Sur la forme de Painlevé d'une métrique à symétrie sphérique

Michel Mizony
Institut Camille Jordan, Umr Cnrs 5208

Vaulx-en-Velin, printemps 2011

Résumé
En 1921 Paul Painlevé a établi, sans faire un seul calcul, une métrique solution du champ créé par le soleil dans un univers vide. Nous allons montrer comment cette forme de métrique d'une part fourni des solutions pour tout problème gravitationnel ayant une symétrie sphérique, en particulier pour tout modèle d'univers isotrope, et d'autre part établit le passage entre la théorie de Newton et celle d'Einstein de la gravitation. Pour cela nous donnerons la définition newtonienne d'un Lagrangien de Painlevé, et un lemme que nous appellerons théorème de Painlevé qui justifie la forme générale de métrique de Painlevé pour tout problème à symétrie sphérique. Autrement dit le traitement newtonien en utilisant les équations d'Euler-Lagrange dans lesquelles la variable libre temporelle est identifiée au temps propre du corps en chute libre radiale, est équivalent au traitement einsteinien.

1 Deux exemples emblématiques

1.1 La métrique de Painlevé proprement dite

Paul Painlevé [1] part de la métrique de la relativité restreinte :

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2d\omega^2, \tag{1}$$

écrite en coordonnées polaires, où $d\omega^2 = d\theta^2 + sin^2(\theta)d\phi^2$.

Puis il considère la vitesse de chute newtonienne $v(r) = -\sqrt{\frac{2M}{r}}$, où M est la "masse relativiste" du soleil et il met cette vitesse (classique) dans la métrique (1) de Minkowski de la manière suivante :

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dr + \sqrt{\frac{2M}{r}}dt)^2 - r^2d\omega^2. \tag{2}$$

Le tour est joué, cette métrique est solution des équations d'Einstein dans le vide, comme on peut le vérifier rapidement. La même année 1921 et indépendamment, Gullstrand établit ce même résultat [2].

Est-ce un hasard ? Où cette forme de métrique cache-t-elle un trésor ?

Notons tout de suite que le temps t dans cette métrique est le *temps propre du corps en chute libre* radialement ; notons également qu'en faisant un changement de la coordonnée temporelle pour éliminer le "terme croisé" en $dt\,dr$ on obtient évidemment la forme dite de Schwarzschild dont la variable temporelle n'a pas de signification immédiate évidente. Notons encore que ce changement de variable n'est valide que dans le domaine $r > 2M$ et $r > R_o$ où R_o est le "rayon" (mathématiquement le rayon de courbure) de l'objet astral sphérique considéré (le soleil, une étoile à neutrons, un amas globulaire, un amas de galaxies dans une approximation sphérique, ...).

Considérons maintenant un corps d'épreuve qui à l'instant t_o est à une distance r_o du soleil et est animé d'une vitesse purement radiale d'éloignement v_o (on peut évidemment penser à un satellite comme Pioneer). Une métrique de la forme de celle de Painlevé dont la variable temporelle est celle du temps propre du satellite existe-t-elle ? La réponse est non seulement positive mais de plus instructive : la métrique

$$ds^2 = c^2dt^2 - \frac{(dr - \sqrt{v_o^2 - \frac{2M}{r_o} + \frac{2M}{r}}dt)^2}{1 + v_o^2 - 2\frac{M}{r_o}} - r^2d\omega^2\,. \tag{3}$$

répond à la question en mettant en évidence d'une part la constante du mouvement $v_o^2 - 2\frac{M}{r_o}$ et d'autre part le potentiel $\Phi(r) = M/r$. Posons alors $v(r) = \sqrt{v_o^2 - \frac{2M}{r_o} + \frac{2M}{r}}$ et $K(r) = v(r)^2 - 2\Phi(r)$, cette métrique (3) s'écrit :

$$ds^2 = c^2dt^2 - \frac{(dr - v(r)dt)^2}{1 + K(r)} - r^2d\omega^2\,. \tag{4}$$

Remarques :

A) - Formes entrante et sortante.

La métrique (3) qui correspondant à $v_o > 0$, généralise la forme de Painlevé dite sortante. Pour $v_o \leq 0$ on pose $v(r) = -\sqrt{v_o^2 - \frac{2M}{r_o} + \frac{2M}{r}}$ (K(r) ne changeant pas), i.e. on introduit le signe de v_o, alors la métrique (4) généralise la forme de Painlevé usuelle, dite entrante.

B) - Forme de Martel et Poisson, conditions initiales à l'infini spatial.

En 2000 K. Martel et E. Poisson donnent une généralisation de la forme de Painlevé entrante, dépendant d'un paramètre noté p. Pour l'obtenir on prend pour v(r) la limite quand r_o tend vers l'infini de $-\sqrt{v_o^2 - \frac{2M}{r_o} + \frac{2M}{r}}$, i.e. $v(r) = -\sqrt{v_o^2 + \frac{2M}{r}}$. On pose alors

$p = \frac{1}{(1+v_o^2)}$ et $dT = \sqrt{p}dt$. Ainsi la forme de Martel et Poisson provient des conditions initiales r_o =infini, $v_o \leq 0$.

C) Paramétrage de ces formes généralisées.

Ainsi pour chaque couple de conditions initiales (r_o, v_o) d'un mouvement radial en chute libre, il existe une forme de Painlevé généralisée telle que le temps propre de ce mouvement radial soit le temps de cette métrique. Ce qui fait un énorme nombre (autant que les mouvements radiaux) de formes différentes de la métrique dite de Schwarzschild.

Le point le plus important est de noter que les formes (entrante et sortante) de Painlevé, la forme de Martel et Poisson, et celles données par la formule (3) sortante et la formule similaire entrante avec $v_o \leq 0$) sont toutes de la forme (4).

En résumé, on prend, à partir de conditions initiales v_o et r_o, la "vitesse radiale newtonienne" v(r), le potentiel newtonien puis la constante du mouvement K ; on glisse ces résultats dans la formule (4), il ne reste plus qu'à vérifier les équations d'Einstein.

Cette forme (4) a aussi été obtenue, par une preuve différente, pour un effondrement gravitationnel en 2010, cf. [9].

Il reste alors à comprendre pourquoi ça marche, ce qui est l'objet des § suivants.

1.2 Sur les formes de métriques d'univers isotropes

Soit donc un modèle de Friedmann-Lemaître, avec sa métrique de Robertson-Walker

$$ds^2 = c^2dt^2 - R^2(t)(dx^2 + f_k^2(x)\ d\omega^2), \tag{5}$$

où $f_k(x) = x,\ \ \sin(x)$ ou $\sinh(x)$ suivant la courbure spatiale $k = 0,\ 1$ ou -1.

Puis avec la forme localement inertielle "ici et aujourd'hui" :

$$ds^2 = c^2dt^2 - \frac{R^2(t)}{R^2(to)} \left(dy^2 + R^2(to) f_k^2(\frac{y}{R(to)})\ d\omega^2\right)\ . \tag{6}$$

Passons maintenant à la forme avec un terme croisé en posant $r = R(t)\ f_k(\frac{y}{R(to)})$:

$$ds^2 = c^2dt^2 - \frac{(dr - r\ H(t)\ dt)^2}{1 + (1 - \Omega(t))H^2(t)r^2}\ \ -\ r^2\ d\omega^2. \tag{7}$$

Important : la forme croisée (7) est localement inertielle tout au long de la ligne d'univers de l'origine. Cette forme croisée qui est du type forme de Painlevé, permet donc, grâce à cette propriété, une interprétation immédiate du tenseur impulsion-énergie.

Le domaine de validité de cette forme est défini pour tout t tel que $H(t) > 0$ par $r < \frac{c}{H(t)\sqrt{\Omega(t)}}$.

Remarquons que cette forme (7), est simple et facilement interprétable en gravitation newtonienne ; $(1 - \Omega(t))\ H^2(t)\ r^2 = H^2(t)\ r^2 - \Omega(t)\ H^2(t)\ r^2$ a une interprétation évidente en terme d'énergie cinétique et énergie potentielle ($1/2\ mH^2r^2 - 1/2\ mH^2\Omega r^2$, pour une particule d'épreuve).

Posons alors $v(t,r) = H(t)r$, $\Phi(t,r) = \Omega(t)\ H^2(t)\ r^2/2$ et $K(t,r) = v(t,r)^2 - 2\Phi(t,r)$, cette métrique (7) s'écrit :

$$ds^2 = c^2dt^2 - \frac{(dr - v(t,r)dt)^2}{1 + K(t,r)} - r^2d\omega^2\,. \tag{8}$$

Remarque sur l'accélération : dans les deux exemples traités, résumés dans les formes (4) et (8) ci-dessus, posons $\gamma(t,r) = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r}$, qui a le sens de l'accélération à laquelle le corps en chute libre radiale est soumis, accélération calculée dans son temps propre, alors l'équation newtonienne suivante est vérifiée :

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{v\,\partial t}\ .$$

2 Forme de Painlevé d'une métrique à symétrie sphérique

Définition d'une métrique de Painlevé : Soit la donnée a priori d'une part d'une "vitesse de chute radiale" $v(t,r)$ et d'autre part d'un "potentiel" $\Phi(t,r)$; nous dirons que la forme de métrique

$$ds^2 = c^2dt^2 - \frac{(dr - v(t,r)dt)^2}{1 + v(t,r)^2 - 2\Phi(t,r)} - r^2d\omega^2\,. \tag{9}$$

est une métrique de Painlevé si $v(t,r)$ et $\Phi(t,r)$ sont compatibles au sens où elles vérifient l'égalité de l'accélération :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{v\,\partial t}\ . \tag{10}$$

Nous appellerons alors $K(t,r) = v(t,r)^2 - 2\Phi(t,r)$ la "constante du mouvement".

2.1 Le tenseur d'Einstein équivariant

Afin de comprendre cette forme de métrique de Painlevé, écrivons le tenseur d'Einstein de cette métrique d'une part sans l'hypothèse de compatibilité (10), puis avec cette hypothèse. Les calculs sont "rapides" avec l'aide d'un logiciel de calcul formel.

Soit donc $R_{\mu\nu}$ le tenseur de Ricci, R son contracté usuel, $G_{\mu\nu}$ le tenseur d'Einstein covariant. Notons encore $G^{\mu}{}_{\nu}$ la forme équivariante de ce tenseur et enfin $G^{\mu}{}_{\nu;\mu}$ les équations dites de conservation, tout cela dans les notations usuelles de la Relativité Générale.

Voici certaines des valeurs du tenseur équivariant :

$$G^0{}_0 = -2\,\frac{\Phi\,(t,r) + r\frac{\partial}{\partial r}\Phi\,(t,r)}{r^2}$$

$$G^0{}_1 = 2\,\frac{-\left(\frac{\partial}{\partial r}\Phi\,(t,r)\right) v\,(t,r) - \frac{\partial}{\partial t}\Phi\,(t,r) + \left(\frac{\partial}{\partial r} v\,(t,r)\right)(v\,(t,r))^2 + v\,(t,r)\,\frac{\partial}{\partial t} v\,(t,r)}{r\left(1 + (v\,(t,r))^2 - 2\,\Phi\,(t,r)\right)}$$

$$G^1{}_0 = 2\,\frac{\frac{\partial}{\partial t}\Phi\,(t,r)}{r}$$

Les trois autres composantes non nulles $G^1{}_1$, et $G^2{}_2 = G^3{}_3$ sont très compliquées.

On remarquera une propriété importante : l'équation $G^0{}_1 = 0$ est équivalente à l'équation de compatibilité (10) entre la vitesse et le potentiel.

Sous cette hypothèse de compatibilité les éléments non nuls du tenseur deviennent :

$$\begin{aligned}
G^0{}_0 &= -2\,\frac{\Phi + r\frac{\partial}{\partial r}\Phi}{r^2}\\
G^1{}_0 &= 2\,\frac{\frac{\partial}{\partial t}\Phi}{r}\\
G^1{}_1 &= -2\,\frac{vr\frac{\partial}{\partial r}\Phi + v\Phi + r\frac{\partial}{\partial t}\Phi}{r^2 v}\\
G^2{}_2 = G^3{}_3 &= -\frac{2\,v^2\frac{\partial}{\partial r}\Phi + r\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Phi\right)v^2 + v\frac{\partial}{\partial t}\Phi + rv\frac{\partial^2}{\partial r \partial t}\Phi - r\left(\frac{\partial}{\partial r}v\right)\frac{\partial}{\partial t}\Phi}{rv^2}
\end{aligned} \tag{11}$$

Ce tenseur d'Einstein particulièrement simple peut alors être identifié au tenseur impulsion énergie $T^\mu{}_\nu$ et interprété via l'analogie thermodynamique (cf. Weinberg chap. 2.11) [7].

Un calcul rapide montre que les équations de conservation $G^\mu{}_{\nu;\mu} = 0$ sont automatiquement vérifiées.

Une autre vérification rapide montre que si $t- > r(t)$ paramètre une géodésique radiale, alors $K(t, r(t))$ est constante le long de celle-ci, d'où son nom de constante du mouvement ; plus précisément $\frac{d}{dt}K(t, r(t)) = 0$ est équivalent à la condition de compatibilité (10).

Résumons les résultats sous la forme d'un lemme que l'on appellera **théorème de Painlevé** :

Lemme : Soit une forme de métrique (9) donnée par $v(t, r)$ et $\Phi(t, r)$ et soit $K(t, r) = v^2 - 2\Phi$; les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) cette métrique est une forme de Painlevé, i.e. v et Φ sont compatibles ;
- ii) $K(t, r(t))$ est constante le long des géodésiques radiales $t- > r(t)$;
- iii) $G^0{}_1 = 0$;

et en conséquence les équations de conservation sont vérifiées. On remarquera, comme autre conséquence importante, la linéarité en Φ du tenseur équivariant $G^\mu{}_\nu$, ce qui n'est pas le cas du tenseur covariant ; les potentiels peuvent s'ajouter.

2.2 Le tenseur impulsion-énergie équivariant

Interprétation thermodynamique : après avoir étudié les propriétés du tenseur géométrique, le premier membre des équations d'Einstein, passons au deuxième membre des équations $G^{\mu}{}_{\nu} = -\kappa T^{\mu}{}_{\nu}$ où $\kappa = 8\pi G/c^4$ avec G désignant la constante de Newton ; les éléments non nuls s'écrivent :

$$\begin{array}{l} T^0{}_0 = \rho \\ T^1{}_0 = v(\rho + p_r) \\ T^1{}_1 = -p_r \\ T^2{}_2 = T^3{}_3 = -p_t, \end{array} \qquad (12)$$

où ρ désigne une densité de matière-énergie, p_r une "pression radiale" et p_t une "pression tangentielle" ; le terme croisé $T^1{}_0$ dont l'écriture découle de l'identité $G^1{}_0 = v\,(G^0{}_0 - G^1{}_1)$, traduirait une "dissipation ou échange d'énergie" de ce fluide thermodynamique ; la nullité de $T^1{}_0$ est équivalente à la constance de l'entropie pour un modèle cosmologique, (cf. [7] formule 15.6.13).

Un problème se pose : Faut-il utiliser l'analogie thermodynamique avec le tenseur d'Einstein covariant, équivariant ou contravariant ? Regardons ce que cela donne pour un fluide cosmique (isotrope). Le tenseur équivariant est de loin le plus simple, et si l'on considère les éléments diagonaux des tenseurs covariant et contravariant, ils ne donnent pas directement la densité d'énergie ni la "pression", il y a un parasitage par des grandeurs géométriques. Dans le tenseur équivariant il apparaît une séparation entre d'une part les éléments matriciels thermodynamiques (la diagonale et la partie triangulaire inférieure) et d'autre part les éléments de nature plus géométrique et de cohésion (la partie triangulaire supérieure). Pour les modèles de de Sitter, caractérisés par $q(t) = -\Omega(t)$, c'est particulièrement évident pour les éléments diagonaux ; de plus $G^1{}_0$ étant nul, il n'y a pas dissipation d'énergie, ce qui semble raisonnable.

Problème à suivre, car si l'analogie thermodynamique restera toujours un bon guide en relativité générale, dans le cadre de la forme de Painlevé d'une métrique sa pertinence semble vraiment être du côté du tenseur équivariant (11) qui est d'une grande simplicité.

2.3 Le passage de Newton-Euler-Lagrange à Einstein

Soit le mouvement en chute libre radiale d'une particule d'épreuve dans le cadre d'un problème gravitationnel à symétrie sphérique. Supposons que dans le cadre newtonien nous connaissions sa "vitesse" de chute $v(t,r)$ et le potentiel $\Phi(t,r)$ auquel cette particule est soumise. Pour que son accélération soit bien définie, il faut que

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{v\,\partial t}\ .$$

Appelons $K(t,r) = v(t,r)^2 - 2\Phi(t,r)$, l'invariant du mouvement lié à la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle et prenons le Lagrangien :

$$2\,L = \frac{(\dot{r} - v(t,r)\dot{t})^2}{1 + v^2(t,r) - 2\Phi(t,r)} + r^2\dot{\omega}^2\ .$$

Notons que "$\dot{}$" désigne une dérivation par rapport à une variable abstraite, souvent notée λ (parfois p). Ce Lagrangien vit sur R^3.

Avant d'appliquer le théorème d'Euler-Lagrange nous avons la liberté de poser deux axiomes ou postulats.

Postulat 1 : la vitesse de la lumière est un invariant fini.
Postulat 2 : le paramètre abstrait λ désigne le temps propre du corps en chute libre.

Dans ce cadre la vitesse c est introduite pour obtenir le "Lagrangien de Minkowski" le long de la ligne d'univers du corps en chute libre radiale. Et en conséquence de ces deux postulats nous devons compléter le Lagrangien ci-dessus en posant :

$$2\,L = -c^2\dot{t}^2 + \frac{(\dot{r} - v(t,r)\dot{t})^2}{1 + v^2(t,r) - 2\Phi(t,r)} + r^2\dot{\omega}^2\ . \tag{13}$$

Ce Lagrangien vit maintenant sur un ouvert de R^4, muni d'un Lagrangien (et non pas d'une métrique). Osons appeler ce Lagrangien du nom de Painlevé.

Les équations d'Euler-Lagrange nous fournissent les équations des trajectoires et bien évidemment on retrouve la vitesse de chute radiale v. Les trajectoires solutions s'interprètent comme les chemins les plus *économes* (ou parfois les moins économes du fait de la nature mathématique des équations d'Euler-Lagrange) car $K(t,r)$ reste constante le long de ces chemins.

Le traitement complet dans ce cadre de Newton-Euler-Lagrange est achevé. Il reste cependant à préciser l'ouvert de R^4 sur lequel le Lagrangien est défini ; cet ouvert dépend du problème considéré, en particulier $1 + K(t,r)$ doit rester strictement positif.

Que reste-t-il à faire sinon à établir la forme covariante de cette théorie ? Rappelons d'abord que l'exigence de covariance est de nature logico-mathématique avant tout, même si elle peut aider à rendre la forme des équations indépendante de l'observateur et donc être pratique pour le physicien.

Le fait que les équations des géodésiques de la métrique canoniquement associée au Lagrangien (13) soient équivalentes aux équations d'Euler-Lagrange nous donne alors la forme covariante cherchée en l'occurrence la forme de Painlevé d'une métrique (qui existe toujours au moins localement), et on obtient une reformulation dans le cadre de la relativité générale.

Il n'en reste pas moins vrai que la relativité générale apparaît explicitement ici, pour les problèmes gravitationnels à symétrie sphérique, comme une réalisation covariante de la théorie de Newton-Euler-Lagrange, un point c'est tout, même si c'est beau et extraordinaire. Notons que les équations d'Euler-Lagrange sont relativistes, par essence mathématique, du fait de la variable libre λ. Le point important est de postuler que cette variable libre est le temps propre de la pièce mobile (en mécanique Lagrangienne classique), ici du corps en chute libre. C'est la clef du passage de Newton à Einstein (via la trouvaille de Painlevé). Signalons enfin que "les chemins les plus économes" deviennent "les chemins les plus courts" dans cette reformulation. C'est cet aspect que Painlevé avait bien compris me semble-t-il ; par contre il n'avait pas saisi la nature relativiste des équations d'Euler-Lagrange, ce qui n'a rien d'étonnant car à l'époque les horloges n'étaient pas suffisamment précises pour distinguer la variable temporelle λ ou le temps propre du corps en chute libre, du temps du laboratoire ou de l'observateur. Par contre Poincaré avait bien compris la nature relativiste des équations d'Euler-Lagrange comme en témoigne en 1905 l'avènement de la relativité restreinte ; avec une formulation lagrangienne par Poincaré et une formulation métrique par Einstein.

En résumé on pourrait dire que pour tout problème gravitationnel à symétrie sphérique :
Poincaré et Painlevé $\Rightarrow$ (Newton-Euler-Lagrange $\Leftrightarrow$ Einstein).

3 Le soleil dans l'univers

Considérons maintenant le problème du champ du soleil dans un univers que l'on supposera être dans un premier temps un des univers de de Sitter.

Soit M la masse du soleil et, comme un univers de de Sitter est caractérisé par le fait que $H(t)^2\Omega(t)$ est une contante, notons λ^2 cette constante, suivant l'usage en astrophysique. (Il y a autant de modèles d'univers de de Sitter distincts que de valeur du paramètre λ).

Notons encore r_o le rayon d'attraction du soleil dans cet univers, ce rayon est défini par l'annulation de l'action du potentiel en ce point donc par $M = \lambda^2 r_o^3$; en effet par intégration de l'équation d'Einstein ${G^0}_0 = -3\lambda^2$ on obtient le potentiel $\Phi = \frac{\lambda^2 r^2}{2} + M/r$.

Il reste alors à trouver la vitesse de chute radiale qui doit être compatible avec le potentiel. Il faut intégrer l'équation de compatibilité (10)

$$\frac{\partial v(t,r)}{\partial t} + v\frac{\partial v(t,r)}{\partial r} = \frac{\partial \Phi_{M,U}(r)}{\partial r} \ .$$

Il est immédiat de vérifier que pour chaque solution v de cette équation, les équations d'Einstein sont valides et donc on aura une forme de Painlevé. Si l'on se restreint à trouver les solutions statiques, alors celle qui s'annule au rayon d'attraction r_o est la vitesse $v = \frac{\lambda(r-r_o)}{r}\sqrt{r(r+2r_o)}$.

Cette forme de Painlevé du soleil dans un univers de de Sitter s'écrit alors simplement :

$$ds^2 = c^2dt^2 - \frac{(dr - \frac{\lambda(r-r_o)}{r}\sqrt{r(r+2r_o)}\ dt)^2}{1 - 3\lambda^2 r_o^2} \ - \ r^2\, d\omega^2 \tag{14}$$

En utilisant le fait que $M = \lambda^2 r_o^3$, cette métrique s'écrit sous la forme plus lisible :

$$ds^2 = c^2dt^2 - \frac{(dr - \sqrt{2\,\frac{M}{r} - 2\,\frac{M}{r_o} + \lambda^2(r^2 - {r_o}^2)}\ dt)^2}{1 - 2M/r_o - \lambda^2 r_o^2} \ - \ r^2\, d\omega^2 \tag{15}$$

Cette solution, valable dans l'univers osculateur, qui est un univers de de Sitter, de tout modèle d'univers, est une très bonne approximation de la solution sur ce modèle d'univers (cf. [6]).

Elle permet de réexaminer le problème de la masse d'un amas sphérique de galaxies car r_o est observable, mais aussi le dossier Pioneer à l'aide de cette métrique dans l'univers osculateur. Un signal (électromagnétique) émis radialement par une sonde devrait subir en toute première approximation une accélération cosmologique de $\pm c\,H$ qu'il faut corriger en tenant compte du rayon d'attraction r_o du soleil qui semble être de l'ordre de une à deux années lumière.

Remarque : La forme de métrique de Painlevé (14) obtenue sur l'univers osculateur possède évidemment comme "forme statique" la fameuse métrique diagonale

$$ds^2 = (1 - \frac{2M}{r} - \lambda^2\,r^2)d\tau^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r} - \lambda^2\,r^2} - r^2 d\omega^2.$$

Mais la variable temporelle τ ne possède pas de sens évident et aussi pratique que le temps propre t de la forme de Painlevé pour un mouvement radial, ni ne met en évidence le rayon d'attraction aujourd'hui, ni l'invariant $v^2 - 2\Phi$ du mouvement radial.

Ainsi cette forme de métrique de Painlevé est non seulement intéressante du point de vue théorique et épistémologique, mais encore performante pour la confrontation aux observations faites par les astronomes sur un quelconque objet astral sphérique considéré dans un environnement non vide mais isotrope.

4 Conclusion

La forme de métrique de Painlevé est vraiment un guide pour passer de la gravitation newtonienne à la gravitation einsteinienne. Ces deux théories s'éclairent l'une l'autre et ceci permet de saisir pourquoi et comment on peut utiliser clairement des concepts "classiques" dans un contexte relativiste. De plus nous avons deux lectures à notre disposition, mathématiquement et observationellement équivalentes, mais conceptuellement différentes de phénomènes gravitationnels : l'une en termes de lagrangien (13) avec les équations d'Euler-Lagrange vivant sur un ouvert de R^4, l'autre avec une métrique Lorentzienne (9) sur une variété avec les équations des géodésiques. Ceci permet de saisir en profondeur ce que voulait dire Poincaré [11] dans son affirmation du pluralisme théorique, pluralisme qui existe forcément pour toute théorie physique reposant sur le principe de moindre action comme c'est le cas de la relativité générale [12]. Notons que ce pluralisme théorique, repris dans un contexte d'une pensée par relations est plus généralement défini et établi par B. Guy [13].

Remerciements : à Ahmad Almajid (qui, lors de sa thèse en mécanique des vibrations que j'ai co-encadré, à laissé échapper cette phrase "tout se passe, dans le langage tensoriel que tu nous apprends, comme si le temps t était le temps propre de la pièce mobile et non pas le temps du laboratoire", ce qui m'a mis sur la voie du postulat 2) ; à Jacques Fric (qui m'a interrogé sur la métrique de Painlevé et donc m'a forcé à progresser dans sa compréhension) ; à Gilbert Arsac (qui, comme d'habitude, m'a toujours soutenu et aidé en m'aidant à rédiger plus clairement mes résultats) ; à Jean-Marie Vigoureux (qui m'a forcé à réfléchir sur le rôle de la vitesse c, et donc en partie à l'origine du postulat 1) et aussi à d'autres collègues comme Marc Lachièze-Rey et Jean-Marie Souriau qui m'ont aidé à

comprendre plus en profondeur cette belle théorie d'Einstein ou encore Georges Paturel qui m'a initié aux difficultés liées à une saine compréhension des études astronomiques.

Références

[1] P. Painlevé, *La mécanique classique et la theorie de la relativité*, C. R. Acad. Sci. (Paris) **173** 677-680 (1921).

[2] A. Gullstrand, *Allegemeine lösung des statischen einkörper-problems in der Einsteinshen gravitations theorie*, Arkiv. Mat. Astron. Fys. **16(8)** 1–15 (1922).

[3] J.-M. Souriau *Géométrie et Thermodynamique en cosmologie*, in "Géométrie symplectique et Physique mathématique" CNRS Paris (1975).

[4] M. Lachièze-Rey 2001, The Friedmann-Lemaître models in perspective, A.& A. 364, 894-900 (astro-ph/0010163)

[5] M. Mizony 2003, *La relativité générale aujourd'hui ou l'observateur oublié*, ed ALEAS, Lyon, 2003

[6] M. Mizony et M. Lachièze-Rey, *Cosmological effects in the local static frame*, A.& A. Vol. 434, n^o1, Avril 2005 ; (gr-qc/0412084).

[7] S. Weinberg *Gravitation and cosmology*, John Wiley, New-York 1972.

[8] Martel K. et Poisson E. *Regular coordinate systems for Schwarzschild and other spherical spacetimes*, Am. J. Phys. 69, 476-480 (2001) ; (gr-qc/0001069).

[9] Yuki Kanai, Masaru Siino, and Akio Hosoya *Gravitational collapse in Painlevé-Gullstrand coordinates*, http ://arxiv.org/abs/1008.0470v1 (gr-qc, 4 Août 2010).

[10] Lemaître G. *L'univers en expansion*, Publications du laboratoire d'astronomie et de géodésie de l'université de Louvain. Vol IX (N°85 et 86) p. 171-205, 1932.

[11] H. Poincaré *La science et l'hypothèse*, Flammarion (1902), édition 1968.

[12] M. Mizony *Sur le pluralisme théorique : de Kant à Poincaré* dans Ateliers sur la contradiction, édité par Guy Bernard, Paris : Presses des Mines, 2010, 93-100.

[13] B. Guy *Penser ensemble le temps et l'espace*, Philosophia Scientiae, 15 (3), 2011, 91-113.