

Densité, COdensité et formes de métrique de l'univers

Lettre à Marc

Lyon Janvier 2005

1 Introduction

Dans de précédents travaux, nous avons étudié différentes formes de la métrique d'un modèle d'univers de Friedmann-Lemaître, cf. ([1]), ([2]) et ([3]). Nous nous proposons d'étudier d'une part le tenseur impulsion-énergie associé à ces différentes formes et d'autre part de revenir brièvement sur l'équivalence entre les cosmologies newtonienne et einsteinienne.

2 Les formes de métriques

Soit donc un modèle de Friedmann-Lemaître, avec sa métrique de Robertson-Walker

$$ds^2 = d\tau^2 - R^2(\tau) [dx^2 + f_k^2(x) d\omega^2], \quad (1)$$

où $f_k(x) = x, \sin(x), \sinh(x)$ suivant le signe $k = 0, 1$ or -1 de la courbure spatiale.

Puis avec la forme localement inertielle "ici et aujourd'hui" :

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{R^2(\tau)}{R^2(\tau_0)} \left(d\rho^2 + R^2(\tau_0) f_k^2\left(\frac{\rho}{R(\tau_0)}\right) d\omega^2 \right). \quad (2)$$

Passons maintenant à la forme intermédiaire avec un terme croisé :

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{[dr - r H(\tau) d\tau]^2}{1 + [1 - \Omega(\tau)] H^2(\tau) r^2} - r^2 d\omega^2. \quad (3)$$

Prenons maintenant la forme locale (forme de Birkhoff généralisée) :

$$ds^2 = (1 + q(t) H^2(t) r^2 + [\Omega(t) + q(t)] \mathcal{O}(4)) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \Omega(t) H^2(t) r^2} - r^2 d\omega^2, \quad (4)$$

et enfin la "forme osculatrice statique" locale :

$$ds^2 \approx [1 + q_0 (H_0 r)^2] dt^2 - [1 - \Omega_0 (H_0 r)^2]^{(-1)} dr^2 - r^2 d\omega^2. \quad (5)$$

Il est à remarquer que cette forme osculatrice dépend et de l'invariant fondamental c (la vitesse de la lumière dans le vide (de Minkowski) et des valeurs, hic et nunc, des trois paramètres cosmologiques H_o , q_o et Ω_o ; elle est donc bien adaptée pour étudier l'influence de l'univers sur un phénomène local dans une bonne approximation. Mais on aurait pu prendre une autre "forme osculatrice statique" locale directement à partir de la forme croisée :

$$ds^2 \approx d\tau^2 - \frac{[dr - r H_o d\tau]^2}{1 + [1 - \Omega_o] H_o^2 r^2} - r^2 d\omega^2. \quad (6)$$

Cette forme ne dépend pas explicitement de q_o mais elle a l'avantage de s'exprimer avec le temps cosmologique τ et non pas avec le temps annexe t . Nous n'avons pas parlé de cette forme dans notre article.

Chacune de ces formes a des avantages et des inconvénients.

3 Sur les tenseurs d'Einstein

Pour la métrique croisée :

$$G_{\mu}^{\nu} = \begin{bmatrix} -3 H^2 \Omega & 0 & 0 & 0 \\ -2 (\Omega + q) H^3 r & -H^2 (\Omega - 2 q) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -H^2 (\Omega - 2 q) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -H^2 (\Omega - 2 q) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$G_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -3 H^2 \Omega - \frac{H^4 r^2 (2q - \Omega)}{1 + (1 - \Omega) H^2 r^2} & \frac{r H^3 (2q - \Omega)}{1 + (1 - \Omega) H^2 r^2} & 0 & 0 \\ \frac{r H^3 (2q - \Omega)}{1 + (1 - \Omega) H^2 r^2} & -\frac{H^2 (2q - \Omega)}{1 + (1 - \Omega) H^2 r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(2q - \Omega) H^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(2q - \Omega) \sin^2 \theta H^2 r^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Pour la métrique comobile :

$$G_{\mu\nu} = H^2 \begin{bmatrix} -3 \Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(2q - \Omega) R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f_k^2(x) (2q - \Omega) R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin^2 \theta f_k^2(x) (2q - \Omega) R^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

pour la métrique comobile localement inertielle aujourd'hui ($y = R(\tau_o)x$) : $G_{\mu\nu} =$

$$H^2 \begin{bmatrix} -3\Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(2q - \Omega) \frac{R^2(\tau)}{R^2(\tau_o)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f_k^2 \left(\frac{y}{R(\tau_o)} \right) (2q - \Omega) R^2(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin^2 \theta f_k^2 \left(\frac{y}{R(\tau_o)} \right) (2q - \Omega) R^2(\tau) \end{bmatrix} \quad (10)$$

et pour la métrique comobile localement inertielle aujourd'hui et ici ($f_k(y) \approx y$) :

$$G_{\mu\nu} = H^2 \begin{bmatrix} -3\Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(2q - \Omega) \frac{R^2(\tau)}{R^2(\tau_o)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y^2 (2q - \Omega) \frac{R^2(\tau)}{R^2(\tau_o)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin^2 \theta y^2 (2q - \Omega) \frac{R^2(\tau)}{R^2(\tau_o)} \end{bmatrix} \quad (11)$$

avec de manière évidente pour ces 3 métriques comobiles :

$$G_{\mu}^{\nu} = H^2 \begin{bmatrix} -3\Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2q - \Omega) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2q - \Omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2q - \Omega) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Conséquence : les équations d'Einstein s'écrivent $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$, où $T_{\mu\nu}$ désigne le tenseur impulsion-énergie et où κ est une constante. Comme le tenseur $T_{\mu\nu}$ s'interprète en termes de densité et de pression que dans un repère localement inertielle, considérons les points pour lesquels les tenseurs (8) et (10) sont écrits dans des coordonnées localement inertielles. Pour le tenseur (8) c'est la ligne d'univers $r = 0$ et pour (10) c'est l'unique point $y = 0$, $\tau = \tau_o$ (si R n'est pas constant). Il est donc évident que si l'on nomme $\rho_{comobile}(\tau, y)$ et $\rho_{croise}(\tau, r)$ les "densités" associées aux métriques dans lesquelles s'écrivent les tenseurs (10) et (8), ces "densités" ont des propriétés différentes. En effet le rapport des déterminants de ces tenseurs n'est égal à 1 qu'aux points où les métriques sont localement inertielles :

$$\frac{\det(G_{\mu\nu}^{comobile}(\tau, y))}{\det(G_{\mu\nu}^{croise}(\tau, r))} = \frac{R^2(\tau)}{R^2(\tau_o)} (1 + (1 - \Omega) H^2 r^2),$$

où $r = R(\tau) f_k(y/R(\tau_o))$.

Enonçons les propriétés et rapports évidents :

$\rho_{comobile}(\tau, y)$ ne dépend pas de y ;

$\rho_{croise}(\tau, r)$ dépend de r et $\rho_{croise}(\tau, 0)$ est la densité locale mesurable au temps τ ; nous noterons $\rho_{local}(X)$, cette densité locale au point X .

$\rho_{comobile}(\tau_o, y) = \rho_{croise}(\tau_o, 0) = \rho_{local}(\tau_o, 0)$.

Pour avancer, i.e. pour écrire des propriétés plus précises de $\rho_{comobile}(\tau)$ et de $\rho_{croise}(\tau, r)$, revenons à la définition théorique de ces objets. Soient donc $dV_{comobile}(\tau, y)$ et $dV_{croise}(\tau, r)$ les éléments de volume de la partie "espace" des métriques considérées, et soit $dV_{local}(X)$ l'élément de volume de la partie "espace" de la métrique de Minkowski sur l'espace tangent au point X considéré. Soit dM l'élément de matière-énergie dans le volume correspondant ; alors on a :

$$\rho_{comobile}(\tau) := \frac{dM}{dV_{comobile}(\tau, y)} = \frac{dM}{dV_{local}(\tau, y)} \frac{dV_{local}}{dV_{comobile}}(\tau, y) = \rho_{local}(\tau, y) \frac{dV_{local}}{dV_{comobile}}(\tau, y) \quad (13)$$

et de même

$$\rho_{croise}(\tau, r) := \frac{dM}{dV_{croise}(\tau, r)} = \frac{dM}{dV_{local}(\tau, r)} \frac{dV_{local}}{dV_{croise}}(\tau, r) = \rho_{local}(\tau, r) \frac{dV_{local}}{dV_{croise}}(\tau, r). \quad (14)$$

Par définition, en tout point X où la métrique est localement inertielle on aura :

$$\rho_{comobile}(X) = \rho_{local}(X), \text{ respectivement } \rho_{croise}(X) = \rho_{local}(X).$$

Un calcul rapide donne $\frac{dV_{local}}{dV_{comobile}}(\tau, 0) = \left(\frac{R(\tau)}{R(\tau_0)}\right)^3$ et $\frac{dV_{local}}{dV_{croise}}(\tau, 0) = 1$. Ainsi on a

Théorème :

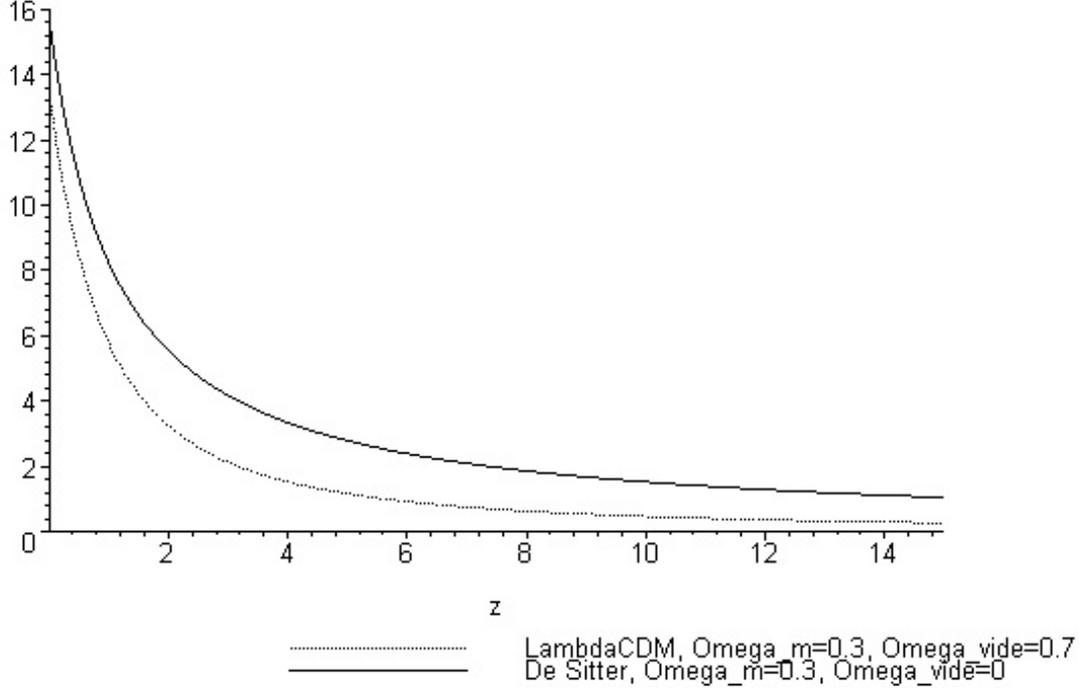
$$\rho_{comobile}(\tau, y) = \rho_{comobile}(\tau, 0) = \left(\frac{R(\tau)}{R(\tau_0)}\right)^3 \rho_{croise}(\tau, 0) = \left(\frac{R(\tau)}{R(\tau_0)}\right)^3 \rho_{local}(\tau, 0), \quad (15)$$

et donc $\rho_{comobile}(X)$ désigne une COdensité et $\rho_{croise}(X)$ est la densité usuelle sur la ligne d'univers $X = (\tau, 0)$. En particulier si toute la "matière-énergie" est comobile, la "densité" $\rho_{comobile}$ est constante. Vladimir Fock ([4]) note cette "densité" comobile ρ^* . On peut faire un raisonnement similaire concernant les "pressions", mais le plus simple est encore de déduire le même genre de résultats sur les pressions à partir des équations d'Einstein ; autrement dit la "pression" dans les coordonnées COMobiles a le sens d'une COPression.

4 Application : modèle Λ CDM et modèle de De Sitter

Nous allons maintenant illustrer ce résultat en comparant le modèle en vogue Λ CDM pour lequel $\Omega_{matiere} = 0.3$ et $\Omega_{vide} = 0.7$, la partie espace est plate, avec le modèle correspondant dans lequel pour lequel la matière comobile se traduit par une COdensité et une COPression dans la forme de Robertson-Walker de la métrique d'univers et qui se traduit par une densité et une pression pour la forme croisé. On a dans ce cas un des modèles de De Sitter. Nous prendrons $\Omega_{matiere} = 0.3$ et $\Omega_{vide} = 0$, pour bien voir les différences.

age(z) pour les modèles LCDM et de De Sitter



Traçons le graphe de l'âge en fonction du redshift en employant la formule classique :

$$t(z) = \frac{1}{H_o} \int_0^{1/(1+z)} \frac{x dx}{\sqrt{\Omega_k x^2 + \sum \Omega_i x^{1-3\omega_i}}},$$

où $\Omega_k = 1 - \sum \Omega_i$ et les Ω_i traduisent les différentes sortes de contenu du fluide cosmique. Dans la suite nous négligerons le contenu radiatif qui a une influence négligeable sur l'âge des modèles d'univers considérés. Pour établir la comparaison nous prendrons $H_o \approx 70 \text{ km/s/Mpc}$.

Pour le modèle Λ CDM la formule s'écrit :

$$t_{\Lambda\text{CDM}}(z) = \frac{1}{H_o} \int_0^{1/(1+z)} \frac{x dx}{\sqrt{\Omega_m x + (1 - \Omega_m)x^4}};$$

Et pour le modèle De Sitterien elle s'écrit :

$$t_{dS}(z) = \frac{1}{H_o} \int_0^{1/(1+z)} \frac{x dx}{\sqrt{(1 - \Omega_m - \Omega_{vide})x^2 + (\Omega_m + \Omega_{vide})x^4}}.$$

Pour la figure nous avons pris $\Omega_m = 0.3$, valeur qui semble faire un consensus.

Commentaires. On peut facilement voir sur la figure que :

1- Le modèle de Sitterien est plus âgé d'environ 2,5 milliards d'années, ce qui laisse de la place pour comprendre l'âge des plus vieux amas globulaires, ce qui est très difficilement possible avec le modèle Λ CDM .

2- Les galaxies ayant un redshift de 3 à 5 ont un âge de 2,5 à 1,5 milliards d'années dans le modèle Λ CDM. Pour le modèle de De Sitter ces galaxies ont un âge de 4,5 à 3,5 milliards d'années, ce qui est compatible avec l'âge d'environ 3 milliards d'années d'étoiles repérées dans ces galaxies.

3- Pas d'énergie noire dans le modèle de De Sitter. On aurait pu en mettre en prenant Ω_{vide} non nul, et dans ce cas le modèle est encore plus âgé. Donc un mystère de moins à résoudre (de même il n'y a plus de mystère de la constante cosmologique qui traduit toutes les formes de contenu comobile).

Objection. On va évidemment me dire que le modèle de Sitterien admet un Ω_{total} différent de 1, contrairement aux observations faites sur le rayonnement de fond cosmologique (MWAP, ...). Il est très facile de répondre que l'interprétation de ces expériences reposent sur l'existence d'un horizon (et il y a de plus une erreur mathématique concernant le domaine de validité d'un développement limité utilisé); or il n'y a pas de problème d'horizon dans les modèles de De Sitter. Aussi il faut mouliner les observations de manière complètement différente. C'est un travail à faire, bien qu'il y a dix ans j'ai donné une partie de l'explication (cf. [2]).

Un débat à poursuivre.

5 Retour sur la forme croisée

Nous allons revenir sur cette forme "croisée"

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{(dr - rH(\tau)d\tau)^2}{1 + (1 - \Omega)H(\tau)^2r^2} - r^2d\omega^2,$$

dont on va donner plusieurs propriétés.

- Elle est localement inertielle le long de la ligne d'univers $r=0$; ce qui signifie en particulier que le tenseur impulsion-énergie s'interprète simplement, ce qui n'est pas le cas pour la forme comobile de Robertson-Walker.
- La loi de Hubble $\dot{r} = H(\tau)r$ est exacte, et une des équations d'Einstein est déjà prise en compte par le terme $(1 - \Omega)H(\tau)^2r^2$ qui a une interprétation intéressante "d'énergie cinétique - énergie potentielle".
- Les coordonnées τ et r ont une signification simple.
- Elle mène rapidement à une forme statique locale $ds^2 = d\tau^2 - (dr - rH_o d\tau)^2 / (1 + (1 - \Omega_o)H_o^2r^2) - r^2d\omega^2$.
- Sa modification statique, pour tenir compte de la présence d'une masse à l'origine, est facile à obtenir. Cette modification fait apparaître le concept de rayon d'attraction d'une masse dans un univers non vide.
- Cette forme croisée s'obtient "facilement" à partir de la cosmologie newtonienne et donc prend une signification particulière.

A partir de la gravitation newtonienne, (des équations de continuité, d'Euler et de Poisson dans le cas d'une symétrie sphérique), on peut associer "naturellement" le Lagrangien :

$$2L = \dot{\tau}^2 - \frac{(\dot{r} - v(\tau, r)\dot{\tau})^2}{1 + K} - r^2\dot{\omega}^2, \quad (16)$$

où v désigne la vitesse de chute radiale et K , la constante d'une intégrale première, $K = \text{''énergie cinétique''} - \text{''énergie potentielle''}$.

Son efficacité est redoutable :

1- Cas du Soleil dans le vide : $v = -\sqrt{\frac{2M}{r}}$ et la constante du mouvement K est nulle. le Lagrangien croisé est donc

$$\dot{\tau}^2 - \left(\dot{r} + \sqrt{\frac{2M}{r}} \dot{\tau} \right)^2 - r^2 \dot{\omega}^2,$$

et la métrique croisée associée est

$$d\tau^2 - \left(dr + \sqrt{\frac{2M}{r}} d\tau \right)^2 - r^2 d\omega^2,$$

et l'on a tout le loisir de supprimer le terme croisé ce qui nous donne la métrique usuelle de la relativité générale.

2- Cas d'un modèle d'univers isotrope : $v = H(\tau)r$ et l'intégrale première s'écrit $K = (1 - \Omega(t))(H(\tau)r)^2$; on obtient immédiatement le Lagrangien croisé :

$$\dot{\tau}^2 - \frac{(\dot{r} - rH(\tau)\dot{\tau})^2}{1 + (1 - \Omega)H(\tau)^2 r^2} - r^2 \dot{\omega}^2,$$

et la forme de métrique croisée ci-dessus.

On peut également faire de même pour un astre dans un modèle d'univers.

6 Conclusion

De fait ce sont les affirmations de H. Poincaré (sur le pluralisme théorique et ses bases), relayées par le travail de Gilles Gaston Granger, qui m'ont permis de chercher l'équivalence entre les gravitations de Newton et d'Einstein, chose que je pensais stupide jusqu'en 1992.

Cette voie à surtout un intérêt épistémologique car d'une part les deux théories s'éclairent l'une l'autre et d'autre part oblige à revenir sur les concepts de base de la relativité générale. La question posée ici étant : Pourquoi le lien entre Newton et Einstein se fait via des métrique et Lagrangien croisés? par derrière il y a le fait que dans la forme de métrique croisée la variable temporelle a une signification d'un "temps absolu", alors que dans les formes diagonales la variable temporelle est une variable annexe, sans signification toujours très claire.

Evidemment l'autre concept sur lequel on est bien revenu c'est l'interprétation du tenseur impulsion-énergie en terme de codensité et copression dans une forme de métrique comobile. Cette interprétation permet de résoudre un certain nombre de difficultés liées au "modèle standard".

Références

- [1] M. Mizony et M. Lachièze-Rey, *Cosmological effects in the local static frame*, à paraître dans A.& A. (gr-qc/0412084).
- [2] M. Mizony, *La relativité générale aujourd'hui ou l'observateur oublié*, ed ALEAS, Lyon, juin 2003.
- [3] M. Lachièze-Rey, *The Friedmann-Lemaître models in perspective*, A.& A. 364, 894-900 (astro-ph/0010163).
- [4] V. Fock, *The theory of space, time and gravitation*, Pergamon Press, London (1964).
- [5] J.-M. Souriau *Géométrie et Thermodynamique en cosmologie*, in “Géométrie symplectique et Physique mathématique” CNRS Paris (1975).

Amicalement

Michel Mizony

ICJ, UMR 5208, université Lyon 1