Un point sur la conjecture d'Erdös et Straus

M. Mizony, M.-L. Gardes

Université Claude Bernard, Villeurbanne, Juin 2012

Résumé : Après avoir résumé l'état de l'art sur cette belle conjecture, nous donnons différentes identités qui permettent d'exprimer de différentes manières celle belle conjecture et de trouver aussi de nouvelles formules de progressions arithmétiques. In fine, nous vérifions la validité de la conjecture pour tous les entiers $n \leq 10^{17}$, ce qui améliore le record précédent d'un facteur 1000.

Table des matières

1 Introduction

1.1 Le problème

L'énoncé ci-dessous est la conjecture de Paul Erdös et Ernst Straus ([1]). Plusieurs généralisations et problèmes ont été proposées depuis. La question de fond étant :
« Quels rapports peut-on établir entre décompositions de fractions en somme de trois fractions égyptiennes et connaissance des nombres premiers ? »

Toute fraction $\frac{4}{n}$ peut-elle s'écrire sous la forme :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \text{ ?}$$

Existe-t-il une formule donnant une décomposition :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \text{ ?}$$

Et pour deux entiers naturels a et b, sous quelles conditions a-t-on :

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \text{ ?}$$

1.2 Quelques étapes historiques vers la résolution ...

- 1948, énoncé de la conjecture par Erdös et Straus ;
- 1954, les résultats de Rosati ;
- 1964, les résultats de Yamamoto ;
- 1999, vérification de la conjecture pour $n < 10^{14}$ par Swett ;
- 2000, le résultat négatif de Schinzel : pas de solution générale par une formule polynomiale.

1.3 L'identité et les trois formules

Soit [p,m,d] trois entiers vérifiant $p+4d$ divisible par $4m-1$ et d diviseur de m^2, alors l'identité

$$\frac{4}{p} = \frac{1}{m\,p} + \frac{1}{\frac{m\,p+d}{4m-1}} + \frac{1}{\frac{(m\,p+d)\,m}{(4m-1)\,d}p}, \tag{1}$$

donne une décomposition de $\frac{4}{p}$ en somme de trois fractions égyptiennes ; on dit que [p,m,d] est solution de la conjecture d'Erdös et Straus. (Résultat obtenu en 2009).

Conséquence si [p,m,d] est solution alors on a (pour tout k) : (Marc et Michel 2010)

- Formule 1 : $[p+(4m-1)k, m, d]$ est solution ;
- Formule 2 : $[p+4\,\frac{(mp+d)}{(4\,m-1)a}k, m+\frac{m}{a}k, d+\frac{d}{a}k]$ où $a = pgcd(m, d, m^2/d)$, est solution ;
- Formule 3 : $[p+4\,\frac{m(p+4\,d)}{(4\,m-1)a}k, m+\frac{m}{a}k, d]$ où a^2 est le plus grand facteur carré de m^2/d, est solution.

Ainsi pour chaque solution [p,m,d], on obtient trois triplets de progressions arithmétiques [p(k),m(k),d(k)]. (2010)

Lemme : pour tout entier m et tout diviseur d de m^2 alors -4d n'est pas un résidu quadratique modulo 4m-1.

En effet soit m et d un diviseur de m^2 alors il existe, de manière évidente, trois entiers x, y et z tels que $m = xyz$ et $d = yz^2$. Or à partir des propriétés des résidus quadratiques et du symbole de Jacobi on sait que $-4yz^2$ n'est jamais un résidu quadratique modulo $4xyz-1$ (cf. Yamamoto [4]), d'où ce lemme. Une conséquence immédiate de ce lemme est le fait que pour tout carré n^2 il n'existe pas d'entier m et un diviseur d de m^2 tels que $[n^2, m, d]$ soit un triplet solution.

Une involution : si [p,m,d] est solution alors $[p, \frac{m(mp+d)}{d(4m-1)}, \frac{(mp+d)^2}{d(4m-1)^2}]$ également.

1.4 Dans un cadre plus général

Soit la fraction h/p où h est un entier supérieur ou égal à 4 et p un entier supérieur à h/3, a-t-on le même genre de résultat permettant de décomposer cette fraction en somme de trois fractions unitaires ? Pour h=5, c'est la conjecture de Sierpinski ([3]).

Soit [p,m,d] trois entiers vérifiant $p+hd$ divisible par $hm-1$ et d diviseur de m^2, alors l'identité

$$\frac{h}{p}=\frac{1}{m\,p}+\frac{1}{\frac{m\,p+d}{hm-1}}+\frac{1}{\frac{(m\,p+d)\,m}{(hm-1)\,d}p},\tag{2}$$

donne une décomposition de $\frac{h}{p}$ en somme de trois fractions égyptiennes ; on dira que [p,m,d] est solution.

Si p n'est pas premier, p de la forme p=nq, on a la formule plus générale évidente :

$$\frac{h}{nq}=\frac{1}{m\,nq}+\frac{1}{\frac{n(m\,q+d)}{hm-1}}+\frac{1}{\frac{(m\,q+d)\,m}{(hm-1)\,d}nq},\tag{3}$$

qui permet de donner une décomposition lorsque la formule (2) échoue, ce qui est le cas par exemple pour h=4 et p un carré.

En conséquence si [p,m,d] est solution alors on a (pour tout k) :

- Formule h1 : $[p+(hm-1)k,m,d]$ est solution ;
- Formule h2 : $[p+h\,\frac{(mp+d)}{(h\,m-1)a}k,m+\frac{m}{a}k,d+\frac{d}{a}k]$ où $a=pgcd(m,d,m^2/d)$, est solution ;
- Formule h3 : $[p+h\,\frac{m(p+h\,d)}{(h\,m-1)a}k,m+\frac{m}{a}k,d]$ où a^2 est le plus grand facteur carré de m^2/d, est solution.

Dans la suite nous traiterons essentiellement le cas h=4 (Erdös et Straus), parfois le cas h=5 (Sierpinski). Le but essentiel est de faire le point sur ces conjectures lorsque p est premier.

2 Sur l'identité de base

2.1 Le résultat fondamental de Rosati [2] et de Yamamoto [4]

Ce paragraphe a été réécrit en 2012, après avoir pris connaissance des travaux de ces deux auteurs.

En 1969 Mordell [5] expose la première partie de ce résultat à savoir que pour p premier, si $\frac{4}{p}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, alors soit 1 soit 2 des 3 nombres a, b et c sont divisibles par p ; et plus précisément

si $\frac{4}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{yp}+\frac{1}{zp}$, alors il existe 4 entiers A, B, C et D, avec A, B, C premiers entre eux deux à deux tels que $x=BCD$, $y=ABD$ et $z=ACD$ (et alors 4ABCD = Ap+B+C) ;

si $\frac{4}{p}=\frac{1}{xp}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, alors il existe 4 entiers A, B, C et D, avec A, B, C premiers entre eux deux à deux tels que $x=ACD$, $y=BCD$ et $z=ABD$ (et alors 4ABCD = Ap+B+Cp).

Mais le résultat essentiel (trouvé semble-t-il indépendamment par Rosati et Yamamoto avec des formulations différentes) peut s'écrire sous la forme suivante :

Lemme de Rosati et Yamamoto : Un entier premier p vérifie la conjecture d'Erdos-Straus si et seulement si il existe quatre entiers positifs x, y, z et a, avec $z<ax$, tels que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :

i) p=4(ax-z)yz-a ;
ii) pa+1=4(ax-z)yz.

En conséquence, montrent-ils, il reste à démontrer la conjecture pour p premier et égal à 1 modulo 24 puis seulement à 1, 121, 169, 289, 361 et 529 modulo 840.

Mais ce qui est le plus intéressant est le fait que ces deux polynômes i) et ii) engendrent une machinerie à produire des progressions arithmétiques de solutions ; aussi le principe algorithmique de base utilisé pour la vérification de la conjecture était déjà établit par ces auteurs. Rosati, en 1954, a vérifié la validité de la conjecture pour $n < 1.42\ 10^5$ et Yamamoto, en 1964, a vérifié la validité de la conjecture pour $n < 10^7$.

Il est évident que i) s'obtient immédiatement, comme cas particulier pour p premier, à partir de notre identité (1), car si d divise m^2 alors il existe trois entiers x, y et z tels que $m = xyz$ et $d = yz^2$ et alors $a = (p + 4d)/(4m - 1)$, d'où la

Proposition : L'identité (1) généralise le résultat i) de ce lemme de base.

On remarquera que si p est premier la réciproque est vraie.

L'intérêt de notre identité se situe aussi au niveau algorithmique car elle ne dépend que d'un paramètre m et des diviseurs de m^2 alors que la formule i) du lemme de base dépend de 4 paramètres ; mais l'obtention des progressions arithmétiques de solutions n'est pas fondamentalement beaucoup améliorée.

2.2 Sur les résultats de Swett et de Schinzel

Que la conjecture soit vraie ou non, l'identité (1) donne naissance à trois formules polynomiales pour chaque m et pour chaque d diviseur de m^2 tels que [p,m,d] soit solution, autrement dit à une infinité de formules polynomiales différentes d'après le résultat de Schinzel, ainsi, sans contredire ce résultat, on peut espérer prouver la conjecture. On peut exprimer les choses autrement en disant que cette infinité inévitable de formules donne une heuristique à ce résultat de Schinzel.

Pour vérifier la conjecture pour $p < 10^{14}$, Swett part des 6 classes usuelles modulo 840 ; puis, en l'écrivant dans nos notations, pour tout m<1000, il définit Tm, un ensemble de classes de Z/(4m-1)Z pour lesquelles la conjecture est vraie (de fait Tm n'est autre que $\{-4d\ modulo\ (4m-1)/d\ diviseur\ de\ m^2\}$) ; enfin il élimine les p tels qu'il existe m<1000 vérifiant p modulo (4m-1) est dans Tm. Il reste alors quelques centaines de premiers dont il faut établir la décomposition. En gros, il n'utilise que la formule 1 de notre méthode.

2.3 Reformulations de la conjecture d'Erdös et Straus

- Conjecture d'Erdös et Straus : pour tout entier n>1 il existe trois entiers a, b et c tels que
$$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\,.$$

– Conjecture forte d'Erdös et Straus : pour tout entier n>1 il existe trois entiers x, y et z tels que
$$\frac{4}{n} = \frac{1}{nx} + \frac{1}{y} + \frac{1}{nz}.$$
– Conjecture 1 : pour tout entier n qui ne provient pas d'un nombre pentagonal (i.e. $n \neq 24k+1$ où k est pentagonal), il existe un entier m et un diviseur d de m^2 tels que $n+4d$ soit divisible par 4m-1.
– Conjecture 2 sur les nombres pentagonaux : Un nombre k n'est pas pentagonal si et seulement si il existe un entier m et un diviseur d de m^2 tels que $6\,k+m+d$ soit divisible par $4m-1$.
– Conjecture 3 sur les nombres triangulaires : Un nombre t n'est pas un triangulaire multiple de 3 si et seulement si il existe un entier m et un diviseur d de m^2 tels que $2\,t+m+d$ soit divisible par $4m-1$.

Les conjectures 1, 2 et 3 sont équivalentes et la conjecture 1 est équivalente à la conjecture forte d'Erdös et Straus via l'identité de départ.

Dans la conjecture 1 on peut remplacer la condition $n+4d$ divisible par 4m-1 par $mn+d$ divisible par 4m-1 qui lui est équivalente.

2.4 Un polynôme à plusieurs variables et une nouvelle identité

Utilisons le fait que si [p,m,d] est solution alors $a = (p+4d)/(4m-1)$ est un entier. Exprimons p en fonction de a, on obtient l'identité :

$$\frac{4}{(4\,m-1)a-4\,d} = \frac{1}{m\,((4\,m-1)a-4\,d)} + \frac{1}{ma-d} + \frac{1}{((4\,m-1)a-4\,d)\left(\frac{m^2a}{d}-m\right)}. \quad (4)$$

Cette identité est valide pour donner une décomposition de $\frac{4}{(4\,m-1)a-4\,d}$ en somme de trois FE, pour tout m, tout a et tout d divisant m^2a et vérifiant $d < ma$. Elle est assez efficace pour vérifier en quelques minutes qu'elle donne une décomposition non seulement pour tous les premiers plus petits que 10^6, mais également pour les carrés et tous les nombres (plus grands que 1 et jusqu'au moins 10^5) ! En fait rien de neuf car dire que l'entier p s'écrit sous la forme $(4\,m-1)a-4\,d$ est équivalent au fait que $a = \frac{p+4d}{4m-1}$, donc p+4d est divisible par 4m-1 c'est à dire (4) est équivalente à (1), ou encore donne une généralisation de l'égalité i) du lemme de Rosati et Yamamoto établie pour p premier.

Remarque : une application immédiate de ce polynôme $(4m-1)a-4d$ est de retrouver les classes modulo 4m-1 dont on est assuré d'avoir une formule de progression, c'est l'ensemble
$$\{-4d \; modulo \; (4m-1)/d \; diviseur \; de \; m^2\}.$$

De manière évidente cette identité se généralise pour donner une décomposition en somme de trois FE des fractions :
$$\frac{h}{h\,ma-h\,d-a} = \frac{1}{m\,(h\,ma-h\,d-a)} + \frac{1}{ma-d} + \frac{1}{(h\,ma-h\,d-a)\left(\frac{m^2a}{d}-m\right)}. \quad (5)$$

Soit maintenant d un diviseur de m^2 ce qui peut se traduire en écrivant m sous la forme $m = x\,y\,z$ avec $d = y\,z^2$. L'identité (5) devient l'identité polynomiale :

$$\frac{h}{hxyza-hyz^2-a} = \frac{1}{xyz(hxyza-hyz^2-a)} + \frac{1}{yz(xa-z)} + \frac{1}{(hxyza-hyz^2-a)xy(xa-z)}\,. \tag{6}$$

On pourra remarquer que cette identité permet d'établir une nouvelle forme équivalente de la conjecture forte d'Erdös et Straus :

conjecture polynomiale sur les nombres premiers : pour tout nombre premier p, il existe quatre entiers a, x, y et z (avec $z < x\,a$) vérifiant l'équation diophantienne $p = 4xyza - 4yz^2 - a$.

En clair, toute progression arithmétique donnant lieu à une décomposition forte est un cas particulier de ce polynôme qui est linéaire en x, y et a, quadratique en z et donnant la decomposition forte (6). En posant, pour h=4, x=1+u, y=1+v, z=1+w et a=1+t on obtient la forme polynomiale la plus générale possible dans des notations plus usuelles dans la littérature :

$$p = -1 + 3t + 4u + 4ut + 4vt + 4uv + 4uvt + 4(u + t + ut - 1 - w)(1 + v)w, \tag{7}$$

avec t,u,v,w positifs ou nuls vérifiants l'inégalité $(1 + u)(1 + t) > 1 + w$.

Application pour p de la forme $4\,k + 1$:

Lemme Soit p un nombre, supposé premier, de la forme $4\,k + 1$ alors p admet une décomposition forte ssi p est de la forme :

$$p = 5+8v+12t+12u+16vt+12uv+16ut+16uvt+4(1+v)(1+4t+3u+4ut-w)w, \tag{8}$$

avec t,u,v,w positifs ou nuls vérifiants l'inégalité $1 + 4t + 3u + 4ut - w >= 0$.

En effet le polynôme (7) est égal à 1 modulo 4 ssi t=2 modulo 4.

Un des intérêts de ce polynôme 8 est de nous fournir un algorithme assez performant pour tester la conjecture d'Erdös-Straus. Mais pour p de la forme $24\,k+1$ qui résiste encore plus, cette piste mène à 26 polynômes différents !

2.5 Le mur des carrés : le groupe des résidus quadratiques

Soit M un entier, en pratique dans la suite un multiple d'une factorielle première. Posons

$$G_M = \{x \in Z/M\,Z,\ pgcd(x, M) = 1\},$$

alors G_M est un groupe multiplicatif.

Puis posons $R_M = \{x \in G_M,\ x = y^2 \ modulo\ M\}$. C'est ce groupe qui est nommé groupe des résidus quadratiques.

Par exemple pour $M = 9240 = 2^3 * 3 * 5 * 7 * 11$, G_M possède 1920 éléments et $R_M = \{1, 169, 289, 361, 529, 841, 961, 1369, 1681, 1849, 2209, 2641, 2689, 2809, 3481, 3529,$

$3721, 4321, 4489, 5041, 5329, 5569, 6169, 6241, 6889, 7561, 7681, 7921, 8089, 8761\}$
possède 30 éléments. La propriété essentielle est le fait que pour tout $x \in R_M$ la progression arithmétique $x + kM$ contient des carrés et donc il n'existe pas de formule permettant de décomposer tous les éléments de cette progression en somme de trois FE. Par exemple pour M=9240, cet ensemble de classes restantes $C_M \supseteq R_M$ possède 34 éléments.

Ce groupe a un intérêt pour le cas où h=4, pour lequel les carrés font une obstruction (pourquoi ? C'est lié à un théorème d'obstruction de Schinzel valable pour $h = 0$ modulo 4). Une propriété intéressante est le fait que, pour p donné, p=1 modulo 4, il ne peut exister de solution [p,m,d] que si 4m-1 n'est pas un résidu quadratique modulo p. Ceci permet d'améliorer l'efficacité de certains algorithmes.

3 Sur la conjecture faible

L'identité de base sert à examiner la conjecture forte (deux des 3 entiers de la décomposition de h/n sont multiples de n) ; qu'en est-t-il pour la conjecture faible (au moins un des trois entiers est multiple de n) ? Après quelques constatations expérimentales, deux d'entre elles nous ont parues très intéressantes et mènent assez rapidement à une deuxième identité et à un algorithme efficace pour n premier et congru à 1 modulo 4.

3.1 Une deuxième identité

Soit $n = 4k+1$. Soit [4k+1,a,c] trois entiers vérifiant $(k+a)^2$ divisible par c, $(4k+1)c+k+a$ divisible par $pgcd(4a-1, c)$ ou, si 4k+1 n'est pas premier, $((4k+1)c+k+a)\ mod\ (4a-1) = 0$ et $(k+a)((4k+1)c+k+a)$ divisible par $(4a-1)c$ alors l'identité

$$\frac{4}{4k+1} = \frac{1}{k+a} + \frac{1}{\frac{(k+a)(a+4kc+c+k)}{c(4a-1)}} + \frac{1}{\frac{(4k+1)(a+4kc+c+k)}{4a-1}}\ , \tag{9}$$

donne une décomposition de $\frac{4}{4k+1}$ en somme de trois fractions égyptiennes ; on dit que [4k+1,a,c] (ou [k,[a,c]]) est solution de la conjecture d'Erdös et Straus faible. Elle fut obtenue par une collaboration de 3 personnes : Pierre, Michel et Marie-Line.

De fait, après la lecture du travail extraordinaire de Yamamoto, les conditions ci-dessus peuvent être remplacées par les suivantes :

Soit [4k+1,a,c] trois entiers vérifiant $(k+a)^2$ divisible par c et $(4k+1)(4c+1)$ divisible par $(4a-1)$ alors l'identité (9) donne une décomposition de $\frac{4}{4k+1}$ en somme de trois fractions égyptiennes. La fraction $(4c+1)/(4a-1)$ est le paramètre "s" de Yamamoto.

Le premier intérêt de ce paramétrage par a et c (diviseur de $(k+a)^2$) est de ne dépendre que de deux paramètres (le deuxième ayant un domaine fini). De là un programme performant.

Cette identité décompose tous les nombres (égaux à 1 modulo 4) semble-t-il. (Vérification faite pour $n \leq 10^7$ en quelques minutes, mais du fait des diviseurs de $(k+a)^2$ à trouver, ce programme n'est pas linéaire en temps).

A partir de ce paramétrage on peut énoncer une nouvelle conjecture du type : pour tout nombre premier égal à 1 modulo 4, il existe a et c tels que ...

Par ailleurs, si $[4k+1, a, c]$ est solution alors $[4k+1, a, \frac{(k+a)^2}{c}]$ est solution d'où une deuxième identité :

$$\frac{4}{4k+1} = \frac{1}{k+a} + \frac{1}{\frac{4k^2+k+4ak+a+c}{4a-1}} + \frac{1}{\frac{(k+a)(4k^2+k+4ak+a+c)(4k+1)}{(4a-1)\,c}} \ . \tag{10}$$

Ces identités, présentent l'intérêt de fournir de nouvelles progressions arithmétiques différentes de celles obtenues dans les paragraphes précédents.

3.2 Dans un cadre plus général

La généralisation est immédiate pour h/(hk+1) :

Soit [hk+1,a,c] trois entiers vérifiant $(k+a)^2$ divisible par c , $(hk+1)(hc+1)$ divisible par $ha-1$, et, si hk+1 n'est pas premier, $(k+a)((hk+1)c+k+a)$ divisible par $(ha-1)c$ alors l'identité

$$\frac{h}{hk+1} = \frac{1}{k+a} + \frac{1}{\frac{(k+a)(a+hkc+c+k)}{c(ha-1)}} + \frac{1}{\frac{(hk+1)(a+hkc+c+k)}{ha-1}} \ , \tag{11}$$

donne une décomposition de $\frac{h}{hk+1}$ en somme de trois fractions égyptiennes ; on dit que [hk+1,a,c] est solution de la conjecture d'Erdös et Straus faible généralisée. On a également une deuxième identité.

Un deuxième intérêt important de ces identités est essentiellement d'en déduire de nouvelles progressions qui s'expriment simplement. En voici trois écrites pour h=4 :

Formule 2 : si [k,[a,c]] solution pour (9) alors

$$[k + c(4a-1)t, [a, c]]$$

aussi pour tout t ; les polynômes x(t), y(t) et z(t) sont de degrés respectivement 1, 2 et 2. On peut remplacer c(4a-1)t par ppcm(c,4a-1)t ; mais la raison n'est pas optimale, loin de là. Il faut un petit algorithme pour trouver la raison optimale.

Formule 3 : si [k,[a,c]] solution pour (9), alors, également pour tout t

$$[k + e(k+a)t, [a, c(1+e\,t)]]$$

est solution, où $e = \frac{(4a-1)(k+a)}{d\,\delta}$, avec $d = pgcd(\frac{(k+a)^2}{c}, k+a))$ et $\delta = pgcd(k+a, c)$; les polynômes x(t), y(t) et z(t) sont de degrés respectivement 1, 2 et 3. La raison est optimale lorsque cette progression est non triviale, i.e. $4k+1$ et $e(k+a)$ sont premiers entre eux (ce qui est utilisé, de manière efficace, dans le processus d'élimination de classes).

Formule 4 : si [k,[a,c]] solution pour (10) alors [k+c(4a-1)t,[a,c]] aussi pour tout t ; les polynômes x(t), y(t) et z(t) sont de degrés respectivement 1, 2 et 4. On peut remplacer c(4a-1)t par ppcm(c,4a-1)t ; la raison n'est pas optimale. Il faut un autre petit algorithme pour trouver la raison optimale.

Ces progressions sont différentes du fait des degrés de z(t), degrés qui numérotent les formules de progressions ;

un exemple de progressions (optimales) à partir de [18,[3,63]] concernant p=73 :

$$\frac{4}{73+84t} = \frac{1}{21(1+t)} + \frac{1}{7(1+t)(20+23t)} + \frac{1}{21(20+23t)(73+84t)};$$

$$\frac{4}{73+132t} = \frac{1}{3(7+11t)} + \frac{1}{4(7+11t)(9t+5)} + \frac{1}{12(7+11t)(9t+5)(73+132t)};$$

$$\frac{4}{73+308t} = \frac{1}{7(3+11t)} + \frac{1}{7(77t+20)(4t+1)} + \frac{1}{7(3+11t)(77t+20)(4t+1)(73+308t)}.$$

Les trois formules sont différentes. En existe-t-il d'autres ?

3.3 Un polynôme à 3 variables

En Avril 2012, M. Bello Hernandez, M. Benito et E. Fernandez ([11]) donnent, pour **p=5+8u+8v+12w+12uv+12uw+16vw+16uvw**, une décomposition en somme de 3 fractions égyptiennes de 4/p :

$$\begin{aligned}\frac{4}{p} &= \frac{1}{(1+u)(2+3v+3w+4vw)} + \frac{1}{(4uw+3u+4w+2)(1+u)(2+3v+3w+4vw)}\\ &+ \frac{1}{(5+8u+8v+12w+12uv+12uw+16vw+16uvw)(4uw+3u+4w+2)(2+3v+3w+4vw)}\ .\end{aligned} \tag{12}$$

Par exemple en posant u=1+r, v=3+s et w=0, p=73+44r+20s+12rs et la décomposition :

$$\frac{4}{(73+20\,s+44\,r+12\,rs)} = \frac{1}{(5+3\,r)(2+r)(11+3\,s)} + \frac{1}{(2+r)(11+3\,s)} + \frac{1}{(73+20\,s+44\,r+12\,rs)(5+3\,r)(11+3\,s)}.$$

On remarquera les degrés 1, 1 et 2 en s, des trois dénominateurs de la décomposition.

Les auteurs ont vérifié que tout nombre premier de la forme 4k+1 et plus petit que 10^{14} est une valeur de ce polynôme, d'où leur conjecture :

Conjecture de M. Bello Hernandez, M. Benito et E. Fernandez : Pour tout entier premier de la forme 4k+1, il existe une décomposition de 4/p en somme de trois fractions égyptiennes donnée par l'égalité ci-dessus.

En posant a=1+v, k=(p-1)/4 et c=2+3v+3w+4vw dans l'identité faible (9), celle-ci donne l'égalité ci-dessus qui donc se trouve en être un cas particulier. Notons que dans ce cas c divise k+a, alors que dans (9) c divise $(k+a)^2$. Aussi cette nouvelle conjecture est plus exigeante que la conjecture faible.

Par ailleurs existe-t-il un polynôme à 4 variables, généralisant celui-ci, qui, à l'instar du polynôme (8) pour la conjecture forte, traduit la conjecture faible ?

Notons aussi que toute solution au sens fort de la forme [p,m,d] se met sous la forme [p,a,c] (en posant pour p=4k+1, $d = (4k+1)c$ et $m = (k+a+(4k+1)c)/(4a-1)$) mais les progressions associées à cette dernière forme ne présentent pas d'intérêt car leur raison est toujours un multiple de p ; en ce sens il y a une forme "d'orthogonalité" entre les trois progressions fortes (provenant de [p,m,d]) et les trois progressions faibles (issues du [p,a,c] correspondant). Mais cette "orthogonalité" est insuffisante pour résoudre le problème de trouver des progressions qui admettent des carrés ; c'est le noeud d'une éventuelle preuve de la conjecture basée sur la connaissance de suffisamment de progressions (cf. le résultat "négatif" de Schinzel). On peut oser dire qu'avec cette méthode des progressions on reste dans l'axe du "faire des mathématiques", i.e. de la production d'algorithmes performants, et moins dans l'axe du "dire des mathématiques", i.e. de la production d'une preuve de la conjecture.

4 La conjecture d'Erdös et Straus et les triplets pythagoriciens

4.1 Triplet pythagoricien associé à chaque décomposition

En Avril 2012, Ibrahima Gueye, de Dakar au Sénégal, nous signale qu'à toute décomposition de $4/n$ en somme de trois fractions unitaires, on peut associer un triplet pythagoricien. Effectivement soit $4/p = 1/x + 1/y + 1/z$, on supposera que p n'est pas un multiple de 4, plus précisément que les trois fractions unitaires ne sont pas identiques, donc on peut toujours supposer que $x < z$. Alors en posant $a = z - x$ on obtient une nouvelle identité associée à un triplet pythagoricien irréductible : soit $[\alpha,\ \beta,\ \gamma]$, où ces trois entiers, premiers entre eux, vérifient $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$ alors on a :

$$\frac{4}{p} = \frac{2\,\alpha}{(\beta - \alpha + \gamma)\,a} + 2\,\frac{2\,a\beta - \alpha\,p}{a\beta\,p} + \frac{2\,\alpha}{a\,(\beta + \alpha + \gamma)} \tag{13}$$

où les trois fractions du deuxième membre sont unitaires.

La preuve élémentaire réside simplement dans la résolution de l'équation $4/p = 1/x + 1/y + 1/(x + a)$ vue comme équation du deuxième degré en x. Le discriminant est égal à $\Delta = (4ay - ap)^2 + 4p^2y^2$ qui doit être un carré car x est entier, d'où le triplet pythagoricien $[4ay - ap,\ \sqrt{\Delta},\ 2py] = k[\alpha,\ \beta,\ \gamma]$, où $[\alpha,\ \beta,\ \gamma]$ est de plus irréductible. L'élimination de k conduit à $y = \frac{a\beta\,p}{4a\beta - 2\alpha\,p}$ et donc à l'identité.

On notera que si $p = 4q$ avec $x = y = z = 3q$ on obtient le triplet pythagoricien dégénéré $[0, 1, 1]$ correspondant à un triangle rectangle plat. Il vaut mieux voir ce triplet pythagoricien irréductible dégénéré comme la limite quand n tend vers l'infini de la famille des triplets irréductibles, appelés triplets cousins, $[2n + 1,\ 2n(n + 1),\ 2n(n + 1) + 1]$.

Ainsi à toute décomposition d'Erdös-Straus d'un nombre est associée un triangle rectangle dont les côtés sont entiers. Cette transposition géométrique de la conjecture va-t-elle permettre d'aller plus loin, sachant que le domaine des triplets pythagoriciens a été bien étudié ?

On peut rêver : en effet le fait que le triplet [0,1,1] soit la limite irréductible des triplets d-cousins (voir plus loin la définition) laisse penser que la preuve de la conjecture est à l'infini et plus précisément topologique. A travers l'interprétation géométrique, via les triangles rectangles à côtés entiers, transparaît cette interprétation topologique par la considération du compactifié de N en identifiant "l'infini entier" avec 0. Plusieurs algorithmes le laissent également apparaître. En tout cas l'interdiction posée par le "mur des carrés" (Yamamoto) ou si l'on préfère par le symbole de Jacobi ne peut être dépassée que par le recours à une autre approche ; est-ce que le "triangle rectangle plat" est une bonne piste ? On peut le penser, mais il reste à le mettre en oeuvre. A travers ce rêve, c'est toute l'unité des maths qui est là.

4.2 Une classification des triplets pythagoriciens irréductibles

L'étude des décompositions d'Erdôs-Straus et de leur(s) triplet(s) pythagoricien(s) associé(s) montre que la classification pertinente est celle de "d-cousins". Soit $[\alpha,\ \beta,\ \gamma]$ un triplet irréductible, notons $d = \gamma - \alpha$. Alors d doit forcément vérifier : il existe n tel que d(2n+d) soit un carré ; ainsi le triplet est de la forme $[n,\ \sqrt{d(2n+d)},\ n+d]$. Les premières valeurs de d (double d'un carré ou carré d'un nombre impair) sont : $d\ \in D = \{1,\ 2,\ 8,\ 9,\ 18,\ 25,\ 32,\ ...\}$.

Définition d'un d-cousin : pour d fixé dans D ci-dessus, c'est un triplet irréductible de la forme $[n,\ \sqrt{d(2n+d)},\ n+d]$.

Pour d=1, les triplets 1-cousins (ou cousins) sont donnés par la suite des triplets : $F1 = \{[2n(n+1),\ 2n+1,\ 2n(n+1)+1]/n \in \mathbb{N}\}$. Exemples : [4, 3, 5], [12, 5, 13], [24, 7, 25].

Pour d=2, les triplets 2-cousins sont donnés par la suite des triplets :
$F2 = \{[4n^2-1,\ 4n,\ 4n^2+1]/n \in \mathbb{N}\}$. Exemples : [3, 4, 5], [15, 8, 17], [35, 12, 37].

Pour d=8, les triplets 8-cousins sont donnés par la suite des triplets :
$F8 = \{[16n^2+8n-3,\ 4+16n,\ 16n^2+8n+5]/n \in \mathbb{N}\}$. Exemples : [21, 20, 29], [77, 36, 85].

Etc. Mais pour d>8, nous avons en général plusieurs suites de d-cousins.

Résultats : Il n'est pas trop difficile de trouver le résultat classique suivant :

Pour tout p différent de 1, 121, 169, 289, 361 ou 529 modulo 840 il existe une décomposition dont le triplet irréductible associé, par l'identité (13), soit un 1-cousin ou un 2-cousin.

Plus surprenant est le fait que pour $p < 10^10$, il existe toujours une décomposition dont le triplet associé soit un 1-cousin. Vérification faite en moins d'une heure sur un portable. La variable n indexant les 1-cousins est parfois énorme (i.e. le triangle rectangle est proche du triangle plat). Mais les algorithmes associés à l'identité (13) sont lents, aussi le recours aux lemmes suivants est très efficace. Cela donne corps à une nouvelle forme théorique de la conjecture d'Erdös-Straus :

4.3 Une nouvelle forme de la conjecture d'Erdös et Straus

Conjecture de I. Gueye : Pour tout entier p>1, il existe une décomposition de 4/p en somme de trois fractions égyptiennes dont le triplet pythagoricien irréductible associé est un triplet 1-cousin.

Elle est vérifiée jusqu'à p=10^{10}. Pour illustrer le fait que le 1-cousin est parfois grand voici deux petits lemmes :

Lemme 1 : soit p un nombre premier égal à 1 modulo 4 et tel qu'il existe un diviseur d de (p+1)/2 égal à 3 modulo 4 alors en posant n=(p-1)/2, y=(p+3)/4+u où u est défini par d=3+4u, on obtient une décomposition d'Erdös-Straus de p, via l'identité (13), dont le triplet 1-cousin associé est [2n(n+1), 2n+1, 2n(n+1)+1].

Ce lemme, évident à vérifier, n'a pas été facile à trouver. Par contre il permet une généralisation immédiate qui s'avère très intéressante.

Lemme 2 : soit p un nombre premier égal à 1 modulo 4, posons n=kp+(p-1)/2, où k est un entier tel qu'il existe un diviseur d de kp+(p+1)/2 égal à 3 modulo 4 et tel que (p+3+4u)(2kp+p+1)=0 modulo (3+4u)(2k+1) alors en posant y=(p+3)/4+u où u est défini par d=3+4u, on obtient une décomposition d'Erdös-Straus de p, via l'identité (13), dont le triplet 1-cousin associé est [2n(n+1), 2n+1, 2n(n+1)+1].

Ce lemme découle immédiatement de (13) qui s'écrit :

$$\frac{4}{p} = \frac{4\,(3+4\,u)\,(2\,k+1)}{(p+3+4\,u)\,(2\,kp+p+1)} + \frac{4}{(p+3+4\,u)} + \frac{4\,(3+4\,u)}{(p+3+4\,u)\,(2\,kp+p+1)\,p}\ .$$

Pour les rares entiers qui n'admettent pas de décomposition avec n=kp+(p-1)/2, comme par exemple 193, nous avons besoin d'un autre lemme.

Lemme 3 : soit p un nombre premier égal à 1 modulo 4, posons $4y-p = 3+4u = (n+1)p^2$; alors s'il existe n tel que (np+p+1)=0 modulo (2n+1), on obtient une décomposition d'Erdös-Straus de p, via l'identité (13), dont le triplet 1-cousin associé est [2n(n+1), 2n+1, 2n(n+1)+1].

Ce lemme découle immédiatement de (13) qui s'écrit :

$$\frac{4}{p} = \frac{2\,(2\,n+1)}{np+p+1} + \frac{4}{p\,(np+p+1)} + \frac{2}{np+p+1}\ .$$

Une application du lemme 1 : pour tout entier p de la forme p=5+8t+12w+16wt, on a la décomposition :

$$\frac{4}{5+8\,t+12\,w+16\,wt} = \frac{1}{(2+4\,w)(2+3\,t+3\,w+4\,wt)} + \frac{1}{2+3\,t+3\,w+4\,wt} + \frac{1}{(2+4\,w)(2+3\,t+3\,w+4\,wt)(5+8\,t+12\,w+16\,wt)}$$

dont le 1-cousin associé est donné par n=(p-1)/2=2+4t+6w+8wt. La vérification est immédiate. Il semble de plus que tout entier vérifiant le lemme 1 soit de cette forme p=5+8t+12w+16wt.

Une application du lemme 3 : pour tout entier p de la forme p=13+24k+20t+32tk, on a la décomposition :

$$\frac{4}{13+24\,k+20\,t+32\,tk} = \frac{1}{6\,k+8\,tk+4+6\,t} + \frac{1}{(13+24\,k+20\,t+32\,tk)(5+8\,k)(3\,k+4\,tk+2+3\,t)} + \frac{1}{2(5+8\,k)(3\,k+4\,tk+2+3\,t)}$$

dont le 1-cousin associé est donné par n=2+4k. La vérification est immédiate. Il semble de plus que tout entier vérifiant le lemme 3 soit de cette forme p=13+24k+20t+32tk.

4.4 La conjecture des 1-cousins et deux polynômes à trois variables

Pour retrouver facilement les polynômes donnant des décompositions au sens fort d'un nombre p égal à 1 modulo 4, partons de l'identité (6) et en conséquence avec

p=5+8v+12t+12u+16vt+12uv+16ut+16uvt+4(1+v)(1+4t+3u+4ut-w)w et calculons le triplet associé. Pour cela, de manière préalable, le triplet formel associé à l'identité (6) vaut : $[xa(ax-2z), 2z(ax-z), a^2x^2-2axz+2z^2]$, ce triplet, non forcément irréductible, est un $2z^2$-cousin. Comme z=1+w, l'examen du polynôme p avec w=0 donne immédiatement :

Lemme 4 : Pour p=5+8v+12t+12u+16vt+12uv+16ut+16uvt, l'identité forte (6) donne une décomposition associée à un 1-cousin [2n(n+1), 2n+1, 2n(n+1)+1] où

i) pour u impair n=(u+1)/2+1+u+ut ;

ii) pour u pair n=(p-1)/2+(u/2)p (voir le lemme2).

Par exemple en posant u=2+r, v=0 et en remplaçant t par 1+t, p=73+28r+44t+16rt et la décomposition s'écrit : $\frac{4}{(73+28\,r+44\,t+16\,rt)} = \frac{1}{(3+r)(73+28\,r+44\,t+16\,rt)} + \frac{1}{(20+7\,r+12\,t+4\,rt)} + \frac{1}{(73+28\,r+44\,t+16\,rt)(3+r)(20+7\,r+12\,t+4\,rt)}$.

Remarque : Ce polynôme donne une décomposition forte associée à un triplet 1-cousin pour quasiment tous les nombres premiers égaux à 1 modulo 4 ; les premières exceptions sont 193, 2521, 66529 et il n'y a pas d'autres exceptions pour $p < 10^{10}$. Fait en moins de 2 heures avec un crible basé sur 55 classes restantes modulo 9240.

Pour retrouver facilement des polynômes donnant des décompositions au sens faible d'un nombre p égal à 1 modulo 4, partons de la décomposition associée au polynôme

p=5+8u+8v+12w+12uv+12uw+16vw+16uvw et calculons le triplet associé.

Un calcul rapide montre que le triplet pythagoricien associé à cette décomposition est soit un triplet 1-cousin (pour u impair ou u=0), soit un triplet 2-cousin (pour u pair, u>0) et on a :

Lemme 5 : Pour p=5+8u+8v+12w+12uv+12uw+16vw+16uvw, l'identité faible (12) donne une décomposition associée à un 1-cousin [2n(n+1), 2n+1, 2n(n+1)+1] où

i) pour u impair n=1+3u+4w+4uw ;

ii) pour u=0, n=2+4v+6w+8vw=(p-1)/2 (voir le lemme 1).

De fait la conjecture des 1-cousins a été vérifiée rapidement jusqu'à 10^{11} au moyen d'algorithmes basés sur ces deux lemmes 4 et 5, et aussi en utilisant le fait qu'il reste 35 classes modulo 9240 posant problème ; cet ensemble de classes est {1, 169, 289, 361, 529, 841, 961, 1369, 1681, 1849, 2041, 2209, 2521, 2641, 2689, 2809, 3361, 3481, 3529, 3721, 4321, 4489, 5041, 5161, 5329, 5569, 6001, 6169, 6241, 6889, 7561, 7681, 7921, 8089, 8761}. Il a fallu quelques heures machine avec le logiciel "maple" sur un ordinateur portable pour effectuer cette vérification. Puis elle a été vérifiée jusqu'à 10^{12} avec un programme plus élaboré, basé sur 251 classes restantes modulo 120120.

Cette conjecture repose donc sur deux formules polynômiales, l'une donnant une décomposition au sens fort, l'autre au sens faible.

Généralisation

Pour le problème plus général de la décomposition de h/p en somme de trois fractions unitaires, pour $h \geq 4$, la preuve est exactement la même que celle de l'identité (13) :

soit $h/p = 1/x + 1/y + 1/z$, alors en posant $a = z - x$ on obtient une nouvelle identité associée à un triplet pythagoricien irréductible : soit $[\alpha,\ \beta,\ \gamma]$, où ces trois entiers, premiers entre eux, vérifient $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$ alors on a :

$$\frac{h}{p} = \frac{2\,\alpha}{(\beta - \alpha + \gamma)\,a} + \frac{h\,a\beta - 2\,\alpha\,p}{a\beta\,p} + \frac{2\,\alpha}{a\,(\beta + \alpha + \gamma)} \tag{14}$$

où les trois fractions du deuxième membre sont unitaires.

Remarque conclusive

Cette nouvelle forme de la conjecture est exigeante et n'est pas équivalente à la conjecture forte usuelle, elle est différente ; mais comme l'a dit un jour Paul Erdös : *"Sometimes you have to complicate a problem to simplify the solution"*. Si besoin le triplet plat [0, 1, 1] peut-être vu comme un 1-cousin, et sa forme [1, 0, 1] comme le 0-cousin ou l'∞-cousin, au vu du fait qu'il est le triplet irréductible limite des suites de d-cousins.

Enfin cette forme de conjecture basée sur les triplets pythagoriciens ne se heurte pas au mur des carrés. Ce nouveau paramétrage via les triplets pythagoriciens permettra-t-il de démontrer enfin cette conjecture ?

5 Vérification de la conjecture d'Erdös et Straus

5.1 Sur la méthode

Méthodologie suivie pour éliminer des classes, dans le cadre de la conjecture forte, dans l'exemple C19⊂Z/MZ où M=24*3*5*7*11*13*17*19, au moyen des formules 2 et 3 :

Soit A un diviseur de M, multiple de 4*19=76 ; considérons les éléments x de Z/AZ susceptibles de donner naissance à une formule 2 ou 3, i.e. la progression A*k+x permet une décomposition en somme de 3 FE de 4/(A*k+x) selon les formules 2 ou 3. Pour cela, il faut que

- 1- cette progression contienne des éléments de la forme 24*u+1 ;
- 2- cette progression A*k+x ne contienne aucun carré ; pour cela il faut que x ne soit pas un résidu quadratique dans Z/AZ. (Pour A multiple de 24 on peut également recourir aux nombres pentagonaux).
- 3- Soit C19 obtenu à partir de C17 et à partir de T(19) égal à l'ensemble des éléments de Z/19Z ne donnant pas lieu à une formule (1,2 ou 3), au moyen du lemme chinois. Il faut que x soit dans C19 modulo A, pour qu'une formule 2 ou 3 soit efficace dans le tri.

Il reste alors peu de x susceptibles de fournir une formule éliminant des classes dans Z/MZ ; d'où la rapidité de cette méthode.

Une deuxième méthode complémentaire a été mise en oeuvre ; elle consiste à partir des m possibles (et des d associés) à trouver un p de C19 tel que $A = \frac{(mp+d)}{(4m-1)a}$ (ou $A = \frac{m(p+4d)}{(4m-1)a}$) soit entier et A divisant M, alors la formule 2 (ou 3) élimine des classes. Cette méthode aussi efficace que la précédente ne donne pas forcément les mêmes formules.

La première est plus rapide pour les A petits et la deuxième pour les m et A grands, d'où l'utilisation de ces deux méthodes pour optimiser la recherche de C19 minimal.

5.2 Pour C11

A partir des résultats standards dans Z/120Z et dans Z/7Z il y a 18 classes restantes dans Z/24*3*5*7Z=Z/2520Z sont C7 = 1, 121, 169, 289, 361, 529, 841, 961, 1009, 1129, 1201, 1369, 1681, 1801, 1849, 1969, 2041, 2209. (Les formules 1, 2 et 3 n'éliminent pas d'éléments.)

Soit M11=24*3*5*7*11=27720 et calculons C11 dans Z/M11Z, à l'aide du lemme chinois on obtient 126 éléments ; puis avec les formules 1 pour m=14 et m=25 (4*m-1=5*11, 9*11 divise M11) il reste 102 éléments ; enfin avec les formules 2 ou 3 suivantes

```
[396*k+61, 9*k+9, 81], [616*k+585, 770*k+770, 23716*k+23716]
et [3080*k+2921, 5*k+5, 25*k+25]
```

(obtenues via la méthodologie décrite ci-dessus) il reste 96 éléments dans C11 :

C11=1, 169, 289, 361, 529, 841, 961, 1369, 1681, 1849, 2209, 2521, 2641, 2689, 2809, 3481, 3529, 3721, 4321, 4489, 5041, 5161, 5329, 5569, 6169, 6241, 6889, 7561, 7681, 7921, 8089, 8761, 9241, 9409, 9529, 9601, 9769, 10081, 10201, 10609, 10921, 11089, 11449, 11881, 11929, 12049, 12601, 12721, 12769, 12961, 13561, 13729, 14281, 14401, 14569, 14809, 15409, 15481, 16129, 16801, 16921, 17161, 17329, 18001, 18481, 18649, 18769, 18841, 19009, 19321, 19441, 19849, 20161, 20329, 20521, 20689, 21001, 21121, 21169, 21289, 21961, 22009, 22201, 22801, 22969, 23521, 23809, 24049, 24649, 24721, 25369, 26041, 26161, 26401, 26569, 27241.

5.3 Pour C13

A partir de C11 et du lemme chinois, C13 contient, a priori, 768 éléments de Z/MZ, où M=360360=24*3*5*7*11*13. Pour m=36, m=114 et m=322 la formule 1 permet de supprimer rapidement des classes de C13 qui n'a plus que 635 éléments. Avec la méthode exposée ci-dessus, les formules suivantes (du type 2 ou 3) permettent de supprimer d'autres classes.

```
[260*k+249, 6*k+6, k+1],
[468*k+457,26*k+26, 169*k+169],
[572*k+457, 13*k+26, 169],
[572*k+509, 13*k+13, 13],
[1560*k+1489, 6*k+6, 36*k+36],
```

```
[1716*k+1237, 39*k+39, 117],
[2860*k+2841, 44*k+44, 121*k+121],
[4004*k+3929, 14*k+14, 49*k+49],
[5720*k+2961, 26*k+26, 676],
[6552*k+6385, 26*k+26, 26],
[12012*k+11785, 21*k+21, 21] et
[36036*k+33625, 63*k+63, 567].
```

C13 contient alors 567 classes, résultat optimal.

C13=1, 289, 361, 529, 841, 961, 1369, 1681, 1849, 2209, 2521, 2809, 3481, 3721, 4489, 5041, 5329, 6241, 6889, 7921, 8089, 8761, 9409, 9601, 10201, 10609, 10921, 11449, 11881, 12601, 12769, 13729, 14569, 15409, 16129, 17161, 18001, 18769, 18841, 19009, 19321, 20329, 20521, 21121, 21961, 22201, 22801, 23521, 24049, 24649, 26569, 27889, 28081, 28681, 29929, 31201, 31249, 32041, 32761, 33049, 33289, 34609, 35281, 36481, 37129, 37249, 37489, 37801, 38809, 39601, 39649, 40681, 44521, 44641, 45049, 46201, 46489, 47161, 48049, 48409, 48889, 49009, 49729, 49921, 50521, 51529, 51769, 52441, 53089, 53881, 54289, 54961, 55441, 55969, 56281, 56809, 57121, 57961, 58081, 58249, 58969, 59929, 61681, 63001, 63361, 65209, 65521, 65641, 66049, 66361, 66889, 67369, 68041, 69001, 69169, 70009, 70249, 70849, 71569, 72361, 72601, 73441, 73921, 74281, 74881, 76129, 76561, 76729, 77401, 78961, 79249, 80089, 80161, 80809, 81481, 82681, 83329, 83521, 84529, 84841, 85801, 85849, 86641, 87481, 87649, 88201, 88321, 88729, 90721, 90841, 91081, 92401, 92569, 92689, 94249, 95209, 96121, 96721, 97969, 98569, 98641, 99961, 100489, 101929, 102001, 103009, 103321, 103489, 104329, 105121, 105169, 105361, 106129, 106681, 109201, 109321, 109561, 109729, 110881, 111049, 111409, 111721, 112561, 113401, 113569, 113689, 114409, 117049, 117121, 118561, 120121, 120409, 120481, 120649, 120961, 121081, 121489, 121801, 121969, 122329, 122929, 123481, 123601, 123841, 124609, 125161, 125449, 126361, 127009, 128041, 128209, 128881, 129529, 129721, 130321, 130729, 131041, 131569, 132001, 132889, 133849, 134689, 135529, 136249, 137281, 138121, 138889, 138961, 139129, 139441, 140449, 141241, 142081, 142321, 142921, 143641, 144169, 144769, 146161, 146689, 148009, 148201, 148801, 150049, 151321, 151369, 152161, 152881, 153169, 153409, 154729, 155401, 156601, 157249, 157369, 157609, 157921, 158929, 159721, 159769, 160801, 164641, 164761, 165169, 166321, 166609, 167281, 168169, 168529, 169009, 169129, 169849, 170041, 170641, 171649, 171889, 172561, 173209, 174001, 174409, 175081, 175561, 176089, 176401, 176929, 177241, 178201, 178369, 179089, 180049, 181801, 183121, 183481, 185329, 185641, 185761, 186169, 186481, 187009, 187489, 189121, 189289, 190129, 190369, 190969, 191689, 192481, 192721, 193561, 194041, 194401, 195001, 196249, 196681, 196849, 197521, 199081, 199201, 199369, 200209, 200281, 200929, 201601, 202801, 203449, 203641, 204649, 204961, 205921, 205969, 206761, 207601, 207769, 208321, 208441, 208849, 210841, 210961, 211201, 212521, 212689, 212809, 214369, 215329, 216241, 216841, 218089, 218689, 218761, 220081, 220609, 222049, 222121, 223129, 223441, 223609, 224449, 225241, 225289, 225481, 226249, 226801, 229321, 229441, 229681, 229849, 231001, 231169, 231529, 231841, 231961, 232681, 233689, 233809, 234529, 237169, 237241, 238681, 240241, 240529, 240601, 240769, 241081, 241201, 241609, 241921, 242089, 242449, 242761, 243049, 243721, 243961, 244729, 245281, 245569, 246481, 247129, 248161, 248329, 249001, 249649, 250441, 250849, 251161, 251689, 252121, 253009, 253969, 254809, 255649, 256369, 257401, 258241, 259009, 259081, 259249, 259561, 260569, 261361, 262201, 262441, 263041, 263761, 264289, 264889, 266809, 268129, 268321, 268921, 270001, 270169, 270481, 271441, 271489, 272281, 273001, 273289, 273529, 274849, 275521, 276721, 277369, 277489, 277729, 278041, 279049, 279841, 279889, 280921, 284761, 284881, 285289, 286441, 286729, 287401, 288289, 288649, 289129, 289249, 289969, 290161, 290761, 291769, 292009, 292681, 293329, 294121, 294529, 295201, 295681, 296209, 296521, 297049, 297361, 298201, 298321, 298489, 299209, 300169, 301921, 303241, 303601, 305449, 305761, 305881, 306289, 306601, 307129, 307609, 309241, 309409, 310249, 310489, 311089, 311809, 312601, 312841, 313681, 314161, 314521, 315121, 316369, 316801, 316969, 317641, 319201, 319321, 319489, 320329, 320401, 321049, 321721, 322921, 323569, 323761, 324769, 325081, 325441, 326041, 326089, 326881, 327721, 327889, 328441, 328969, 330961, 331081, 331321, 332641, 332809, 332929, 334489, 335449, 336361, 336961, 338209, 338809, 338881, 340201, 340729, 342169, 342241, 343249, 343561, 343729, 344569, 345361, 345409, 345601, 346369, 346921, 349441, 349561, 349801, 349969, 351121, 351289, 351649, 351961, 352081, 352801, 353809, 353929, 354649, 357289, 357361, 358801.

5.4 Pour C17

A partir de Z/17Z (dont les éléments 10, 11 et 14 sont éliminés par les formules [136*k+129, 5*k+5, k+1], [408*k+385, 6*k+6, 36*k+36] et [68*k+65, 6*k+6, k+1]), de C13 et du lemme chinois, on construit C17 qui contient, a priori, 7371 éléments.

Ici M=6126120=24*3*5*7*11*13*17. Pour m=30, m=234 et m=608, la formule 1 permet de supprimer rapidement des classes de C17 qui n'a plus que 5904 éléments. Voici la liste des formules 2 et 3 utilisées :

```
[340*k+329, 34*k+34, 289*k+289],
[612*k+601, 14*k+14, k+1],
[680*k+641, 34*k+34, 1156*k+1156],
[748*k+669, 17*k+17, 17],
[952*k+921, 17*k+17, 289*k+289],
[1496*k+1433, 6*k+6, 4*k+4],
[1496*k+1457, 22*k+22, 484*k+484],
[2244*k+2029, 51*k+51, 51],
[2244*k+1621, 51*k+51, 153],
[2244*k+805, 51*k+255, 2601],
[2244*k+2149, 6*k+6, 9*k+9],
[2652*k+2545, 17*k+17, 17],
[4420*k+4341, 14*k+14, k+1],
[5304*k+5209, 14*k+14, 4*k+4],
[5304*k+4993, 34*k+34, 68],
[6120*k+5809, 5*k+5, 25*k+25],
[6188*k+6161, 68*k+68, 289*k+289],
[6732*k+6565, 17*k+17, 17],
[8568*k+8233, 34*k+34, 68],
[8840*k+8609, 10*k+10, 100*k+100],
[11220*k+10921, 11*k+11, 11],
[13260*k+9829, 65*k+65, 845],
[14280*k+13969, 14*k+14, 14],
[15708*k+15457, 33*k+33, 33],
[18564*k+18229, 14*k+14, 49*k+49],
[19448*k+19145, 17*k+17, 289*k+289],
[21420*k+18601, 45*k+45, 675],
[26180*k+21841, 119*k+357, 14161],
[31416*k+30913, 34*k+34, 68],
[33660*k+31861, 85*k+85, 425],
[42840*k+39481, 90*k+90, 810],
[52360*k+51361, 110*k+110, 220],
[52360*k+51801, 110*k+110, 110],
[52360*k+45641, 238*k+238, 1666],
[58344*k+57649, 21*k+21, 9*k+9],
[78540*k+76441, 165*k+165, 495],
[78540*k+76609, 85*k+85, 425],
[87516*k+86161, 17*k+17, 17],
[97240*k+96801, 374*k+374, 139876*k+139876],
[157080*k+153001, 330*k+330, 990],
[157080*k+143761, 330*k+330, 3300],
[291720*k+291121, 429*k+429, 184041*k+184041],
```

```
[408408*k+362209, 442*k+442, 11492],
[437580*k+437449, 836*k+836, 121*k+121],
[556920*k+546961, 14*k+14, 196*k+196],
[556920*k+494041, 306*k+306, 15606],
[612612*k+597997, 99*k+99, 3267] et
[3063060*k+3054529, 90*k+90, 2025*k+2025].
```

Ces 48 formules réduisent C17 qui contient alors 4758 éléments. Nous pensons ce résultat optimal.

5.5 Pour C19

A partir de C17, de Z/19Z (dont les éléments 14, 15, 18 sont éliminés par des formules 1, et les éléments 8 et 12 par les formules 2 [228*k+217, 6*k+6, 9*k+9] et [152*k+145, 6*k+6, 4*k+4]) et du lemme chinois, on construit C19 qui contient, a priori, 61854 éléments.

Ici M=116396280=24*3*5*7*11*13*17*19. Pour m=24, 62, 81, 100, 366, 556, 784, 1050, 2665, 5249 et 9448, la formule 1 permet de supprimer rapidement des classes de C19 qui n'a plus que 48607 éléments. Avec les deux méthodes exposées au début, les formules suivantes permettent de supprimer d'autres classes de C19.

```
[532*k+317, 7*k+7, 49],
[532*k+485, 7*k+7, 7],
[836*k+333, 11*k+11, 121],
[836*k+773, 11*k+11, 11],
[836*k+801, 6*k+6, k+1],
[988*k+917, 13*k+13, 13],
[1292*k+117, 17*k+17, 289],
[1368*k+1321, 9*k+9, 81*k+81],
[1976*k+1921, 9*k+9, k+1],
[2584*k+2529, 17*k+17, 289*k+289],
[2660*k+401, 35*k+70, 1225],
[2964*k+2929, 26*k+26, 169*k+169],
[3876*k+3841, 38*k+38, 361*k+361],
[4180*k+4041, 11*k+11, 11],
[4180*k+3061, 55*k+55, 275],
[4180*k+3601, 11*k+11, 121],
[4180*k+421, 55*k+165, 3025],
[4940*k+3621, 65*k+65, 325],
[4940*k+4661, 65*k+65, 65],
[4940*k+1541, 65*k+65, 845],
[4940*k+2841, 65*k+260, 4225],
[5016*k+4945, 33*k+33, 1089*k+1089],
[6460*k+4741, 85*k+85, 425],
[6916*k+6749, 19*k+19, 19],
[7752*k+7705, 42*k+42, 36*k+36],
[8360*k+8001, 38*k+38, 76],
[9880*k+7081, 26*k+26, 676],
[9880*k+9681, 26*k+26, 26],
[12920*k+12889, 105*k+105, 25*k+25],
[12920*k+12689, 34*k+34, 34],
[14212*k+14045, 22*k+22, 121*k+121],
[14212*k+13949, 19*k+19, 19],
[16796*k+15893, 221*k+221, 221],
```

```
[16796*k+1749, 221*k+221, 3757],
[16796*k+16421, 13*k+13, 13],
[17784*k+17281, 9*k+9, 81*k+81],
[19380*k+12109, 95*k+95, 1805],
[19380*k+19081, 51*k+51, 51],
[21736*k+20521, 22*k+22, 242],
[25080*k+22081, 66*k+66, 726],
[28424*k+27713, 10*k+10, 4*k+4],
[29260*k+25481, 133*k+133, 931],
[29640*k+28921, 78*k+78, 156],
[32604*k+19465, 57*k+57, 3249],
[33592*k+33081, 17*k+17, 289*k+289],
[33592*k+33209, 34*k+34, 34],
[33592*k+33073, 34*k+34, 68],
[34580*k+34241, 26*k+26, 169*k+169],
[35112*k+34729, 38*k+38, 38],
[38760*k+37849, 102*k+102, 204],
[41496*k+40993, 26*k+26, 26],
[44460*k+42961, 117*k+117, 351],
[50388*k+49897, 26*k+26, 169*k+169],
[52668*k+50341, 77*k+77, 539],
[54264*k+53449, 17*k+17, 289*k+289],
[54264*k+53593, 34*k+34, 68],
[58140*k+56209, 153*k+153, 459],
[65208*k+56401, 114*k+114, 2166],
[65208*k+13081, 114*k+114, 12996],
[65208*k+64609, 114*k+114, 114],
[65208*k+64249, 17*k+17, k+1],
[71060*k+69401, 11*k+11, 11],
[71060*k+69281, 10*k+10, 25*k+25],
[81396*k+56785, 323*k+323, 6137],
[85272*k+84001, 17*k+17, 289*k+289],
[85272*k+84673, 38*k+38, 1444*k+1444],
[88920*k+87961, 26*k+26, 26],
[100776*k+99961, 38*k+38, 38],
[103740*k+99961, 65*k+65, 845],
[116280*k+108841, 306*k+306, 1836],
[116280*k+105169, 306*k+306, 2754],
[116280*k+53761, 306*k+306, 15606],
[117572*k+115949, 19*k+19, 19],
[135660*k+133561, 85*k+85, 425],
[151164*k+96085, 117*k+117, 13689],
[151164*k+149437, 117*k+117, 351],
[167960*k+167249, 65*k+65, 4225*k+4225],
[184756*k+44633, 187*k+187, 34969],
[195624*k+157177, 342*k+684, 58482],
[198968*k+198521, 238*k+238, 56644*k+56644],
[251940*k+250501, 51*k+51, 51],
[271320*k+264121, 170*k+170, 1700],
[271320*k+247801, 170*k+170, 5780],
[302328*k+297481, 18*k+18, 162],
```

```
[302328*k+299833, 34*k+34, 68],
[302328*k+297865, 17*k+17, 289*k+289],
[426360*k+422761, 418*k+418, 836],
[587860*k+574421, 247*k+247, 3211],
[596904*k+594577, 66*k+66, 4356*k+4356],
[755820*k+748921, 45*k+45, 675],
[813960*k+811609, 90*k+90, 8100*k+8100],
[1108536*k+1098529, 66*k+66, 1452],
[1293292*k+1292853, 836*k+836, 43681*k+43681],
[1511640*k+1507249, 442*k+442, 884],
[1511640*k+1506361, 90*k+90, 270],
[1662804*k+1636969, 323*k+323, 6137],
[1790712*k+1764361, 17*k+17, 289*k+289],
[2116296*k+2080345, 126*k+126, 7938],
[2586584*k+2548529, 17*k+17, 289*k+289],
[2771340*k+2766481, 165*k+165, 165],
[3325608*k+3269137, 198*k+198, 13068],
[5542680*k+5538601, 374*k+374, 139876*k+139876],
[7759752*k+7694569, 462*k+462, 15246],
[8314020*k+7983121, 495*k+495, 81675],
et
[16628040*k + 16600081, 990*k + 990, 5940],
[83980*k+61861, 1105*k+1105, 5525],
[58520*k+9521, 266*k+1330, 70756],
[116280*k+90481, 306*k+1224, 93636],
[213180*k + 29209, 1045*k + 2090, 99275],
[11639628*k + 11629297, 2261*k + 2261, 2261],
[895356*k + 272101, 1309*k + 1309, 155771],
[10581480*k + 9208921, 5814*k + 17442, 5633766],
[251940*k + 246949, 1235*k + 1235, 1235],
[3879876*k + 3610909, 4199*k + 8398, 1037153],
[16796*k + 6169, 221*k + 2652, 48841],
[1058148*k + 83917, 4199*k + 16796, 1037153],
[554268*k + 412933, 2717*k + 2717, 35321].
```

Au total 117 formules, les 104 premières sont rangées dans l'ordre croissant de la raison ; les 13 dernières ont soit une grande raison soit un grand m. Ces formules ont été obtenues par les deux méthodes qui se sont avérées complémentaires. Pour chacune des méthodes les ordinateurs ont fonctionné environ 24 heures. Nous ne savons pas si le résultat est optimal, mais il doit en être très proche.

Ces formules réduisent C19 à 42462 éléments (Marc et Michel 2010)

En conséquence la conjecture d'Erdös et Straus, au sens fort, reste à démontrer pour au plus 42462 sur 116396280 (moins de 0.04%) classes d'entiers.

Dans le cadre de la conjecture faible, en utilisant les progressions associées aux identités (9) et (10) ont "gagne" environ 6, 5% sur C19 qui a au plus 39658 éléments. Ces progressions, sont les suivantes (notation [k+rt,a,c,n° formule] (avec raison r optimisée)) :

```
> progressions13:=[[9601+12012*t, 36, 5684, f3],
[68041+4004*t, 7, 91091, f2], [129721+468*t, 96, 1053, f2],
[146161+1716*t, 3, 158353, f3], [199201+6552*t, 16, 323804, f3],
[270001+72072*t, 36, 536, f3], [319321+6552*t, 16, 3071, f3]]:
nops(C13);
```

```
                                    555

> progressions17:=[[2521+748*t, 118, 3179, f2],
[39649+39780*t, 33, 29835, f2], [39649+6732*t, 186, 55539, f2],
[47161+2244*t, 13, 129833, f3], [47161+4760*t, 110, 83300, f2],
[70009+340*t, 8, 85, f2], [83329+136*t, 10, 68, f2],
[110881+12376*t, 126, 281554, f2], [137281+14280*t, 64, 481376, f3],
[139441+1768*t, 58, 11492, f2], [174001+2244*t, 3, 2218653, f3],
[174001+952*t, 54, 1666, f2], [472921+884*t, 5, 3757, f2],
[645121+1768*t, 50, 11492, f2], [1073521+7956*t, 135, 232713, f2],
[1139041+10472*t, 602, 201586, f2], [1544761+12376*t, 560, 281554, f2],
[3366721+748*t, 7, 3179, f2], [3472561+29172*t, 13, 734591, f3],
[4503409+6732*t, 75, 55539, f2], [5057641+10472*t, 84, 201586, f2]]:

> nops(C17);
                                    4432

> progressions19:=[[371281+58520*t, 14, 6173461, f3],
[371281+3420*t, 24, 835596, f3], [380881+4940*t, 5, 6189625, f3],
[571201+4940*t, 5, 371293, f3], [571561+2660*t, 9, 2715081, f3],
[571561+88920*t, 214, 22016, f3], [733321+21736*t, 62, 8336, f3],
[944161+9576*t, 16, 2242532, f3], [944161+988*t, 92, 3211, f2],
[1378441+14212*t, 31, 39083, f2], [1499401+988*t, 5, 4873115, f3],
[1646401+9576*t, 16, 43328, f3], [1905121+11628*t, 43, 8097491, f3],
[2291041+42636*t, 157, 33701, f3], [2370601+65208*t, 36, 1876839, f3],
[2735041+3420*t, 24, 75976, f3], [3281041+19380*t, 24, 144756, f3],
[4132129+116280*t, 24, 316115136, f3], [4773001+198968*t, 558, 224933324, f2],
[5941321+16796*t, 62, 87376, f3], [7807801+116280*t, 24, 2066796, f3],
[8547361+100776*t, 166, 20301557, f3], [9221521+12920*t, 24, 67806, f3],
[14622841+15048*t, 954, 67716, f2], [14833729+255816*t, 900, 40099158, f2],
[16567321+11639628*t, 322, 89768, f3], [19840129+19380*t, 13, 52211, f3],
[1549+42636*t, 157, 9248, f3], [3373+3876*t, 126, 16473, f2],
[3745+3876*t, 33, 16473, f2], [8533+11628*t, 43, 128, f3],
[22719841+100776*t, 166, 215844788, f3], [23924209+116280*t, 24, 19546, f3],
[25237801+85272*t, 678, 20657142, f2], [26992081+35112*t, 58, 177581, f3],
[646801+162792*t, 1092, 732564, f2], [833281+83980*t, 1630, 356915, f2],
[79361881+99484*t,366,1167108,f3],[85821121+151164*t,556,1262108,f3],
[93807001+151164*t,81,33874867,f3],[45055921+11639628*t,322,25468586822,f3],
[74082241+994840*t, [404, 23572136], f3],[6859441+298452*t,1239,26636841,f2]]:

> nops(C19);
                                    39658
```

Note : parmi ces 39658 éléments de C19 il y en a 38880 dont le résidu quadratique est égal à 1 dans Z/MZ, avec M=116396280, ce qui veut dire que le résultat obtenu est très proche de l'optimal, la méthode des progressions arithmétiques ne pouvant pas éliminer ces 38880 classes.

5.6 La conjecture forte est vérifiée pour $p \leq 10^{17}$

Pour cela on construit un algorithme rapide en exploitant à nouveau les formules 1, 2 et 3, mais de manière un peu différente ; écrit en langage C++, en quelques jours d'ordinateur le résultat tombe. C'est Marc qui l'a réalisé en juin 2010.

Le programme part des 42462 éléments x de C19, considère les entiers de la forme n=n(k)=x+k*M19 avec $n \leq 10^{17}$ et M19=116396280=24*3*5*7*11*13*17*19, soumet ces entiers à des filtres associés aux $m \leq 3000$, filtres construits à partir des 3 formules de progression, puis crache les exceptions c'est à dire les nombres premiers p=n(k) pour lesquels il n'y a pas de solution [p,m,d] avec $m \leq 3000$. Pour ces quelques 76 exceptions on a très rapidement les [m,d] donnant la plus petite solution en m ; elles sont les suivantes (sous la forme [p,m,d] :

```
[[262782841917649, 3360, 4608], [1796449856316361, 3620, 200],
[2684745091369441, 3906, 186], [3470489521734481, 3080, 59290],
[4329151461442201, 3261, 3544707], [4403614584119689, 3696, 12544],
[6471697344025489, 3224, 162409], [7374266888227849, 4002, 58],
[9553458489710521, 4114, 11], [11275783853440681, 3297, 147],
[11429595378744841, 3196, 272], [11680823438410681, 3626, 1372],
[12157771055571241, 3126, 3], [13001415501910081, 4026, 366],
[14931070225783321, 3196, 2], [15228443283246649, 3416, 224],
[15476336051706721, 3056, 256], [16380330888569761, 3440, 1479200],
[16757735037429961, 3286, 203732], [17805864447944329, 3636, 36],
[19130432927992681, 3400, 17000], [19240721795785681, 4002, 348174],
[20182263194149681, 3700, 8], [20356762207454689, 3224, 99944],
[22714270650977929, 3800, 7600], [23863833314544001, 3792, 149784],
[25879528090983121, 3234, 83006], [26505165074794849, 3580, 4475],
[26521567762047121, 3174, 1679046], [31161379112235241, 3492, 12],
[32986581382525369, 4148, 126514], [34441948831960609, 3248, 7],
[37993089846752881, 5418, 2107], [38017672621485649, 3930, 5895],
[40889433828449761, 3255, 47089], [47558313980451121, 3212, 117238],
[47978410043838121, 3185, 29575], [48342196923049969, 3432, 89232],
[49496880073345849, 3724, 13034], [50348067957495169, 3096, 99846],
[53368298695721881, 3498, 1908], [56274164969214481, 3504, 256],
[57574123719746929, 3108, 1176], [57802880746576729, 3416, 56],
[59684208133856329, 3276, 273], [60734431085685289, 3213, 86751],
[65937233007335881, 3760, 128], [66699577458120049, 4150, 332],
[67317976031860009, 4752, 3456], [68468278532025241, 3380, 5200],
[69730095524565529, 3237, 89557], [69766724895909001, 3276, 1341522],
[70204897579848529, 3150, 33750], [70388172975392281, 3384, 119286],
[71478182053405009, 3206, 734174], [71648347099894321, 3484, 466856],
[71895541204761121, 3155, 9954025], [72411514811411161, 3120, 1800],
[72614384444982769, 3168, 162], [73182623060753761, 3252, 24],
[73852808462748121, 4060, 245], [75285113633354881, 4185, 2883],
[77360721602223361, 3535, 17675], [80475241086749161, 3476, 176],
[81876961742773129, 3186, 62658], [83095443221081041, 4080, 4080],
[83696917735069081, 4350, 522], [83999256444634441, 3626, 268324],
[86299701980888449, 3240, 1944], [89951080839427369, 3045, 88305],
[90407529335821681, 3102, 198], [91979751863663161, 3614, 26],
[93410179646413081, 3360, 17640], [94026883691746009, 3510, 1521],
[94898734218015121, 3290, 11045], [98105602940531761, 3132, 13456]]
```

On pourra remarquer que le plus grand m obtenu est m=5418.

6 Sur la conjecture de Sierpinski

En utilisant la même méthode (mutatis mutandis) à l'aide de l'identité (2) avec h=5 et les trois formules associées, on arrive rapidement aux résultats suivants :

– C28={1,5,17} et C45={1,2,32} puis
– C180={1}, C1260={1} et C13860={1,5041,6301,7561,8821,10081,12601} et encore
– C180180={1, 6301, 8821, 13861, 22681, 32761, 41581, 46621, 49141, 55441, 63001, 65521, 79381, 81901, 88201, 90721, 95761, 97021, 104581, 120961, 123481, 129781, 131041, 137341, 144901, 146161, 147421, 161281, 172621} qui se réduit à 29 classes.

Les formules utilisées sont les suivantes :

Pour C28 et C45

```
[4*k+3, 1, 1],
[9*k+4, 2, 1], [9*k+7, 2, 4], [9*k+8, 2, 2],
[14*k+9, 3, 1], [14*k+11, 3, 9], [14*k+13, 3, 3],
[19*k+9, 4, 2], [19*k+14, 4, 1], [19*k+15, 4, 16],
[19*k+17,4, 8], [19*k+18, 4, 4], [5*k+3, k+1, k+1],
[5*k+4, 2*k+2, k+1], [10*k+7, 2*k+2, 4*k+4],
[15*k+11, k+1, k+1], [15*k+7, k+1, 1].
```

Pour C1260 puis C13860

```
[30*k+17, 2*k+2, 2], [35*k+31, 2*k+2, k+1], [70*k+61,2*k+2, 4*k+4]
et
[44*k+29, 9, 3],[44*k+41, 9, 27], [990*k+541, 22*k+66, 484].
```

Enfin pour C180180

```
# formules 1
[39*k+19, 8, 4], [39*k+31, 8, 64], [39*k+34, 8, 1],[39*k+37, 8, 16];
# formules 2
[65*k+51, k+1, k+1],[130*k+121, 3*k+3, k+1],[390*k+361, 3*k+3, 9*k+9],
[715*k+691, 11*k+11, 121*k+121],[2860*k+2841, 132*k+132, 1936*k+1936],
[4290*k+4201, 11*k+11, 121*k+121],[4290*k+4141, 6*k+6, 36*k+36];
# formule 3
[8580*k+8101, 44*k+44, 88], [180180*k+178921, 44*k+44, 88].
```

A partir de C180180, en 12 minutes sur un ordinateur portable, on vérifie la conjecture de Sierpinski pour $p < 10^{11}$; en effectuant l'élimination pour les m<=250, il reste 77 exceptions dont les m vont de 250 à 517. Tout cela avec un programme simple que l'on peut améliorer.

Quelques essais plus tard, en utilisant $M = 2^3 * 3^2 * 5^2 * 7 * 11 * 13 * 17 * 19 * 29$ et donc C16877460600 qui compte au plus 19300 éléments (et un programme amélioré) on vérifie la conjecture de Sierpinski jusqu'à 10^{14} en moins d'une heure, avec 7 exceptions seulement pour lesquelles m>700 qui sont : [73239866170381, 704, 88], [15644214986401, 741, 507], [50975275100401, 732, 8784], [87747579727921, 1250, 25],

[3868211003581, 753, 3], [24615226112401, 741, 3] et [80315681647321, 1044, 2349].

La conjecture forte (voir remarque suivante) de Sierpinski est vérifiée jusqu'à 10^{14}, en moins d'une heure sur un ordinateur portable, (avec le logiciel maple qui est "lent" pour ce genre de calcul).

Remarque : pour h=5, l'identité (2) semble décomposer toutes les fractions 5/n, avec n impair à l'exception de six d'entre elles : n=5, 21, 45, 105, 141 et 1905 dont on obtient facilement par ailleurs une décomposition. Plus précisemment ces nombres sont : {2, 5, 6, 10, 12, 20, 21, 30, 32, 45, 46, 50, 60, 92, 102, 105, 126, 141, 182, 192, 210, 282, 320, 330, 366, 406, 600, 650, 726, 732, 842, 846, 920, 992, 1020, 1446, 1452, 1905, 1920, 2100, 2250, 2262, 3962}. Mais l'identité plus générale (3) les décompose sauf 2, 5 et 10 qui ont une décomposition élémentaire au sens faible.

Il y a une grande différence avec la situation rencontrée pour h=4, i.e. avec l'identité (1) qui semble décomposer toutes les fractions 4/n, sauf les carrés, en particulier les n=24*k+1 où k est pentagonal, ceux-ci sont décomposés à l'aide de (3).

7 Programme rapide pour h=4

Soit p un nombre premier égal à 1 modulo 4. Le programme de base suivant pour obtenir le plus petit m (avec le logiciel maple) est extrêmement rapide (plus de 20000 résolutions à la seconde).

```
with(numtheory):Dm:=[seq(divisors(m^2),m=1..10000)]:
Erdos_m:=proc(p) #essentiellement utile pour les nombres premiers;
 local m,d;global Dm;
 for m from 1 to 10000 do
    for d in Dm[m] do if (p+4*d) mod (4*m-1)=0 then return([p,[m,d]]);fi:
    od:
 od;
 return([p,echec]):#pour les carrés.
end:
```

Ce programme est optimum au sens où il donne le plus petit m possible.

Appliquons ce programme pour $p = 37993089846752881$, une des "exceptions" du record.

Erdos_m(37993089846752881,10000) ;

$$[37993089846752881, [5418, 2107]]$$

5418 est le plus petit m possible.

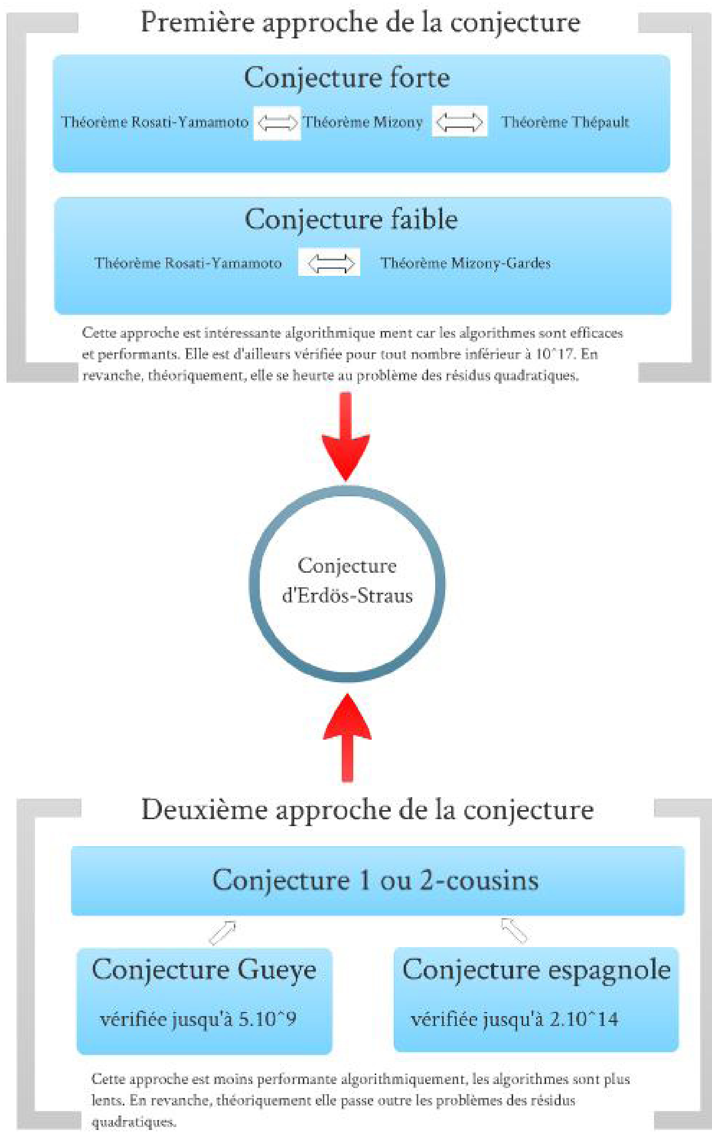
8 En guise de première conclusion

Remarque 1 : Un résultat de L. Thépault : Marie-Line Gardes qui expérimente dans des classes de lycée ce problème ouvert nous a signalé, en février 2010, un entrefilet dans le courrier des lecteurs de la revue "Pour la science" n°19 de 1979 qui stipule que s'il existe a et b tels que b divise a^2 et $4a - 1$ divise $b\,n + a$, alors $\frac{4}{n}$ est somme de trois F.E. Ce résultat oublié, i.e. non répertorié dans la littérature universitaire, est en fait équivalent à l'identité de départ (il n'est rien dit sur les conséquences, en particulier sur les progressions arithmétiques associées).

Remarque 2 : Ce texte a été écrit sur un espace (temporel) de trois ans comme récapitulation de résultats, sans effacer les précédents. Il constitue une narration de recherche, complétée tous les 3 ou 4 mois, avec une précaution à prendre : l'ordre des § ne correspond pas à un ordre temporel ; par exemple il est évident que le § sur les résidus quadratiques est venu tard et nous l'avons inséré après celui concernant les pentagonaux qu'il aurait du remplacer, mais pourquoi supprimer l'épisode des pentagonaux (équivalent mais pas intrinsèque) qui nous fut si utile pour trouver l'identité de base et les formules de progressions ?

Remarque 3 : Dans ce travail de recherche de type expérimental, le point essentiel qui est apparu est l'importance du paramétrage des solutions de ce problème : pour la conjecture forte par [m,d] et pour la conjecture faible par [a,c]. Par ailleurs si ces paramétrages nous ont permis d'exploiter au maximum ce que peuvent donner les progressions arithmétiques pour la résolution de cette conjecture, elle résiste toujours et fortement, comme en témoigne la conjecture équivalente : pour tout premier p, il existe m et d diviseur de m^2 tels que $p + 4\,d$ soit divisible par $4\,m - 1$, ou encore de manière équivalente : pour tout premier p, l'équation diophantienne $p = (4x\,y\,z - 1)a - 4y\,z^2$ admet au moins une solution.

Un bilan sur les différentes conjectures énoncées



9 Conclusion : à la recherche d'edelweiss

L'histoire commence en 1967, lorsque invité par un groupe, j'ai appris à marcher en montagne dans le massif des Grandes Rousses (c'est dans l'Oisans dans les Alpes). En 1975, après moult randonnées de nombreuses heures chaque année, je suis tombé sur un petit pré très en pente avec quelques edelweiss. C'était une fin de juillet et à 2400 mètres d'altitude (à 150 mètres près). Temps de retour au chalet 3 heures. Il m'a fallu plusieurs voyages pendant chacune des 3 années suivantes pour enfin retrouver ce paradis perdu. Là, j'ai pris mes précautions, et j'ai pris des repères (visuels) assez précis. Ainsi j'ai pu y retourner une dizaine de fois (4 à 6 heures pour la montée, 1h 30 à 3 heures pour revenir suivant la beauté des découvertes à vivre en m'écartant volontairement de la géodésique temporelle) et donc ramener chaque fois une poignée d'edelweiss. Pour moi la poignée consiste en dix edelweiss, bien qu'une fois j'en ai cueilli 12 (tenté par quel diable ?). Pour celui qui veut trouver rapidement des edelweiss il y a des coins nettement plus accessibles (en prévoyant d'emmener une faux tellement elles sont nombreuses sur une surface immense, évidemment si l'on veut ravager la planète). Mais c'est ce paradis perdu qui m'a mobilisé. Cette histoire de recherche du coin sublime d'edelweiss ressemble à celle racontée ci-dessus : c'est l'histoire de la première découverte (de la première identité) puis celle des histoires des ballades suivantes qui se sont accompagnées de bons repérages, jusqu'à cette ballade des retrouvailles (de l'identité polynomiale à 4 variables) trois ans plus tard. Le lecteur aura compris que l'on peut tout rerédiger ce papier en prenant le chemin le plus court. Mais faut-il le faire ? Chaque petit détour en montagne est tellement merveilleux.

Références

[1] Erdös P. "On a diophantine equation". (Hungarian. Russian, English summaries), Mat. Lapok 1, 1950, pp. 192-210.

[2] Rosati L. A. "Sull'equazione diofantea $4/n = 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3$." Boll. Un. Mat. Ital. 9, 59-63, 1954.

[3] Sierpinski W. "Sur les décompositions de nombres rationnels en fractions primaires" Mathesis 65 : 16-32, 1956 ; MR0078385.

[4] Yamamoto, K. "On the Diophantine Equation 4/n=1/x+1/y+1/z." Mem. Fac. Sci. Kyushu U. Ser. A 19, 37-47, 1965.

[5] Mordell L.J. "Diophantine equations", London, New York : Academic press, 1969, chapter 30.

[6] Schinzel A. "On sums of three unit fractions with polynomial denominators". Funct. Approx. Comment. Math. 28 : 187-194, 2000.

[7] Guy R. "Unsolved Problems in Number Theory", 3ème édition, Springer, 2003, problème D11, pp 252-262.

[8] Euler L. "On the remarkable properties of pentagonal numbers" ; traduction du Latin par Jordan Bell en 2005 de l'article original de 1783 : "De mirabilis proprietatibus numerorum pentagonalium", paru à St-Petersbourg, voir http ://www.eulerarchive.org.

[9] Swett A. page Internet : http ://math.uindy.edu/swett/esc.htm.

[10] L. Thépault, dans "pour la Science", n°19, 1979.

[11] M. Bello Hernandez, M. Benito et E. Fernandez, "On Egyptian fractions", arXiv :1010.2035v2, Avril 2012.

Publications des auteurs sur cette conjecture

- Gardes Marie-Line : Démarche d'investigation en arithmétique, entre essais et conjectures : Un exemple en classe de terminale scientifique, Petit x. Num. 83. p. 51-78 (2010).
- Mizony Michel : Sur la conjecture d'Erdös-Straus, Mathématice. Num. 18. (2010) .
- Marie-Line Gardes, Michel Mizony : La conjecture d'Erdös-Straus : expérimentation en classe et travail du chercheur. Repères Numéro 87 (Avril 2012) p. 79-90.
- I. Gueye and M. Mizony : Recent progress about Erdös-Straus conjecture, B SO MA S S, Volume 1, Issue 2 (2012) p. 6-14.
- M. Mizony and I. Gueye : Towards the proof of Erdös-Straus conjecture, B SO MA S S, Volume 1, Issue 2 (2012) p. 141-150.