeq 0,32 \\
\mathbb{P}(k=1) &= 4/9 \cdot 5/8 \cdot 5/8 + 5/9 \cdot 4/9 \cdot 5/8 + 5/9 \cdot 5/9 \cdot 4/9 \\
&= 5425/11664 \simeq 0,47 \\
\mathbb{P}(k=0) &= 5/9 \cdot 5/9 \cdot 5/9 \\
&= 125/729 \simeq 0,17
\end{aligned}$$

Exercice 3

Il est plus facile de calculer la probabilité de l'évenement complémentaire : l'avion tombe en panne. Les cas d'accidents sont : les deux réacteurs d'une même aile tombent en panne en même temps.

Le fonctionnement des réacteurs est indépendant donc on peut considérer les deux ailes séparément, et sur une aile la probabilité que les deux moteurs tombent en panne en même temps est :

$$\begin{aligned} p\big(M_1 \text{ en panne et } M_2 \text{ en panne}\big) &= p(M_1 \text{ en panne}) * p(M_2 \text{ en panne}) \\ &= \boxed{} * \boxed{} \\ &= \tfrac{4}{10000}. \end{aligned}$$

Pour finir, on chercher la probabilité de : aile 1 en panne OU aile 2 en panne. Ce ne sont pas des événements disjoints! Notons A_1 l'aile 1 tombe en panne et A_2 l'aile 2 tombe en panne. La formule pour obtenir cette probabilité est donc :

$$p(A_1 \text{ ou } A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 \text{ et } A_2)$$

Il nous manque $p(A_1 \text{ et } A_2)$, qui est la probabilité que les quatres réacteurs soient en panne en même temps, soit : $\boxed{}$. Finalement, la probabilité de tomber en panne est :

$$2 * (2/100)^2 - \boxed{} \simeq \frac{8}{10000}.$$

Donc la probabilité de ne pas tomber en panne est :

$$\frac{9992}{10000}.$$

Exercice 4

Les résultats des deux dés sont indépendants, donc on peut considérer deux lancers successifs. Pour un dé :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

et les résultats sont équiprobables, donc de probabilité $\boxed{}$. Le résultat de deux lancers est un couple ordonné (x, y) où $x \in \Omega, y \in \Omega$, et par indépendance, chaque couple a une probabilité $\boxed{} = 1/36$ d'apparaître. Il suffit maintenant de compter les couples qui donnent les cas qui nous intérêssent.

a) Il y a $\boxed{}$ doubles. Donc la proba est $\boxed{}/36$

b) Il y a deux couples ordonnés : $(2, 5)$ et $(5, 2)$ donc la proba est $\boxed{}$

c) Il y a $\boxed{}$ couples ordonnés dont la somme fait 5 donc $\boxed{}/36$ et $\boxed{}$ dont la somme fait 7 donc $\boxed{}/36$.

d) Il y a $\boxed{}$ tels couples, donc la probabilités est $\boxed{}/36$.