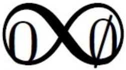
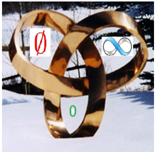
Après la conquête du zéro puis de l'ensemble vide, des mathématiques à l'indicible

Michel Mizony Université de Lyon

juillet 2018

cliquer pour entrer





« La partie de la mathématique qui concerne les infinis de divers ordres (théorie des ensembles, topologie) contient des trésors infiniment précieux d'images pour les vérités surnaturelles. »
Simone Weil, La connaissance surnaturelle, Gallimard, 1950, p. 259.

- Introduction ▸ Voir
- Saga du 0 5000 ans d'histoire ▸ Voir
- Théorie des ensembles, axiome du choix et trois théorèmes. ▸ Voir
- Ah l'indicible un pas vers l'inconnu ▸ Voir

Relationnel, symbolique, fictionnel, des mots qui sentent bons pour situer l'épistémologie dans un cadre plus général de "philosophie de la connaissance".

Saga, histoire, épigénétique, pluralisme et incomplétude pour asseoir le choix de se centrer sur l'"invention-création" et sur l'indicible en mathématique.

Adieu le déterminisme universel et toute forme de réalisme, vive la théorie des ensembles qui rend aux mathématiques un statut de langage symbolique à l'instar de nombreuses théories de la connaissance.

La saga du 0 en quelques dates (5000 ans d'histoire) permettra de suivre l'évolution des mathématiques. La théorie des ensembles devient alors un avatar de cette saga.

-3400 écriture sumerienne en cunéiforme (lettres et nombres en base 60).

-3400 à -1600 le chiffre 0 n'existe pas, il est noté par une place vide dans la numération de position sumérienne ; écriture de l'épopée de Gilgamesh entre -2600 et -1600.

-1500 naissance du premier alphabet (Ougarit en Syrie) à l'aide des deux symboles clou et chevron.

-1500 à -1200 un clou oblique note la place vide du zéro devenu un chiffre ; parfois un point (ou un 0 vers -400) suivant les endroits. En -1200, l'araméen devient la langue sémitique utilisée dans tout le croissant fertile.

vers -312, Alexandre le Grand, transporte cette numération babylonienne, en cunéiforme, jusqu'au nord de l'Inde.

1000 ans au secrêt en Inde.
628 : Brahmagupta, nombres négatifs ..., 0 est devenu nombre.
780 : arrivée du nombre 0 à Bagdad ;
820 : naissance de l'algèbre par Al Khwarizmi (Tachkent) : équation f(x)= 0, où 0 est un nombre. Expansion de la numération arabe autour de la méditerranée ; première ligne, celle des chiffres ;
deuxième ligne, celle des nombres.

٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.
1200 enfin la numération arabe et l'algèbre arrivent en Europe (commerçants vénitiens et Fibonnaci).
1645 : Le nombre 0 est domestiqué : la première calculatrice construite par Pascal 

Conséquences

1584 Giordano Bruno, écrit "L'Infini, l'Univers et les Mondes" ; il a été brulé pour avoir déclaré l'univers infini ?

1655 L'infini =1/0 devient un objet mathématique ; il a été inventé par le mathématicien John Wallis et noté ∞, un ruban de Moëbius (surface compacte à une seule face) : ∞.

1654 Justification d'une infinité de calculs par un nombre fini de raisonnements : c'est le principe de récurrence utilisé depuis longtemps ; Pascal formalise ce raisonnement dans son "Traité du triangle arithmétique". Ce principe a une grande importance car il mène à l'axiome du choix.

1654-1657 Blaise Pascal et Christian Huygens établissent la théorie des probabilités finies.

1790 : Le nombre 0 est légalisé : adoption du système métrique par la révolution française. Le nombre 0 devient universel.

Des éléments de la théorie des ensembles en mathématiques :

i) 1830, avec Galois la théorie des groupes débute : le nombre 0 se démultiplie il devient aussi élément neutre.

ii)1872 Felix Klein à Erlangen : une géométrie : **c'est un groupe qui agit sur un ensemble**. C'est le premier coup de tonnerre car il y a dépassement du principe de contradiction, on choisit la géométrie que l'on veut, toutes étant également possibles ; c'est la fin du rêve platonicien : "nul ne peut entrer ...".

iii) 1872, Cantor et Dedekind : deux constructions axiomatiques de l'ensemble des nombres réels.

iv) 1873-1874, Cantor : l'infini explose en une myriade d'infinis ; puis première mouture de la théorie des ensembles.

v)1889 Arithmétique de Peano qui contient le principe de récurrence, intégrée dans la théorie des ensembles, avec laquelle l'ensemble vide est bien défini et noté $\{\}$.

A partir de la version 1889 de la théorie des ensembles des travaux dans de multiples directions :

i) ajout de deux axiomes : axiome du continu et axiome du choix, formalisés vers 1900 pour pouvoir continuer à créer des maths.
ii) recherches sur la cohérence de la théorie, énoncés contradictoires ou paradoxaux sont rectifiés, d'où :
iii) 1908, axiomatique de Zermelo et Fraenkel (ZF) de la Théorie des ensembles. Avec les axiomes du choix et du continu, (ZFC), c'est la théorie actuelle.
iii) Poincaré, vers 1900, établit le pluralisme théorique dans les modélisations de la physique ; il actualise l'épistémologie kantienne (qui sera reprise par Cassirer et Vaihinger).
iv) 1906 création de l'intégration de Lebesgue, les probas continues sont en route.
Après 1908 (ZFC), deux grands chantiers (étroitement liés entre eux) l'axiome du choix, les probas continues. L'indicible en maths se précise.

Axiome du choix : Soit X un ensemble non vide. Il existe une application appelée fonction de choix c : P(X)-{∅}→X qui à toute partie non vide de X associe un élément de cette partie.
L'axiome du choix, est équivalent à de nombreux autres énoncés.
Cet axiome permet d'étendre le principe de récurrence à tout ensemble (non dénombrable).

ZFC ⇒ {Lebesgue, (1906) ⇒ L^2 pour Fourier, (1906)} ⇒ {"inégalités de Heisenberg", (1927), probabilités continues Kolmogorov, (1926-1933}

ZFC ⇒ {pluralisme théorique en sciences Poincaré (1902), pluralisme théorique en mathématiques Noether, (1920), théorèmes d'incomplétude Gödel (1930), théorèmes de cohérence Gödel, (1938), théorème d'indépendance Cohen (1963)}

La fiction de "{}" a trouvé son symbole ∅ Bourbaki, (1936). Cette théorie ZFC est alors rendue universelle par ce groupe Bourbaki.

Axiome du Choix : une hydre à y têtes en conséquences ?

dédoublement de la boule euclidienne ;

le corps des réels se démultiplie avec les réels non standard Robinson, (1960) donc le(s) nombre(s) 0 a sa monade (au sens de Leibniz), de même chaque ∞ a la sienne ;

une particule n'est pas une onde ni un corpuscule, tout se passe comme si c'était une onde **et** un corpuscule **et** ... ; car, suivant l'observation faite, on a soit l'aspect ondulatoire soit l'aspect corpusculaire qui se manifeste ;

la distribution de Dirac est une belle fiction mathématique cohérente Schwartz, (1950) et la distribution de Dirac est une fiction physiquement autocontradictoire ; de plus la transformée de Fourier de cette distribution, particule ponctuelle, est ... une onde plane.

En clair, en sciences, le concept de vérité n'a plus de sens, il n'y a plus que le concept de cohérence, de raisonnement valide ou correct, accompagné des concepts épistémologiques d'incomplétude et de pluralisme pour l'interprétation. C'est le relationnel. En clair plus de dogmatisme possible.

0=Cardinal de $\emptyset$; 0 et ∞ se sont démultipliés avec ZF, ils ont explosés en plus avec leurs monades avec ZFC (i.e. les maths modernes) ; ces belles fictions sont autant d'indices menant à l'indicible en mathématique.

La saga du zéro est-elle terminée ? La saga de l'indicible a commencé, cet indicible rationnel qui correspond à une diminution de la contingence associée au hasard.

Ces sagas ne sont elles pas des manifestations d'un épigénétisme culturel (ou de la connaissance) ?

Aujourd'hui :

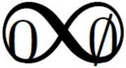
a) le nombre 0, l'$\emptyset$ et l'∞ n'ont pas de réalité physique, ils émanent de l'humanité qui les a symbolisés; ces 3 symboles fictionnels introduisent de l'indicible en maths.

b) Deux piliers de ce que l'ont peut appeler l'indicible en mathématique sont l'incomplétude et le pluralisme;

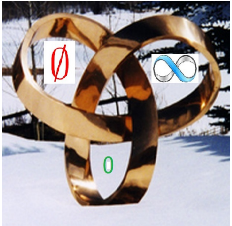
c) Le 0 est devenu élément neutre, il s'est multiplié, comme l'∞. L'"ensemble" des groupes n'est pas un ensemble, de même pour les cardinaux. Depuis 1945, naissance de la théorie des catégories, le zéro s'est encore métamorphosé.

d) La théorie des ensembles ouvre la possibilité de trouver des axiomatiques différentes d'une même théorie physique c'est le pluralisme théorique.

Propositions de symboles pour l'indicible :

l'indicible en mathématiques : 

l'indicible (épistémologique) en sciences : 

l'indicible en philosophie de la connaissance : 

.

Un peu sur le hasard :

apprivoisé petit à petit à partir de la création du nombre 0, le hasard fini est domestiqué vers 1654 (Pascal).

le hasard dénombrable (sur l'ensemble des entiers) commence à être apprivoisé à partir de l'axiome de récurrence (Pascal) et la notation de l'infini, vers 1655 Wallis) ; mais il faudra attendre 1926 (Kolmogorov) pour qu'il soit domestiqué c'est le pseudoaléatoire.

depuis 1926, le hasard du continu commence, le "vrai hasard" quantique proposé par Gisin est une piste sérieuse, le mouvement brownien une autre ; il est cerné comme une bête sauvage, encore loin d'être apprivoisé.

vive les sagas de l'indicible et du hasard.

exemples d'indicible :

en maths  *donnes-moi un nombre réel* (Cantor) ; quelle sécheresse (formelle) !

en chimie  *donnes-moi de l'eau pure* (Benvéniste) ; là, il faut se mouiller (expérimentalement) !

dans la culture  *donnes-moi à boire* (Jésus et la samaritaine) ; ah "l'eau vive" (surabondante) !

C'est un "même type" d'indicibles dépendant d'un choix langagier.

exemples d'indicible :

en maths *donnes-moi un nombre réel* (Cantor) ; quelle sécheresse (formelle) !

en chimie *donnes-moi de l'eau pure* (Benvéniste) ; là, il faut se mouiller (expérimentalement) !

dans la culture  *donnes-moi à boire* (Jésus et la samaritaine) ; ah "l'eau vive" (surabondante) !

C'est un "même type" d'indicibles dépendant d'un choix langagier.

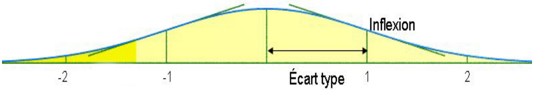
note : $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'ouverts dont la somme des longueurs est aussi petite que l'on veut ! (exercice simple à faire pour ceux qui croient connaître $\mathbb{R}$).

Un autre exemple : le théorème d'indétermination de Heisenberg en 1927, Heisenberg donne le résultat partiel de base via la transformation de Fourier :

$$\sigma_x \, \sigma_p = \frac{\hbar}{2}$$

où σ_x désigne ce qui est appelé l'écart type d'une gaussienne :

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$



C'est un tout autre type d'indicible mis en évidence par ce théorème.

Epilogue : **Le retour de Zénon d'Elée**

Espace et temps sont-ils "atomistiques" ou "divisibles à l'infini" ?
Sa réponse est non du fait de ses 4 paradoxes car le mouvement existe (Achille rattrape la tortue, la flèche ne s'arrête pas en chemin, ...). Doutes ; il savait que quelque chose n'allait pas dans "atomistiques" ou "divisibles à l'infini", comme Aristote qui raconte Zénon, mais quoi ?

1910, Zénon vient à la Ciotat : 

. Il a lu Cantor avec ses tas d'infinis : le dénombrable, le continu et plein d'autres ; il a appris l'axiome de continuité : "bon il n'y a pas trop d'infinis" ; il a appris "l'axiome du choix" et entendu les matheux parler de la duplication de la boule, Banach-Tarski,1924 ; "ils sont fadas, jamais, à la pétanque, un carreau éclate une boule en deux identiques".
En repartant, en 1931, après avoir écouté Gödel : "je sais maintenant, il y a de l'indicible, et vraiment ni temps ni espace, seul le mouvement existe ".

La crise des mathématiques et Jean-Baptiste Fourier

1821 : ouvrage de Fourier sur les séries et intégrales dites de Fourier, enfin publié ; scandale, de l'indéfiniment dérivable converge vers du discontinu ! Début de la crise des maths.

XIXème siècle : calculs d'approximations continues de phénomènes discontinus, par mécaniciens et physiciens, mathématiciens souvent sceptiques ; équations différentielles devenant polynômes par Fourier !

1906-1908 Avec l'intégration au sens de Lebesgue, le travail de Fourier est mathématiquement justifié. Le théorème L^2 est là.

1927 Heisenberg publie son énorme théorème en utilisant Fourier ; travail mal compris car très mal traduit (contresens).

1950 Schwartz étend la transformation de Fourier aux distributions et ainsi justifie des calculs faits par des physiciens

1995-2020 : transformation de Fourier pour les groupes d'invariants de la mécanique quantique (QFT) ; recherches sur l'ordinateur quantique dont l'efficacité algorithmique éventuelle reposera sur ces transformations de Fourier.

2022 : remise à titre posthume de la **médaille Field** à Jean-Baptiste Fourier et à Zénon d'Elée ?

Moralité : Zénon et Fourier ont eu, chacun à leur manière, la certitude que le continu et le discontinu mathématiques se donnent la main, mais comment ? Etait-ce la prémonition du champ du quantique avec dualité et complémentarité ?

Un drôle de théorème : le théorème du pluralisme théorique

On peut lui donner plusieurs noms :

Le théorème du "Tout se passe comme si" (1887, Poincaré)

Un drôle de théorème : le théorème du pluralisme théorique

On peut lui donner plusieurs noms :

Le théorème du "Tout se passe comme si" (1887, Poincaré)

Le théorème du "pluralisme théorique" (1919, Poincaré-Noether)

Un drôle de théorème : le théorème du pluralisme théorique

On peut lui donner plusieurs noms :

Le théorème du "Tout se passe comme si" (1887, Poincaré)

Le théorème du "pluralisme théorique" (1919, Poincaré-Noether)

Le théorème du "comme si" (1921, Kant-Vaihinger)

Un drôle de théorème : le théorème du pluralisme théorique

On peut lui donner plusieurs noms :

Le théorème du "Tout se passe comme si" (1887, Poincaré)

Le théorème du "pluralisme théorique" (1919, Poincaré-Noether)

Le théorème du "comme si" (1921, Kant-Vaihinger)

Le théorème de "l'analyse non-standard" (1960, Leibniz-Robinson)

Un drôle de théorème : le théorème du pluralisme théorique

On peut lui donner plusieurs noms :

Le théorème du "Tout se passe comme si" (1887, Poincaré)

Le théorème du "pluralisme théorique" (1919, Poincaré-Noether)

Le théorème du "comme si" (1921, Kant-Vaihinger)

Le théorème de "l'analyse non-standard" (1960, Leibniz-Robinson)

Le théorème de "l'intuition" (1964, Feynman)

Un drôle de théorème : le théorème du pluralisme théorique

On peut lui donner plusieurs noms :

Le théorème du "Tout se passe comme si" (1887, Poincaré)

Le théorème du "pluralisme théorique" (1919, Poincaré-Noether)

Le théorème du "comme si" (1921, Kant-Vaihinger)

Le théorème de "l'analyse non-standard" (1960, Leibniz-Robinson)

Le théorème de "l'intuition" (1964, Feynman)

Le théorème du "changement de cadre" (1984, Douady)

avec l'axiome du choix, on peut lui donner un nouveau nom : celui suggéré par Zénon

Le théorème de "l'indicible" (-450, Zénon), oui il le savait mais ne l'a jamais écrit (cf. la diapo précédente). C'est la seule lecture possible de ses 4 paradoxes.

exemples : Qu'est-ce que $\mathbb{R}$? Le dédoublement de la boule de pétanque ? MQ et RG vérifient le même théorème d'indétermination (1950, Fourier-Heisenberg-Schwartz).

Un troisième exemple : prenons les deux formalismes les plus connus de la mécanique quantique : a) le formalisme Hamiltonien qui conduit au $\Delta x \,.\, \Delta p \quad \geq \quad \frac{\hbar}{2}$ usuel de la MQ ; b) le formalisme hilbertien de la MQ qui conduit au $\sigma(x) \,.\, \sigma(p) \quad \geq \quad \frac{\hbar}{2}$ commun à la relativité (newtonienne, restreinte et générale) et à la MQ ; l'équivalence entre ces deux inégalités découle de la théorie des distributions de Schwartz. D'où le principe de complémentarité proposé par Heisenberg entre MQ et RG, car ces deux théories, loin d'être contradictoires ont en commun le même principe d'indétermination, un même indicible.

En remarque finale, pour illustrer l'importance de ce théorème du pluralisme, regarder différentes écritures axiomatiques de l'axiome du choix ; ce n'est pas un hasard, c'est de l'indicible qui surgit et non pas une vérité ou un dogme.

Le vent souffle où il veut
Et toi tu entends sa voix,
Mais tu ne sais pas d'où il vient,
Et tu ne sais pas où il va,
Le vent.
D'après Jean 3.8 chanté par Mannick et Jo Akepsimas

Le vent souffle où il veut
Et toi tu entends sa voix,
Mais tu ne sais pas d'où il vient,
Et tu ne sais pas où il va,
Le vent.
D'après Jean 3.8 chanté par Mannick et Jo Akepsimas

Le vent souffle où il veut
Et toi tu entends sa voix,
Mais tu ne sais pas d'où il vient,
Et tu ne sais pas où il va,
Le vent.

plus de vérité
de la cohérence
plus de dogme
de la liberté
c'est l'intuition