# La variété de de Sitter et le principe de Mach

Michel Mizony, Institut Camille Jordan, Umr Cnrs 5208

Printemps 2015

**Résumé** : La variété de de Sitter $SO_o(1,4)/SO_o(1,3)$ donne naissance à de très nombreux modèles d'univers isotropes de courbure positive, nulle ou négative ; dans ce dernier cas ces nombreux modèles d'univers vérifient le principe de Mach. Par ailleurs l'égalité entre masse inertielle et gravitationnelle pose encore question bien que cette égalité soit commune à la gravitation de Newton et à celle d'Einstein. Le recours à un repère localement inertiel et pas seulement comobile permettra d'un part d'éclairer le problème de la masse inertielle puis de comparer ces modèles isotropes de de Sitter qui sont osculateurs aux modèles $\Lambda CDM$ plats, en particulier avec le modèle issu de la mission Planck. Indiscernables pour les redshift petits (z<0.6), les modèles de de Sitter osculateurs ont un indéniable avantage pour les grands redshift (z>5) car ils sont plus vieux de $2\,10^9 ans$ par exemple pour z=6 et leur âge aujourd'hui est d'environ $17 \pm 1\,10^9 ans$. Quelques considérations épistémologiques sont données.

## 1 Introduction

Qu'est-ce l'inertie ? Vieille question posée déjà par Newton car l'égalité entre la masse inertielle d'un corps et sa masse gravitationnelle est conséquence de ses équations de la gravitation. Mais "qu'est-ce l'inertie ?" puisque Einstein ([1]) adopte comme un des deux postulats de base celui de l'égalité entre la masse inertielle d'un corps et celui de sa masse gravitationnelle pour construire la relativité générale, et ceci sans pouvoir le justifier comme il le précise. Ces deux incontournables scientifiques à propos de la gravitation sont en plein accord : il y a égalité entre masse gravitationnelle et masse inertielle.

Mais qu'est-ce l'inertie ? Oui on sait qu'elle est là dans notre expérience de tous les jours, par exemple quand il s'agit d'aider un malade à se lever quand il n'a plus de forces. Et les deux trublions scientifiques géniaux que sont Foucault puis Mach dans la deuxième moitié du XIXème siècle, qu'ont-ils fait d'important pour constater et comprendre l'inertie ?

Mais qu'est-ce l'inertie ? La gageure de ce petit exposé sera de présenter le fait que la variété de de Sitter ([2]) éclaire et répond à cette question dans le but de mettre en accord Newton, Foucault, Mach, Einstein et de Sitter. Au niveau épistémologique il ne s'agit pas d'expliquer "qu'est-ce l'inertie ?" puisque c'est un metaconcept mais de comprendre qu'il y a cohérence entre ces 5 grands scientifiques sur leur compréhension de l'inertie.

Oui, l'espace mathématique abstrait $SO_o(1,4)/SO_o(1,3)$, la variété de de Sitter, où $SO_o(1,3)$ est le groupe de Lorentz, permet de répondre à ce problème. Mais cela fait appel à des résultats mathématiques multiples et difficiles, démontrés entre les années 1930 et 1975. Nos vaillants scientifiques n'avaient aucune chance de saisir que leurs approches de l'inertie, très différentes, étaient en fait équivalentes.

Comme les théorèmes mathématiques sont très techniques, la gageure de cet exposé sera heuristique, en présentant des graphes, et en donnant quelques formules que tous les astrophysiciens et astronomes connaissent ou peuvent vérifier aisément. Le but essentiel est d'aider à se débarrasser de fausses idées sur la gravitation. Ah l'inertie ! Oui mais "Ah le principe du corps en chute libre", l'histoire de l'ascenseur d'Einstein, c'est vraiment une clef ; une clef à manier avec précautions, tellement de précautions qu'il faut la saisir avec cette variété de de Sitter pour ouvrir une porte. Pour une compréhension plus en profondeur au niveau mathématique, il faudrait regarder une deuxième clef provenant des équations dites d'Euler-Lagrange pour saisir ce qu'est "le temps propre" concept de fait intimement lié à "qu'est-ce l'inertie ?".

Enfin, comme le dit Lipunov : *The Mach's principle itself is formulated as follows : inertia masses of bodies, including those of fundamental particles, are determined by the value of the cosmological term.* ([3]).

## 2 L'espace de de Sitter

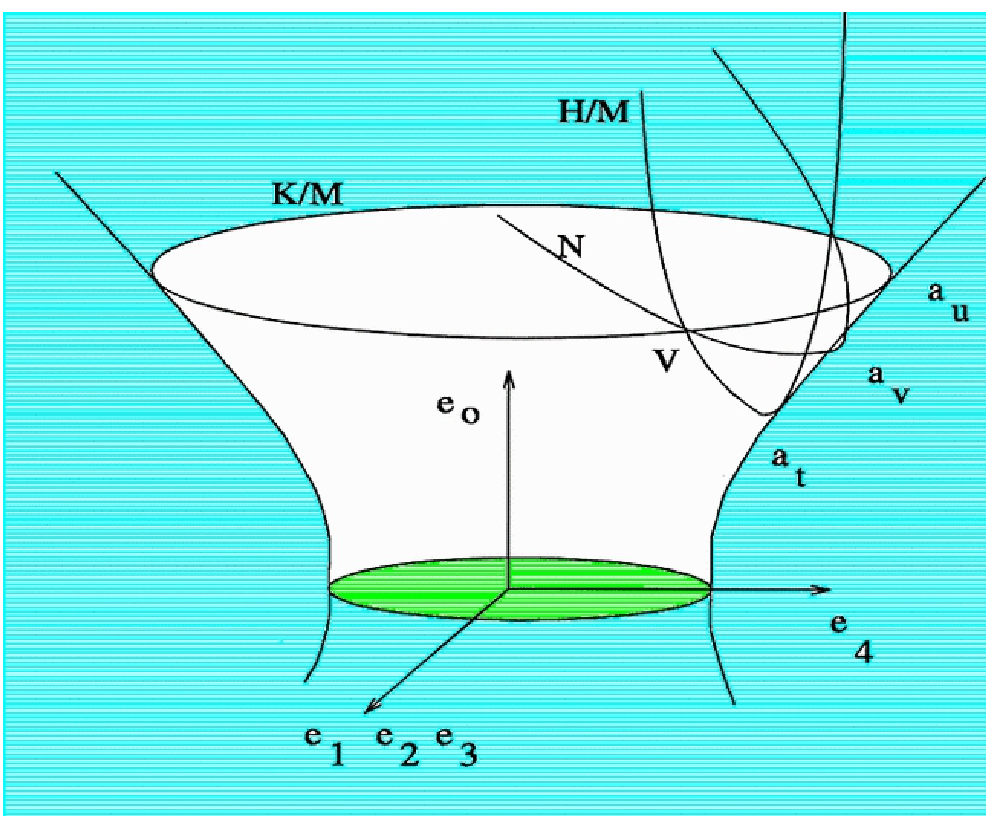

Figure 1 : elle représente l'hyperboloïde de de Sitter $\mathcal{H}_\lambda= SO_o(1,4)/SO_o(1,3)$ plongé dans l'espace $R^5$ muni de la métrique pseudo-euclidienne (+,-,-,-,-) sur la base canonique ($e_0$, $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_4$). K est le sous-groupe SO(4) des rotations du sous-espace ($e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_4$) ; H est le sous-groupe de Lorentz $SO_o(1,3)$ de l'espace ($e_0$, $e_1$, $e_2$, $e_3$) ; Le paraboloïde N est en fait un sous-groupe commutatif de $SO_o(1,4)$ qui, muni de sa métrique induite, est isomorphe à l'espace euclidien $R^3$ ; enfin $M = H \bigcap K$ est le groupe de rotations SO(3) du sous-espace ($e_1$, $e_2$, $e_3$). Les trois sous-variétés isomorphes à K/M, H/M et N de $\mathcal{H}_\lambda$ sont de dimension 3 et munies de leur métrique induite, sont de courbure respectivement +1, -1 et 0. Les points d'intersection de l'hyperboloïde de de Sitter avec l'axe $e_4$ sont $\frac{-1}{\lambda}\, e_4$ et $\frac{1}{\lambda}\, e_4$. Les 3 points $a_t$, $a_u$ et $a_v$ sont paramétrés par le sous-groupe A=$SO_o(1,1)$ du sous-espace ($e_0$, $e_4$) ; c'est le sous-groupe, isomorphe à R, des translations temporelles.

Ces résultats sont classiques et techniques ([4]) ; ils font la richesse des variétés $\mathcal{H}_\lambda$ de de Sitter ([5]) ; pour faire le lien avec des espace-temps utiles en physique il faut encore quelques notations : soit $A_+$ le sous-espace de A des translations temporelles strictement positives ; comme $SO_o(1,4)$ agit sur $\mathcal{H}_\lambda$ et sur tous les sous-groupes également notons :
$\mathcal{H}_\lambda^{-1} = HA_+H(\frac{1}{\lambda}\, e_4)$, $\mathcal{H}_\lambda^{0} = NAH(\frac{1}{\lambda}\, e_4)$ et $\mathcal{H}_\lambda^{+1} = KAH(\frac{1}{\lambda}\, e_4) = \mathcal{H}_\lambda$.

Ce sont trois ouverts de notre variété tels que les décompositions du type Cartan H$A_+$H et KAH, et la décomposition du type Iwasawa NAH donnent immédiatement un paramétrage de ces cartes et trois écritures de la métrique de $\mathcal{H}_\lambda$ sur ces sous variétés :

i) sur l'ouvert $\mathcal{H}_\lambda^{-1}$ : (1) $ds^2 = dt^2 - \frac{sh^2\lambda t}{\lambda^2}(d\alpha^2 + sh^2\alpha d\omega^2)$ ,

ii) sur l'ouvert $\mathcal{H}_\lambda^{+1}$ : (2) $ds^2 = du^2 - \frac{ch^2\lambda u}{\lambda^2}(d\xi^2 + sin^2\xi d\omega^2)$ ,

iii) sur l'ouvert $\mathcal{H}_\lambda^{0}$ : (3) $ds^2 = dv^2 - e^{2\lambda v}(d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2)$,

avec la convention usuelle sur la "sphère des fixes" $d\omega^2 = d\theta^2 + sin(\theta)^2\, d\phi^2$.

Si l'on a envie de dire que ces métriques ont la forme dite de Robertson et Walker correspondant à un modèle avec big-bang pour $\mathcal{H}_\lambda^{-1}$, éternel (celui de Bondi et Hoyle) pour $\mathcal{H}_\lambda^{0}$ ou éternel (avec une phase de contraction suivi d'une phase d'expansion accélérée) pour $\mathcal{H}_\lambda^{+1}$ est-ce que l'on obtient des métriques d'un univers isotrope ? Eh bien **non** pas encore, il reste une étape à franchir car c'est une particularité à souligner des propriétés de cette riche variété de de Sitter : soit $\lambda$ fixé, que vaut le paramètre de densité noté $\Omega(t)$ ? Sa valeur aujourd'hui, nommons la $\Omega_0$ ; de même, que vaut le paramètre de Hubble $H_0$ aujourd'hui ? Une propriété commune importante à ces trois variétés est la suivante : pour tout t (respectivement pour u et v) la constante $\lambda$ vérifie :

$$\lambda^2 = H(t)^2\, \Omega(t) = -H(t)^2\, q(t),$$

où q(t) est le paramètre de décélération. Et si $\Omega(t_1) < 1$ en un temps $t_1$ alors $\Omega(t) < 1$ pour tout t ; idem pour $\Omega(t_1) > 1$ ou $\Omega(t_1) = 1$.

# 3 Sur les modèles d'univers

D'après les observations astronomiques actuelles il semblerait que l'approximation mathématique isotrope pertinente soit celle correspondant à un événement du type "big-bang", par la suite donc on va se restreindre à la variété $\mathcal{H}_\lambda^{-1}$ muni de sa forme de métrique FLRW, cf. i) ci-dessus. Cette métrique n'est pas écrite dans un repère localement inertiel ; sa forme localement inertielle est du type forme de Painlevé ([6], [7]) :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{(dr - r\ H(t)\ dt)^2}{1 + (1 - \Omega(t))H^2(t) r^2} \ -\ r^2\ d\omega^2, \tag{1}$$

où $H(t) = \lambda / \tanh(\lambda t)$ et $\lambda^2 = \Omega(t) H(t)^2$. Cette forme dépend donc, à $\lambda$ fixé, d'un paramètre libre par exemple de la valeur $H_o$ aujourd'hui. Ainsi à chaque variété $\mathcal{H}_\lambda^{-1}$ correspond une infinité de modèles d'univers différents paramétrées par exemple par les valeurs possibles de $H_o$ où celles de $q_o = -\Omega_o$.

Illustrations à partir des dernières données de l'équipe Planck ([8]) : dans le cadre $\Lambda CDM$ plat, $H_o$ vaut 67.3 km/s/Mpc, $\Omega_m$ aujourd'hui vaut 0.31 et $q_o = (3/2)\Omega_m - 1 = -0.535$ ; si $H_o = 67.3$ on a le choix de prendre $\Omega$ entre 0.31 et 0.535, mais si on veut une meilleure adéquation avec les supernovae de redshift inférieur à 1 il faut prendre $\Omega_o = 1 - 2.1\Omega_m = 0.349$, cf. Mannheim ([10]) qui utilise la gravitation conforme qui est équivalente à la relativité générale pour les modèles de de Sitter ; ceci fixe $\lambda = 67.3\sqrt{0.349} \approx 39.8 km/s/Mpc$. Représentons les âges des univers correspondants avec 3 valeurs différentes de $q_o$ dans la variété de de Sitter osculatrice :

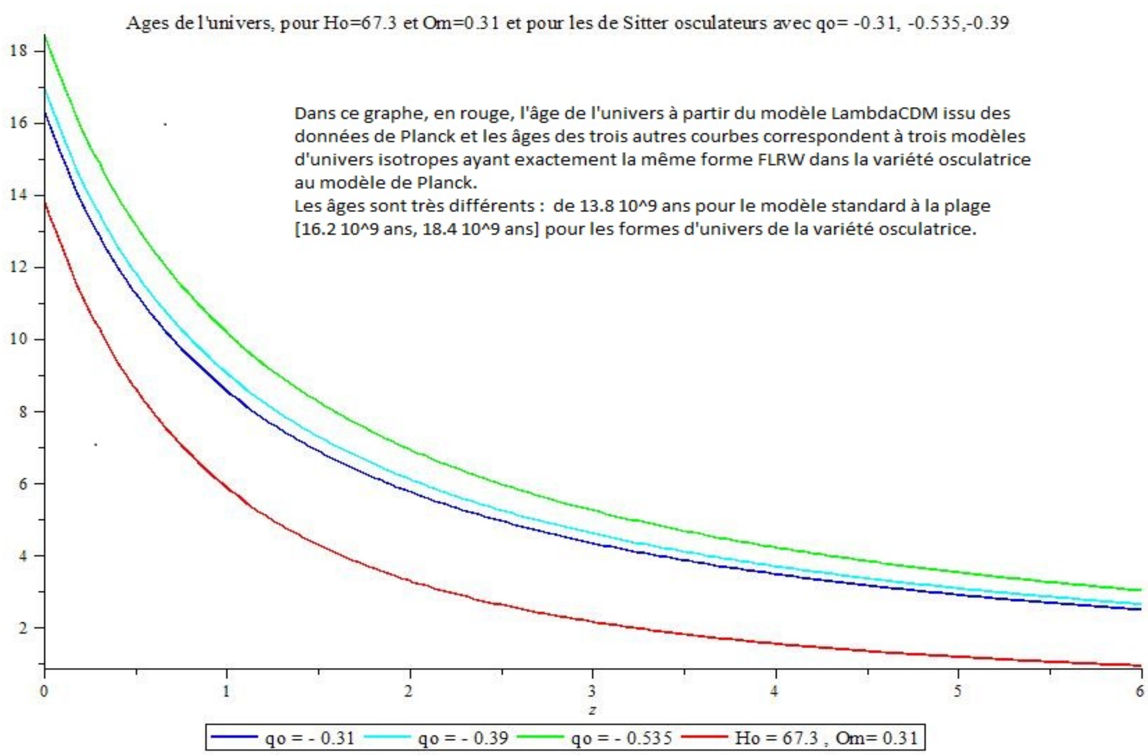


Figure 2 : En z=0, les âges des 3 modèles de de Sitter tangents aujourd'hui au modèle standard de Planck sont différents et plus grands que le fameux 13.8 ans. En z=6, le modèle standard n'a qu'un milliard d'années, les modèles de sitteriens en ont au moins deux en plus. Les valeurs de $H_o$ associées sont respectivement 71.4, 63.7 et 54.4 pour les modèles

de sitteriens.

Maintenant il faut examiner la qualité de l'approximation qui ne peut apparaître sur la figure 2 qui avait pour objectif central de montrer qu'une variété osculatrice de de Sitter donnait naissance à une infinité d'espace-temps isotropes de sitteriens différents (c'est un contre-exemple mathématique à un résultat dit "bien connu"). Le choix de privilégier la valeur $H_o = 63.7 \pm 2.3$ dans les illustrations provient d'une étude récente sur la valeur locale du paramètre de Hubble faite par Tammann et Reindl ([9]) sans faire appel aux résultats concernant le CMB (rayonnement de fond cosmologique) comme le fait l'équipe de Planck qui précise : "We emphasize here that the CMB estimates are highly model dependent" ([[8]] page 30).

Pour saisir l'aspect tangent voici ce que nous disent les distances angulaires mais d'abord donnons les formules exactes pour ces distances angulaires :

i) pour le modèle plat $\Lambda CDM$ (formule intégrale)

$$dA_{\Lambda CDM} = \frac{1}{(1+z)\,H_o}\int_0^z \frac{1}{\sqrt{\Omega_m\ (1+x)^3 + 1 - \Omega_m}}\,\mathrm{d}x\ .$$

ii) pour les modèles de de Sitter (formule analytique)

$$dA_{de\,Sitter}(z) = \frac{1}{-H_o q_o (1+z)}\ \left((1+z) - \sqrt{1+(1+q_o)z(2+z)}\right).$$

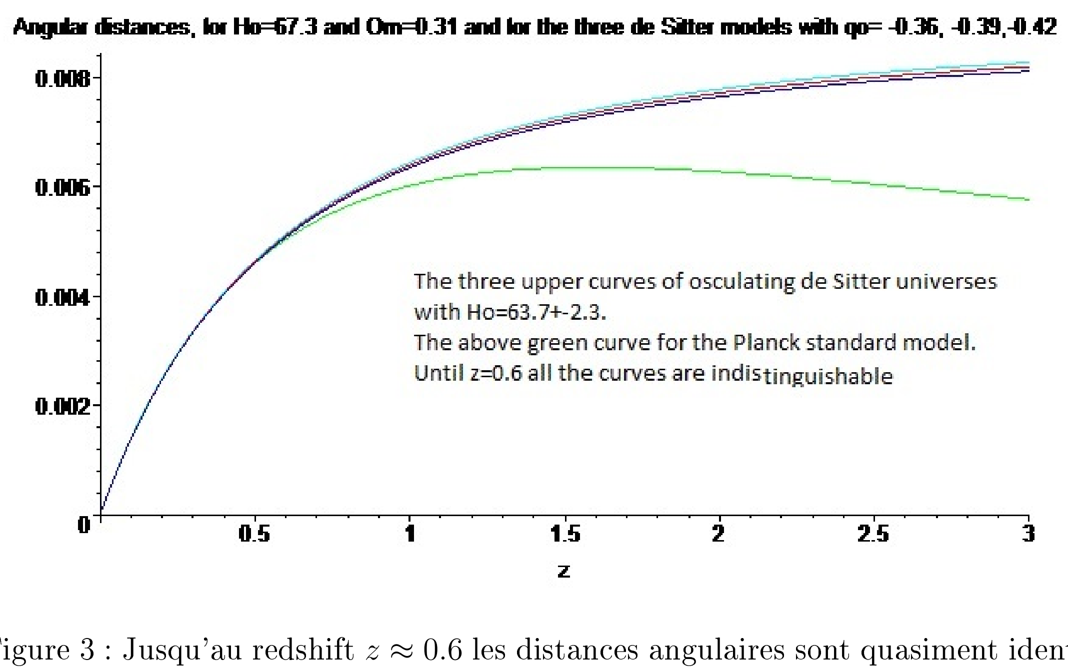


Figure 3 : Jusqu'au redshift $z \approx 0.6$ les distances angulaires sont quasiment identiques ; mais pour z>1 elles deviennent très différentes, la distance angulaire de sitterienne restant toujours croissante, celle du modèle $\Lambda CDM$ plat s'incurvant vers $z \approx 1.5$ pour tendre vers 0 à l'infini.

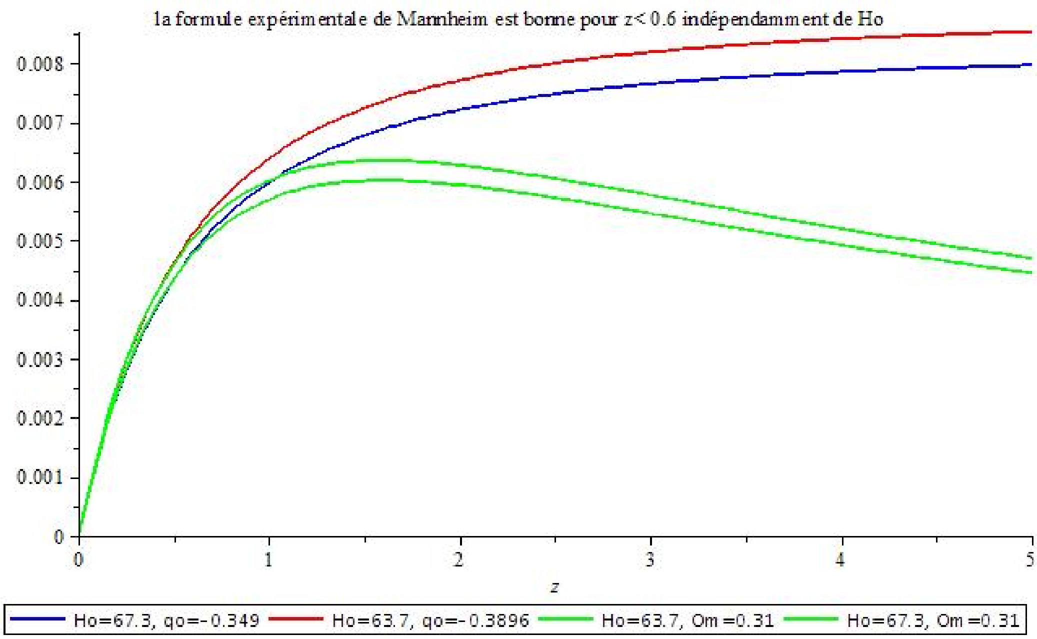


Figure 4 : Utilisation des formules expérimentales mises au point par Mannheim ([10]) en 2005 pour l'approximation pour z<1, par test du $\chi 2$ du modèle standard par un modèle de de Sitter. Jusqu'au redshift $z \approx 0.6$ les distances angulaires sont quasiment identiques, ici présentées pour deux valeurs différentes du paramètre de Hubble.

# 4 Remarques et questionnements

Une première remarque importante : mathématiquement le rayon de convergence des approximations polynomiales de ces distances angulaires (et luminosité également) est z=1. Il est donc nécessaire d'employer des formules exactes si on examine des événements à $z \geq 1$.

Pour se rendre compte de l'étendue de la bonne approximation entre les modèles, se rappeler que z=0.6 signifie environ 4.5 $10^9$ ans ou 1.5 gigaparsec. Les variétés de de Sitter sont vraiment des variétés osculatrices. La notion de courbure prend tout son sens.

Depuis quelques années des mesures de plus en plus précises sont réalisées pour des redshifts z>1, mais le sont-elles assez pour départager le modèle de Planck et les modèles de de Sitter tangents, voir les figures 3 et 4 ci-dessus ? Je ne sais pas, mais certains astronomes émettent des doutes au vu de certaines études sur la pertinence pour les grands z du modèle standard. Les distances luminosité et angulaire sont très importantes pour certaines observations dont l'interprétation dépend du type de modèles d'univers choisi ; je ne connais pas d'études utilisant les modèles de de Sitter portant sur des observations avec z>1.

Par ailleurs le paramètre de Hubble $z \to H(z)$ est très mal connu sur le plan observationnel ; pour z>1 très peu de mesures existent et les incertitudes sont encore grandes. Ce qui peut surprendre est le fait que pour les mesures de $H_o$ différentes équipes trouvent des valeurs qui s'excluent, par exemple celles utilisées pour les figures $H_o = 63.7 \pm 2.3$ et

$H_o = 67.3 \pm 1.2$. Mais les astronomes, prudents, se méfient des biais possibles surtout si les objets mesurés ne sont pas les mêmes comme c'est le cas dans cet exemple où l'étude du fond diffus cosmologique intervient pour obtenir la valeur 67.3 et n'est pas utilisée pour la valeur 63.7. Donc pour eux ces deux valeurs ne sont pas incompatibles.

Par ailleurs l'étude des galaxies lointaines à z très grand (z>5) semble indiquer que certaines contiennent des éléments lourds ce qui pose question pour le modèle standard, comme on peut le voir sur la figure 2 à z=6 ; en effet l'univers serait trop jeune pour que tant d'éléments lourds puissent s'être formés. Mais il faut encore respecter cette prudence légitime des équipes d'astronomes qui se méfient toujours des biais d'observations.

Devant ces difficultés (signalées ci-dessus et d'autres) se déroule un phénomène de production d'épicycles ou de fuite en avant. Il y a actuellement une complexification des modèles d'univers faite par des astrophysiciens pour essayer de rendre compte des difficultés du modèle $\Lambda CDM$, avec la mise en place d'extensions ad hoc avec une foule de nouveaux paramètres et autant d'épicycles supplémentaires ; mais ici cette fuite en avant semble sans espoir contrairement aux épicycles de Ptolémée et autres, dont on sait aujourd'hui que le système est mathématiquement correct, car convergeant vers la solution newtonienne.

Peut-il être envisagé que pour les z>1 les modèles de de Sitter soient utilisés pour l'interprétation d'observations faisant intervenir la distance angulaire ou la distance luminosité ? En effet si ces observations n'éliminent pas ces modèles de de Sitter alors cela donnerait du poids pour comprendre Mach et l'inertie.

# 5 Retour à l'inertie

Encore aujourd'hui l'inertie n'est pas clairement comprise et pose bien des problèmes à la plupart des physiciens ; et pourtant il y a les expériences du pendule et du gyroscope faites par Léon Foucault en 1851 et 1852 ; cette année-là Foucault a inventé le gyroscope dont on sait à quel point il sert grâce à son inertie pour l'orientation des satellites et autres sous-marins. Ces expériences furent bien interprétées par Mach : l'inertie d'un objet, c'est-à-dire sa résistance au mouvement, est le résultat de l'influence de l'univers tout entier sur cet objet. Ce principe est repris par le physicien russe V. Fock (1952) ([11], page 394). Pour que l'inertie soit comprise, il faudrait que les modèles d'univers vérifient une propriété, celle de prendre en compte ce principe de Mach, cf. Weinberg ([12], chap. 9.7).

Vers 1920 Einstein et de Sitter essaient d'appliquer ce principe de Mach. E. Cassirer ([13]) a saisi la difficulté liée au principe d'inertie mais ne connaissait pas la portée du travail de Foucault. Oui il manquait la théorie globale des variétés pour comprendre que les modèles d'univers de de Sitter provenant de $\mathcal{H}_\lambda^{-1}$ obéissaient à ce principe car ils n'ont pas d'horizon cosmologique ; par contre les modèles de de Sitter provenant de $\mathcal{H}_\lambda^{+1}$ ne vérifient pas ce principe de Mach, de même les modèles standards $\Lambda CDM$. D'où des difficultés énormes chez les astrophysiciens pour essayer de remédier au phénomène de l'horizon cosmologique en inventant des modèles inflationnaires ad hoc de l'univers. Et pourtant cette force d'inertie est utile tous les jours avec les gyroscopes pour aider à la navigation.

Regardons maintenant les coefficients non nuls du tenseur d'Einstein équivariant pour un modèle d'univers isotrope. Ils s'écrivent dans le repère inertiel de la forme 1 :

$$G^0{}_0 = -3\,H\,(t)^2\,\Omega\,(t)$$
$$G^1{}_0 = H\,(t)^3\,r\,(\Omega\,(t) + q\,(t)) \tag{2}$$
$$G^1{}_1 = G^2{}_2 = G^3{}_3 = -H\,(t)^2\,(\Omega\,(t) - 2\,q\,(t))$$

on voit bien apparaître les trois paramètres cosmologiques fondamentaux : celui de Hubble H(t), le paramètre de densité $\Omega(t)$, et le paramètre de décélération q(t). Les modèles de sitteriens n'échappent pas à ce fait, $G^0{}_0 = G^1{}_1 = G^2{}_2 = G^3{}_3 = -3H\,(t)^2\,\Omega\,(t)$. Ce tenseur est souvent interprété par analogie thermodynamique en disant que $G^0{}_0$ représente une densité d'énergie et que les $-G^i{}_i$ représentent des pressions ; pour les modèles de sitteriens ci-dessus ils représentent une densité de pression inertielle. Cette force inertielle est bien là dans ce tenseur d'Einstein qui s'oppose exactement à la force gravitationnelle pour ces modèles de sitteriens. Par ailleurs $G^1{}_0 = 0$ signifie que l'entropie est constante. Pour les modèles plats, dans le cadre standard, la pression calculée avec la forme inertielle est $G^1{}_1 = 1 - 3 * \Omega_m$. Pour le modèle de l'équipe Planck, on obtient $G^1{}_1 = -0.023 * G^0{}_0$. Où est passée l'inertie ? Dans la mesure où une analogie thermodynamique n'est qu'une analogie faisant appel à une autre théorie, ne vaut-il pas mieux dire comme Poincaré que tout se passe comme si l'inertie se présentait comme une pression dans le cadre de la théorie d'Einstein pour les modèles d'univers sans horizon cosmologique, comme par exemple ceux de de Sitter. Elle semble difficile à interpréter dans le cadre $\Lambda CDM$.

Ainsi le principe de Mach affirmant que l'inertie d'un corps provient de tout le contenu de l'univers, se traduit par une pression isotrope dans les modèles de sitteriens de courbure négative. Mach et de Sitter vont bien ensemble. Pour réconcilier Mach, Einstein et de Sitter il suffit maintenant de dire qu'il faut respecter le principe du corps en chute libre de la relativité générale, et donc utiliser un repère inertiel (au lieu d'un repère seulement comobile). Au niveau épistémologique il faut souligner que "repère inertiel" va bien avec "principe de l'égalité entre les masses inertielle et gravitationnelle". Pour ce qui est de réconcilier maintenant le trio Mach-Einstein-de Sitter avec Newton il suffit de traduire la forme de métrique dans le repère inertiel en terme de Lagrangien et de tenir compte du fait que les équations d'Euler-Lagrange sont relativistes par essence mathématique ([6]).

**Conclusion** : Nos cinq scientifiques Newton, Foucault, Mach, de Sitter et Einstein ont bien proposé le même concept de masse inertielle, malgré des approches très fortement différentes.

Pourquoi tout ceci est-il dans l'oubli aujourd'hui ? Il est si facile de faire simple en travaillant dans un repère inertiel au lieu de se noyer avec des épicycles en utilisant un repère comobile et non inertiel.

Ici il faut être clair, j'utilise des théorèmes mathématiques qui n'ont été connus qu'après 1945. Donc on ne peut pas reprocher à nos cinq scientifiques et à bien d'autres scientifiques (je pense à Eddington ([14]) et Lemaître ([15]) en particulier) de n'avoir pu avancer plus. Par contre la communauté des astrophysiciens n'a pas osé, dans son ensemble, réécrire depuis 60 ans, dans le langage des variétés, des résultats locaux justes mais qui s'avèrent faux globalement.

**Des pourquoi ?**

1. On voit souvent cette phrase : "on normalise le facteur d'échelle a(t) en prenant $a(t_o) = 1$" ce qui n'est possible que pour des univers plats ! Pourquoi ?

2. Pourquoi l'interprétation thermodynamique du deuxième membre des équations d'Einstein est-elle trop souvent faite en notation covariante, alors qu'elle doit se faire en notation équivariante, comme le faisaient en général les scientifiques avant 1940 ?

3. Evidemment pourquoi cette confusion bien trop fréquente entre repère comobile et repère inertiel ? Les équations d'Euler-Lagrange sont relativistes par essence mathématique ; certes l'expérimentation ne pouvait pas mettre en évidence ce fait avant l'arrivée d'horloges ultra précises ; mais pourquoi ce fait n'est pas signalé maintenant dans la littérature ? Et oui le concept de "temps propre" est déjà présent dans ces équations d'Euler-Lagrange.

4. Pourquoi l'aspect relationnel de la connaissance scientifique est-il si peu présent actuellement alors que le scientifique E. Kant l'avait bien mis en évidence déjà dans le cadre non quantique, avec l'expérience de la main et celle des triangles sur la sphère ?

5. Pourquoi est-il si rarement question de la complémentarité entre la mécanique quantique et la relativité comme le dit par exemple Heisenberg ([16]) ? Du fait de la transformation de Fourier sur le groupe de Poincaré, les inégalités d'Heisenberg en découlent nécessairement.

6. Pourquoi l'expression "constante cosmologique" n'est-elle pas apparue dans mon texte ? Et oui, même si elle semble omniprésente, il est simple de dire à la place "modèle de de Sitter" ou "$SO_o(1,4)/SO_o(1,3)$".

Il n'y a pas de mystère au sujet de la constante cosmologique : si on la fait apparaître (forcément facticement en oubliant ce que veut dire inertiel) elle traduira simplement la quantité de matière comobile dans un repère inertiel. Donc pas de mystère à son sujet et donc pas de soi-disant "énergie noire" comme le dit Cédric Villani ([17]). Je pense avoir fait mon travail de mathématicien à propos des théories de la gravitation ; quant à savoir si la théorie d'Einstein tiendra le coup, je ne le sais pas et personne ne peut le savoir, mais au moins qu'on la respecte dans sa mise en oeuvre, en prenant en compte correctement, mathématiquement parlant, les deux postulats de base que sont le principe inertiel et le principe du corps en chute libre.

Une équipe internationale d'astronomes, Karachentsev et autres ([18]) a récemment utilisé le concept de rayon d'attraction pour étudier l'amas de la Vierge : il n'y a pas besoin de matière noire, ou très peu, pour rendre compte de la dynamique de cet amas.

Par ailleurs des astrophysiciens, ([19]) et ([20]) par exemple, ont récemment appliqué ces idées inertielles en faisant d'une part référence au gyroscope ou à Foucault, à Milne ([21])

et de Sitter et à Mach, d'autre part en montrant que la cinématique de l'univers de Milne (et donc de de Sitter) rendait parfaitement compte des observations sur les supernovae.

Qu'est-ce le temps, qu'est-ce l'inertie ? deux méta concepts auxquels se sont confrontés Newton et Einstein et auxquels l'aventure scientifique humaine ne pourra donc jamais donner de réponse définitive ; le mathématicien ne pourra que servir cette quête de sens en essayant d'être rigoureux dans les avancées sans fin qui permettent à la science de prévoir de mieux en mieux mais jamais d'expliquer.

# Références


[1] Einstein A. *Fundamental ideas and problems of the theory of relativity* www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1921/einstein-lecture.pdf.

[2] de Sitter W., *On Einstein's Theory of Gravitation, and its Astronomical Consequences*, Third Paper, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 78 : 3-28 (1917) et *On the Relativity of Inertia. Remarks Concerning Einsteins Latest Hypothesis*, Proc. Royal Acad. Amsterdam [KNAW] 19, 1217-25 (1917).

[3] Lipunov V.M. *Mach's Principle and Cosmology Term*, http ://www.arxiv.org/abs/astro-ph/0210013v1, 2002.

[4] M. Mizony *La relativité générale aujourd'hui ou l'observateur oublié*, chapitre 7, ed ALEAS, Lyon, 2003.

[5] G. Pascu *Atlas of Coordinate Charts on the de Sitter Spacetime*, arXiv :1211.2363v1 [gr-qc] (2012).

[6] M. Mizony, *Sur la forme de Painlevé d'une métrique à symétrie sphérique*, https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00782038v2, 2014.

[7] M. Mizony et M. Lachièze-Rey, *Cosmological effects in the local static frame*, A.& A. Vol. 434, $n^o$1, Avril 2005 ; (gr-qc/0412084).

[8] *Planck intermediate results. XVI. Profile likelihoods for cosmological parameters*, arXiv :1311.1657v2 [astro-ph.CO], Dec 2013.

[9] G. Tammann and B Reindl, *The luminosity of supernovae of type Ia from TRGB distances and the value of Ho*, Astronomy and Astrophysics, 2013.

[10] P. Mannheim *Alternatives to dark matter and dark energy*, 2005, arXiv :astro-ph/0505266v2.

[11] V. Fock *The theory of Space, Time and Gravitation*, 2nd Revised Edition, Pergamon Press, 1966.

[12] S. Weinberg *Gravitation and cosmology*, John Wiley, New-York 1972.

[13] Ernst Cassirer : *La théorie de la relativité d'Einstein - Eléments pour une théorie de la connaissance*, paru en allemand en 1921 ; parution en français : les éditions du Cerf, Paris, (2000).

[14] Eddington A S *The mathematical theory of relativity*, Cambridge University Press Cambridge, 1923 ; et Mon. Not. Roy. Astr. Soc. 90, 668-678, 1930.

[15] Lemaître G. *L'univers en expansion*, Publications du laboratoire d'astronomie et de géodésie de l'université de Louvain. Vol IX (N°85 et 86) p. 171-205, 1932.

[16] Werner Heisenberg : *Le manuscrit de 1942*, publié en allemand en 1989, traduction en français, éditions du Seuil, 1998.

[17] C. Villani : *La matière noire et l'énergie sombre, je n'y crois pas* ; Ciel et Espace, mars 2013, http ://www.cieletespace.fr/a-la-une/10124.

[18] Igor. D. Karachentsev, R. Brent Tully, Po-Feng Wu, Edward J. Shaya and Andrew E. Dolphin : *Infall of nearby galaxies into the Virgo cluster as traced with HST*, arXiv :1312.6769v2 [astro-ph.GA], (2014).

[19] R. G. Vishwakarma : *A Curious Explanation of Some Cosmological Phenomena*, Phys. Scripta 5 (2013) 055901, et *A Machian approach to General Relativity*, arXiv :1508.03331v1 [gr-qc], (2015).

[20] C. Schmid : *Mach's principle : Exact frame-dragging via gravitomagnetism in perturbed Friedmann-Robertson-Walker universes with K = (±1, 0)*, Phys. Rev. D 79 (2009) 064007.

[21] E.A. Milne : *A Newtonian expanding universe* ; Q.J. Math., Vol 5, pp 64-72,(1934).

[22] H. Kaneta : *Irreducibility of some unitary representations of the Poincaré group with respect to the Poincaré subsemigroup I, II* ; Nagoya Jounal of Math., Vol 78, p. 113-136 (1980) ; Nagoya Jounal of Math., Vol 87, p. 147-225 (1982).

[23] G. Arsac : *Sur l'espace de Banach engendré par les coefficients d'une représentation unitaire d'un groupe localement compact* ; Publ. Dép. Math. Lyon, tome 13 fasc. 2, p. 1-107 (1976), et *Le groupe de Poincaré et ses représentations* ; Publ. Dép. Math. Lyon 3/C, p. 1-171 (1982) ; M. Mizony : *Analyse harmonique hyperbolique : représentations et contractions des groupes SO(1,n)* ; Publ. Dép. Math. Lyon 2/P, p. 1-27 (1982) et *Semi-groupes de causalité et formalisme hilbertien de la mécanique quantique* ; Publ. Dép. Math. Lyon 3/B, p. 47-64 (1984) ; G. Primet : *Contractions de groupes de Lie semi-simples sur le groupe de Poincaré généralisé* ; Publ. Dép. Math. Lyon 4/D, p. 1-69 (1983).

[24] N. Gisin : *L'impensable hasard*, Odile Jacob, (2012).

[25] B. d'Espagnat : *Une incertaine réalité*, Gauthiers-Villars, (1985).

[26] P. Painlevé, *La mécanique classique et la théorie de la relativité*, C.R.A.S. (Paris) **173** 677-680 (Octobre 1921) et *La gravitation dans la Mécanique de Newton et dans la Mécanique d'Einstein* C.R.A.S **173** 873-887 (Novembre 1921).

[27] J. Fric : *The relativistic form of Painlevé*, http ://www-cosmosaf.iap.fr, 2015.

# 6 Annexe 1 : le semi-groupe de causalité de de Sitter

Soit X une variété lorentzienne associée à un problème gravitationnel, alors l'espace tangent est un fibré sur X de fibre l'espace de Minkowski ; les astrophysiciens ont plus l'habitude de considérer, à juste titre, le fibré tangent de base X ayant pour fibre le cône du futur de l'origine dans cet espace de Minkowski. Ce cône est engendré par le semi-groupe de Poincaré lui-même engendré par le sous-groupe de Lorentz et le semi-groupe des translations temporelles positives du groupe de Poincaré P. Ces cônes du futur sont tous le modèle d'univers de Milne !

De même, pour tout modèle d'univers isotrope U il existe une variété osculatrice qui n'est autre qu'une des variétés de de Sitter ; ainsi on peut construire un fibré osculateur de base U et de fibre l'une des variétés de de Sitter $\mathcal{H}_{\lambda(u)}$ pour tout u de U ([7]). De plus comme pour l'espace de Minkowski on peut considérer plutôt le fibré de base U ayant pour fibre le cône du futur dans $\mathcal{H}_{\lambda(u)}$. Ce cône est engendré par le semi-groupe de de Sitter engendré par le sous-groupe de Lorentz et le semi-groupe des translations temporelles positives du groupe de de Sitter. Ces cônes du futur sont tous des modèles d'univers de de Sitter de courbure spatiale négative !

Ces semigroupes de causalité dans le groupe de Poincaré et dans le groupe de de Sitter possèdent exactement la même structure $HA_+H$, où H est le groupe de Lorentz et $A_+$ le semigroupe des translations temporelles positives de temps dans le groupe de Poincaré (respectivement dans le groupe de de Sitter). Ceci découle simplement de propriétés des décompositions du type Cartan dans les groupes de Lie ([4]).

Pourquoi donc introduire ce fibré osculateur par cônes du futur pour un modèle d'univers ? Nous venons de voir que le principe de Mach introduit vraiment l'inertie, autrement dit dans tout problème gravitationnel considéré dans le vide sidéral de Minkowski, il n'y a pas de masse inertielle et donc le principe d'équivalence n'existe pas ce qui est contradictoire avec la relativité générale.

Mais il y a d'autres causes, comme par exemple des efforts continus pour modifier la relativité restreinte basée sur l'espace de Minkowski par une relativité de sitterienne. Mais il y a une difficulté, les espaces de Hilbert construits à partir du groupe de Poincaré d'une part et du groupe de de Sitter d'autre part pour paramétrer les états possibles d'une particule de masse m et de spin j (d'hélicité j si m est nul) sont différents (par contraction du groupe de de Sitter sur le groupe de Poincaré il y a explosion en deux morceaux, résultat mathématique bien connu depuis 1970). On sait l'importance de ces espaces de Hilbert dans le cadre de la mécanique quantique.

Donc passons aux causes essentielles (car délicates sur le plan mathématique), qui reposent sur la construction des espaces d'états possibles des particules à partir du semi-groupe de causalité dans les groupes de Poincaré et de de Sitter.

i) Un japonais, H. Kaneta ([22]), a fait un travail gigantesque pour démontrer que les représentations unitaires irréductibles du groupe de Poincaré restreintes au sous semi-groupe de causalité de Poincaré restaient irréductibles. Ainsi la classification des particules élémentaire est la même si on n'utilise que le semigroupe de causalité.

ii) A Lyon, ([23]), nous avons montré sous la direction de Gilbert Arsac qui a succédé à Jean Braconnier dans le groupe de recherche en analyse harmonique, que la restriction des représentations unitaires irréductibles du groupe de de Sitter au sous semi-groupe de causalité de de Sitter se cassent en deux puis que dans la contraction vers le groupe, et donc le semigroupe, de Poincaré on retrouve les représentations irréductibles (c'est délicat mais pas trop difficile).

Ainsi les efforts pour fonder la mécanique quantique sur ce semigroupe de causalité de de Sitter sont légitimés, et la physique de laboratoire pour un corps en chute libre dans les univers de de Sitter machiens est validée.

Par ailleurs la complémentarité, chère à Heisenberg, entre la relativité générale et la physique quantique fonctionne bien. En effet ces deux théories produisent comme conséquence commune les fameuses inégalités d'Heisenberg ; ainsi, à toute petite échelle, la mécanique quantique est à utiliser, lorsque la notion de géodésique perd son sens, et à grande échelle c'est l'inverse. Mais pour des phénomènes intermédiaires comme l'intrication entre deux particules par exemple, eh bien il faut utiliser les deux ; certes on perd la "localité" dans l'espace mathématique abstrait qui permet de paramétrer l'événement physique de deux particules intriquées, mais on conserve la causalité. Physique quantique et relativité font bon ménage à toutes les échelles ; ceci est magistralement exemplifié dans le livre de vulgarisation de Gisin ([24]). Le prix à payer est très faible puisque déjà connu par Zénon, c'est le renoncement au réalisme pur et dur, plus exactement à une ontologie des mathématiques. L'intrication est là pour nous le rappeler : l'événement physique "deux particules intriquées" n'a rien à voir avec une forme de "non-localité" dans son paramétrage dans un espace mathématique abstrait qui sert pour calculer et prévoir. Par contre le prix à payer est délicat pour ce qui concerne l'obtention d'une "gravitation quantique" du fait du dédoublement de paramétrage dans un espace mathématique de l'événement physique "deux particules intriquées". A signaler que B. d'Espagnat parle du principe de séparabilité et donc de "non-séparabilité" et non pas de "non-localité" ; c'est nettement mieux car rattaché aux fonctions d'onde, "non-locales" par essence, plutôt qu'à un problème de localisation (localisation dans un espace abstrait de paramétrage ([25])). On pourra donc parler de "non-séparabilité, respectant la causalité". Mais pour moi, pas de problèmes, car ce n'est pas une quasi impossibilité d'unification mais une complémentarité et une cohérence entre ces deux grandes théories que sont la physique quantique et la gravitation qui est à établir ; je le disais déjà, sous forme de boutade en 1990 : la relativité générale est déjà quantique puisque, à travers le groupe de Poincaré, on retrouve les inégalités d'Heisenberg et donc des limites comme par exemple le fait qu'elle ne peut pas traiter les "singularités".

**Note** 1 : S. Weinberg ([12]) ne fait aucune référence à Foucault alors qu'il justifie le principe de Mach via le gyroscope (9 § 7), voir aussi (1 § 3) et (3 § 7) sur le principe de Mach. Pour V. Fock ([11]) voir en particulier les § 61 et 62 sur le paradoxe de l'horloge et surtout § 96 sur le paradoxe de Mach, lui non plus ne cite pas Foucault. Il y a un grand oublié dans cette histoire d'inertie, il s'agit de Paul Painlevé qui a donné en 1921 la forme de métrique dans un repère localement inertiel de la métrique dite de Schwarzschild ([26]), comme l'a bien mis en évidence J. Fric ([27]), en particulier le pseudo-tenseur de Landau et Lifchiftz est nul pour la forme de Painlevé 1.

**Note** 2 : Octobre 2016 : M. Novello et C.E.L. Ducap, dans "The cosmological origins of nonlinear Electrodynamics", arXiv :1608.08452v1 [gr-qc] 26 Aug 2016, disent : "The presence of $\Lambda$ is to be treated, according to Einstein's general relativity as a global property of the universe. ..., we will follow Einstein-Mach and interpret $\Lambda$ as the way the rest-of-the-universe affects any material body or energy of any kind." Ces deux auteurs disent à l'aide d'autres moyens que la constante cosmologique et le principe de Mach ne font qu'un et donnent donc corps au principe d'inertie d'Einstein. Signalons à ce propos que Cassirer en 1921 ([13]), avait proposé à Einstein d'élargir le principe de Mach en utilisant le concept de l'énergie à la place de celui de masse.

**Note** 3 : Décembre 2016, le titre de cette annexe aurait pu être de la relativité de de Sitter au semi-groupe de causalité. Pour le saisir partons du magnifique article de de Sitter de 1917, ([2]). Il commence ainsi :

*In Einstein's theory of general relativity there is no essential difference between gravitation and inertia. The combined effect of the two is described by the fundamental tensor and how much of it is to be called inertia and how much gravitation is entirely arbitrary. We might abolish one of the two words, and call the whole by one name only. Nevertheless it is couvenient to continue to make a difference. Part of the $g_{\mu\nu}$ can be directly traced to the effect of known material bodies, and the common usage is to call this par "gravitation", and the rest "inertia".*

Peu après :

*"If all matter were destroyed, with the exception of one material particle, then would this particle have inertia or not ? The school of Mach requires the answer No."*

Puis :

*"In this theory "inertia" is produced by the whole of the world-matter, and "gravitation" by its local deviations from homogeneity."*

Enfin page 10 formule (15) de l'autre article de 1917, de Sitter donne explicitement la forme dite de FLRW des modèles de de Sitter de courbure -1, en expansion accélérée et les conséquences observationnelles. Il donne d'autres formes de cette métrique, une croisée par exemple, le plongement sur l'hyperboloïde dans $R^5$, etc ; (il y a donc énormément de résultats sur ces univers de de Sitter hyperboliques d'après ses équations).

Ce que de Sitter et Einstein appelait "relativiy of inertia" est tout simplement le principe de Mach usuel disant que l'inertie d'un corps est donné par tout le contenu en matière de l'univers. Ces deux articles fondamentaux de de Sitter sont à lire et relire aujourd'hui, n'a t-il pas donné bien avant Friedman et Lemaître des formes FLRW de modèles d'univers en expansion accélérée ? Ce que ne dit pas explicitement de Sitter mais qui est sous-jacent à son travail est le fait que le champ inertiel de ses modèles en expansion nous donne la cinématique et le champ gravitationnel (perturbations locales) nous donne la dynamique.

Que manque t-il dans ces articles ? Le fait que pour tout modèle d'univers en expansion il existe toujours un univers de de Sitter qui lui soit osculateur au sens des variétés, via une forme du type forme de Painlevé, cf. ([7]). Il manque également la cinématique de de Sitter, domaine beaucoup étudié depuis une quinzaine d'années. Cette cinématique est entièrement liée à la constante cosmologique et peut être saisie plus facilement en utilisant le semigroupe de causalité de de Sitter, présenté ci-dessus, plutôt que le groupe tout entier.

Le problème : on ne peut pas faire l'impasse sur le point qui a fait difficulté pour Einstein et pour de Sitter qui dit :

*"The system B*, [c'est le nom qu'il donne pour faire référence à ses modèles], *satisfies the "mathematical postulate" of relativity of inertia, which does not appear to admit of a simple physical interprétation."* ; et pourtant en considérant que la constante cosmologique donne le champ inertiel d'un univers de de Sitter, tout s'interprète bien. De Sitter avait pourtant bien vu les choses, en distinguant $m_i$ de $m_g$ en leur attachant respectivement le champ inertiel et le champ gravitationnel. Il est dommage que ces modèles aient poussé Einstein à abandonner la constante cosmologique.

Oui, ces travaux de de Sitter ont été repris intégralement par Eddington et par Weyl, dans les 2 premiers livres pour comprendre la gravitation, avant 1923, avec les mêmes interrogations sur le sens des concepts ; oui, aussi bien de Sitter que Weyl et Eddington connaissaient profondément les différences entre problèmes locaux et problèmes globaux. Pourquoi ceci a-t-il été oublié ? Pour comprendre $m_i{=}m_g$ il est nécessaire de comprendre cette différence (de nature mathématique) entre local et global. Pour comprendre cinématique $\neq$ dynamique, là je m'adresse à mes collègues mécaniciens et physiciens. J'ose dire que la cinématique relève des "invariants" d'une théorie, c'est global, et que la dynamique relève du problème posé, c'est local.

$m_i{=}m_g$ exprime bien cette problémaique entre le local et le global et donc le "champ inertiel" est profondement différent du "champ gravitationnel".

| | | |
|---|---|---|
| **Sur l'inertie** | **une synthèse** | |
| **Masse inertielle** | $=$ | **Masse gravitationnelle** |
| | $\uparrow$ | |
| | conséquence pour Newton,<br>principe *a priori* pour Einstein | |
| **pour Mach, Foucault** | $\downarrow$ | **et pour de Sitter** |
| $\downarrow$ | | $\downarrow$ |
| modèle de l'univers<br>champ inertiel | | problème gravitationnel local<br>champ gravitationnel |
| $\downarrow$ | | $\downarrow$ |
| **cinématique**<br>principe cosmologique | $\neq$ | **dynamique**<br>surdensité sphérique |
| $\downarrow \searrow$ | | $\swarrow \downarrow$ |
| | observateur inertiel de Painlevé | |
| semigroupe de de Sitter | | $\downarrow$ |
| $\downarrow$ | | $\downarrow$ |
| modèles de de Sitter, k=-1 | SNIa un effet cinématique | métrique de Kottler |