Problèmes épistémologiques : Equivalence entre les théories einsteinienne et post-newtonienne de la gravitation

Michel Mizony

22 Novembre 1996

Institut Girard Desargues (UPRES A5028), Université lyon 1
43, bd. du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex
e-mail: mizony@desargues.univ-lyon1.fr

Introduction :

Le but de cette réflexion est de mettre en évidence l'équivalence de deux modèles de la gravitation conceptuellement très différents. Il faut entendre le mot équivalence dans le sens restreint d'équivalence prédictive (c'est-à-dire toute observation ou expérimentation qui valide l'une, valide l'autre et *vice-versa*). En fait nous montrerons qu'elles sont équivalentes en un sens a priori un peu plus plus fort : les équations sont localement équivalentes. Nous terminerons évidemment par une conséquence épistémologique connue mais rarement prise en compte : même si une théorie est validée par l'observation et l'expérimentation, cela ne suffit pas pour valider les concepts sous-jacents de cette théorie. Dans l'exemple que nous allons développer, deux théories de la gravitation prédictivement équivalentes, validées avec une précision extraordinaire, reposent sur des définitions antinomiques du concept d'espace-temps. Dans l'une des théories l'«espace-temps» est courbe avec une courbure non triviale, dans l'autre l'«espace-temps» est plat.
Parmi les nombreuses conséquences de cette équivalence, nous présenterons celles concernant les modèles isotropes de l'univers.

§1 Equivalence pour les modèles isotropes de l'univers

«L'équivalence rigoureuse - et assez paradoxale - entre le modèle
« cosmologique newtonien le plus simple et le modèle de Friedmann
« avec courbure spatiale est évoquée ...»
J.M. Souriau (cf. [1], p.79).

Elements de cosmologie relativiste.

Dans le cadre de la relativité générale, une forme de Robertson-Walker d'une métrique d'univers homogène et isotrope est notée :

$$(1) \qquad ds^2 = c^2dt^2 - R^2(t)(d\alpha^2 + f_\epsilon^2(\alpha)d\omega^2) \ ,$$

où $d\omega^2 = d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2$ et où , pour $\epsilon = 1, \ 0, \ -1$ suivant la nature de la partie spatiale de l'univers (plus précisément ϵ est le signe de la courbure de cette partie espace), on a respectivement :

$f_1(\alpha) = sin(\alpha)$, la partie espace est une sphère ,

$f_o(\alpha) = \alpha$, , la partie espace est l'espace euclidien ,

$f_{-1}(\alpha) = sh(\alpha)$, la partie espace est un hyperboloïde.

Nous noterons parfois $d\Omega_\epsilon^2$, la partie spatiale $d\alpha^2 + f_\epsilon^2(\alpha)d\omega^2$ de la métrique.

Pour une telle forme de métrique, les équations d'Einstein $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$, où $G_{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein, $T_{\mu\nu}$ le tenseur impulsion-énergie et κ un coefficient de proportionnalité (habituellement identifié à $\frac{8\pi G}{c^4}$), se réduisent à :

$$(2) \qquad \frac{8\pi G}{c^4} T_o^o = 3\left(\frac{\epsilon}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{c^2R^2}\right) \ ,$$

$$(3) \qquad \frac{8\pi G}{c^4} T_1^1 = \frac{\epsilon}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{c^2R^2} + 2\frac{\ddot{R}}{c^2R} \ ,$$

où " $\cdot$ " $= \frac{d}{dt}$.

Elles sont reliées entre elles par les identités de Bianchi (pour le mathématicien); ces identités (quatre équations dans un système de coordonnées locales) sont identiquement vérifiées par le premier membre G_ν^μ des équations d'Einstein. Ces mêmes identités ont un sens pour le physicien, elles portent le nom de lois de conservation et relient entre elles les deuxièmes membres T_ν^μ des équations d'Einstein.

Ecrivons donc ces équations $\nabla_\mu G_\nu^\mu = 0$ (identités de Bianchi) donc $\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0$ qui, pour une métrique d'univers de la forme (1) se réduisent à l'équation sur le tenseur T_ν^μ à :

$$(4) \qquad \frac{d}{dt}(R^3 T_o^o) = 3R^2\dot{R}T_1^1 (= R^2\dot{R}T_i^i).$$

Les équations (2), (3) et (4) sont les équations usuelles de la cosmologie relativiste. Mais il est «bien connu» que les équations de la relativité générale, écrites dans un système de coordonnées locales, forment un système de 10 équations à 10 fonctions inconnues, se divisant en deux groupes d'équations :

Un premier groupe est formé des équations, dites équations de contraintes, ce sont les quatre qui contiennent un indice nul dans la formulation usuelle et qui fournissent des conditions aux limites ou conditions initiales ; le deuxième groupe est celui formé des équations ne comprenant aucun indice nul, ce sont les six équations dynamiques ou équations d'évolution. Voir par exemple le chapitre 7.5 sur les conditions de Cauchy de S. Weinberg [3].

Pour un modèle d'univers isotrope nous avons une équation de conservation, l'équation (4), une équation de contraintes, l'équation (2) dont il suffit de s'assurer de sa validité à un seul instant et l'équation dynamique (3) qui seule est à résoudre.

En résumé : on se donne une fonction «densité d'énergie» T_o^o, par (4) on obtient T_1^1 ; on prend les données observationnelles d'aujourd'hui, par (2) au temps t_o on obtient la courbure aujourd'hui de la partie espace $\frac{\epsilon}{R_o^2}$; puis l'équation dynamique (3) permet de trouver R(t) et donc de déterminer complètement le modèle.

Les équations de la cosmologie post-newtonienne revisitées.

Comme l'interprétation hydrodynamique du tenseur T_ν^μ est globale, employons la dynamique post-newtonienne correspondant à un tel fluide parfait. Pour cela il n'y a qu'à suivre l'exemple traité par J. M. Souriau [1] pour retrouver ou reconstruire les modèles d'univers ; il s'appuie sur l'hydrodynamique relativiste (cf. Weinberg [3], chap.2-10) ; plus précisément cet auteur montre que lorsque la pression du fluide cosmique est nulle, l'équation de Poisson, l'équation d'Euler et l'équation de continuité permettent de retrouver les mêmes équations, la même dynamique, mais dans un cadre post-newtonien (nous disons post-newtonien pour signifier la mécanique newtonienne avec la vitesse de la lumière finie). Seule l'interprétation géométrique n'est plus la même.

En mécanique newtonienne, un point matériel qui occupe la position $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ à l'instant t gravite selon l'équation :

$$(5) \qquad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{g} \ ,$$

où $\vec{g} = \vec{g}(\vec{r}, t)$ désigne le champ de gravitation.

Supposons que $t \ \rightarrow \ \vec{r}(t)$ décrive la trajectoire dans $\mathbb{R}^3$ d'un point comobile avec le fluide parfait de densité $\rho = \rho(t)$ et de pression $\vec{p} = \vec{p}(t)$ de composantes $p(t)$, emplissant de manière homogène et isotrope l'espace $\mathbb{R}^3$.

Notons $\vec{v} = \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$ la vitesse en chaque point $\vec{r}$.

En interprétant la loi Newtonienne (5) comme l'équation des géodésiques d'une connexion abstraite sur $\mathbb{R}^4$, J. M. Souriau établit que le champ $\vec{g}$ est de la forme

(6) $\vec{g}(t) = -\lambda(t)\vec{r}(t)$, à une constante additive près, que l'on peut supposer nulle (par changement de l'origine de l'espace).

Supposons que $\vec{v}$ et $\vec{r}$ soient colinéaires et notons :

$\vec{v}(t) = H(t)\vec{r}(t)$, (H s'interprète comme le coefficient de Hubble), alors on trouve que l'équation d'Euler $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}(t)$ s'écrit, en utilisant (5) et (6) :

$$(7) \qquad \frac{dH}{dt} + H^2 = -\lambda.$$

Nous avons ainsi montré que la mécanique post-newtonien ne est compatible avec une expansion, devant vérifier l'équation d'Euler (7) .

Utilisons maintenant l'hydrodynamique en disant que le fluide cosmique est parfait. La loi de conservation de ce fluide s'écrit alors dans les notations précédentes :

$$(8) \qquad \frac{d\rho}{dt} + 3H(\rho + p) = 0.$$

Nous donnerons plus loin l'interprétation Newtonienne (conservation de l'énergie). En tout cas, pour une pression nulle, elle se réduit à la conservation de la masse.

Prenons maintenant l'équation de Poisson qui relie le contenu énergétique au champ gravitationnel $\vec{g}(t)$. Pour un fluide sans pression elle se réduit à : $Div(\vec{g}(t)) = -4\pi G\rho(t)$.

Prenons l'équation de Poisson suivante, qui tient compte de la pression :

$$(9) \qquad Div(\vec{g}(t)) = -4\pi G(\rho(t) + 3p(t)).$$

Cette équation de Poisson modifiée a été proposée par J.M. Souriau (cf. [1bis]), dans un cas particulier. Nous la postulons dans le cas général d'un fluide parfait. Nous pouvons aussi l'écrire :

$$(9bis) \qquad Div(\vec{g}(t) + \vec{p}(t)) = -4\pi G\rho(t).$$

En utilisant l'équation (6) et l'équation d'Euler (7), l'équation de Poisson (modifiée) s'écrit alors :

$$(10) \qquad 3(\frac{dH}{dt} + H^2) = -4\pi G(\rho(t) + 3p(t)).$$

Dans ce cadre post-newtonien, il nous reste donc deux équations à résoudre : les équations (8) et (10), puis l'équation d'Euler permet alors de calculer le champ gravitationnel Newtonien $\vec{g}(\vec{r}, t)$.

Remarque fondamentale : les équations (8) et (10) admettent une intégrale première :

$$(11) \qquad 3(H^2 + \frac{K}{\|\vec{r}\|^2}) = -8\pi G\rho,$$

où K est une constante. Cette constante K est donc fixée par des conditions initiales. Elle a également une interprétation Newtonienne lorsque K est positive, celle de la conservation de l'énergie (cinétique plus potentielle) d'une particule comobile avec le fluide cosmique. Cf. par exemple E. Elbaz [2] qui prend cette équation (11) à la place de l'équation (10) dans son approche Newtonienne des modèles cosmologiques.

Il est évident que si on note $R(t) = \|\vec{r}(t)\|$, ces équations post-newtonienne (8), (10) et (11) sont strictement équivalentes aux équations (2), (3) et (4) de la relativité générale (on a pris ici la vitesse de la lumière égale à 1). Si l'interprétation du temps t, du coefficient de Hubble H et de la densité ρ sont les mêmes, la constante d'intégration K n'a pas d'interprétation en terme de courbure d'espace. Le champ gravitationnel $\vec{g}$, dans cette présentation post-newtonienne, a bien la signification d'un champ d'accélération $\vec{g} = \frac{d^2R}{dt^2}$.

Ainsi on a le résultat intéressant suivant : un modèle d'univers homogène et isotrope fourni par la relativité générale est identique, au niveau des équations, au modèle correspondant basé sur l'hydrodynamique relativiste, la mécanique newtonienne et l'équation de Poisson. Ceci nous permet en particulier de justifier et de comprendre a posteriori l'utilisation en relativité générale de la loi de corps noir qui est une loi thermodynamique. Pour cela nous avons dû cependant tenir compte de la pression dans l'équation de Poisson, pour la modifier en conséquence.

Au niveau de la partie espace, le modèle post-newtonien développé est défini sur $\mathbb{R}^4$. Il y a donc adéquation complète avec le modèle einsteinien correspondant si la courbure (ou la constante K) est négative ou nulle. Si la constante K est strictement positive, les deux modèles ne vont coïncider que localement, sur une carte de la partie espace sphérique du modèle Einsteinien. Si l'on veut une adéquation complète dans ce cas, il faut reprendre le modèle newtonien en plongeant la sphère dans $\mathbb{R}^4$, dont le rayon r(t) évolue; seule la présentation change, les équations étant les mêmes.

Remarque : Dans ce modèle post-newtonien on retrouve une différence de statut entre les trois équations, la même différence que celle mise en évidence dans le cadre de la relativité générale. L'équation dynamique est évidemment l'équation de Poisson (10) , l'équation des contraintes est l'intégrale première (11) , l'équation de conservation (8) étant la même que celle de la relativité générale (et pour cause).

Les deux théories s'éclairent mutuellement.

La conséquence pratique la plus importante de l'équivalence des deux théories est le fait qu'elles se complètent par exemple en justifiant l'utilisation par une théorie de concepts provenant de l'autre, ou encore en permettant l'emprunt par l'une de concepts de l'autre.
Quelques exemples :
1- La constante κ reliant les deux tenseurs des équations d'Einstein est exactement égale à $\frac{8\pi G}{c^4}$. Point n'est donc besoin du recours à des champs faibles comme justification de cette égalité.
2- La loi de corps noir est systématiquement employée en relativité générale pour rendre compte du rayonnement de fond cosmologique (soit à titre d'hypothèse comme le fait J.M. Souriau, soit implicitement). Cette loi qui n'a rien à voir avec la relativité générale, est ipso facto permise par cette équivalence. Plus généralement :
3- L'hydrodynamique relativiste est réhabilitée.
4- Il existe une pression gravitationnelle pure (cf. la modification de l'équation de Poisson).
5- Le concept d'entropie est utilisable dans le cadre de la relativité générale.
6- Le tenseur hydrodynamique $T_{\mu\nu}$ est interprétable en relativité générale dans un repère comobile et **localement inertiel**.
En résumé, la théorie einsteinienne est une forme covariante et partiellement intégrée de la théorie newtonienne.

§2 **Equivalence pour les champs faibles**

Commençons par rappeler que toutes les vérifications faites de la relativité générale, dans le système solaire repose sur un formalisme appelé PPN (Parametrized Post-Newtonian formalism) qui comme son nom l'indique s'appuie sur la théorie newtonienne de la gravitation. Voir C.Will [4] au chapitre 4, ou Weinberg [3] au chapitre 9, pour une étude appronfondie de ce formalisme; Voir le rôle inévitable de ce formalisme dans l'article de G.F.R. Ellis et D.R. Matravers [6].
Pour faire bref, voici les idées essentielles de ce formalisme.
On se donne un tenseur impulsion énergie de la répartition de matière dont on veut étudier le champ (corps ponctuels + corps étendus ayant des propriétés de fluides parfaits + etc...). En général on ne sait pas calculer la (les) métrique(s) g solution(s) des équations d'Einstein. Mais considérons les développements limités à l'ordre 2, 3 ou 4 en fonction de l'inverse de la vitesse de la lumière de la connexion Γ, de la métrique g, du tenseur impulsion-énergie T, des équations des géodésiques etc... Alors le théorème obtenu est le suivant :

i) Tous les coefficients de ces développements limités s'expriment en fonction de quantités obtenues à partir de potentiels newtoniens construits à partir des coefficients du développement limités du tenseur T; ce sont les potentiels post-newtoniens.

ii) Les équations du mouvement d'une particule d'épreuve, calculées par la mécanique newtonienne (et l'hydrodynamique relativiste), sont identiques, à l'ordre 2, à celles obtenues par la relativité générale, à condition d'adjoindre aux équations d'Einstein une jauge, la jauge harmonique qui traduit le fait que le champ gravitationnel se déplace à la vitesse de

la lumière.
Remarques : i) Les trajectoires des géodésiques lumineuses sont également retrouvées. Comme résumés intéressants voir p241 à 244 du Weinberg [3], et p103 et 104 du Will [4].

ii) Ce formalisme qui marche bien pour des champs faibles se généralise pour les champs forts (cf. le travail actuel de Thibault Damour).

iii) En fait il y a identité des développements limités des deux théories de la gravitation; mais pour cela il faut dériver un peu plus les objets de la relativité générale (métrique, connexion) ; comme pour les modèles isotropes de l'univers, les équations d'Einstein apparaissent comme une intégration partielle des équations post-newtoniennes.

iv) Est-ce à dire que nous avons équivalence entre les deux théories? Oui, prédictivement aujourd'hui, pas encore (ou pas du tout?) en des sens plus fort.

§3 Equivalences entre les deux théories, discussion

Oui, prédictivement parlant

Considérons une répartition de matière dans un modèle d'univers, répartition de matière telle qu'avec la relativité générale, on puisse en déduire des observations mesurables aujourd'hui (ceci suppose que l'on sache résoudre au moins approximativement les équations d'Einstein); alors toutes les observations possibles le sont également et avec la même prédictivité par la théorie post-newtonienne ; en effet tous les cas étudiés se ramènent à des répartitions de masses ponctuelles ou de fluides parfaits, et la précision observationnellement possible aujourd'hui ne dépasse pas, et de loin, l'approximation post-newtonienne à l'ordre 2.
Cependant, il faut noter que l'équation de Poisson doit être modifiée pour tenir compte de la pression d'origine purement gravitationnelle; par exemple, pour un fluide parfait elle s'écrit : $Div(\vec{g}) = -4\pi G(\rho + 3p)$, à la place de $Div(\vec{g}) = -4\pi G\rho$, où $\vec{g}$ est le champ gravitationnel newtonien usuel, ρ la densité et p la pression de ce fluide.
Supposons maintenant que la répartition de matière (ou plus exactement d'énergie) soit moins particulière; on peut raisonnablement songer à une répartition fractale de masses ponctuelles ou de densités d'énergie.
Supposons également, la précision des observations allant en s'améliorant, que nous ayons besoin d'un formalisme post-newtonien à l'ordre 3, 4, ...n.
Il est évident qu'en introduisant naturellement de nouveaux potentiels post-newtoniens, les deux théories de la gravitation vont coïncider à la précision requise, si la jauge à introduire dans le cadre de la relativité générale est adéquate. En clair est-ce que la jauge harmonique va rester valable? Il est important de rappeler qu'il existe autant de théories de la gravitation que de jauges choisies, dans le cadre de la relativité générale.
Hypothèse (pour compléter la relativité générale); la jauge est post-newtonienne.
Sous cette hypothèse il est évident que les deux théories einsteinienne et post-newtonienne seront toujours équivalentes, prédictivement parlant.

Remarque pour l'astronomie : depuis quelques années, tous les astronomes sont invités à prendre en compte des corrections relativistes. Vu l'abstraction conceptuelle que représente le cadre de la relativité génŕale, l'expression «corrections post-newtoniennes» serait plus appropriée, car mieux comprise.

Oui, équationnellement parlant,

si l'on complète la relativité générale avec la jauge post-newtonienne définie ci-dessus.

En fait la jauge usuellement prise pour compléter les équations d'Einstein est la jauge harmonique traduisant que la force gravitationnelle se propage à la vitesse de la lumière et que le graviton est de spin 2 (c.f. S. Weinberg [3] chap. 10 §1. ou V. Fock [11] §53). Même si l'on sait que ces deux jauges coïncident aux approximations nécessaires aujourd'hui pour l'observation, pour montrer que les deux théories einsteiniennes sont équationnellement équivalentes (et donc équivalentes à la théorie post-newtonienne), il faudrait montrer :
Conjecture : la jauge harmonique est la jauge post-newtonienne .

Un mot sur la covariance ; il est évident que toute théorie peut être rendue covariante par changement de coordonnées. Mais que veut dire écrire de manière covariante une répartition d'énergie. De fait, tout problème est posé dans un système particulier de coordonnées (cf. Ellis et Matravers [6] par exemple). Pour nous, si une équivalence est montrée dans un repère, elle est valable dans tout repère par covariance (encore faut-il transporter les données du problème par covariance).

Non, conceptuellement parlant

Il est souvent affirmé que lorsqu'une théorie est validée (par l'observation ou (et) l'expérimentation) alors il y a validation des concepts sous-jacents à cette théorie (cf. B. d'Espagnat [7] ou M. Felden [5]). En considérant le concept d'espace-temps, nous donnons un exemple simple supplémentaire montrant qu'il n'en est rien; la validation d'une théorie ne suffit pas à la validation des concepts.
Les deux théories de la gravitation, la relativité générale et la théorie relativiste newtoniene (post-newtonienne) sont prédictivement équivalentes et validées de manière extraordinaire (par l'observation et l'expérimentation, cf. Will [4]); or l'une repose sur le concept d'espace-temps courbe (une variété lorentzienne de courbure non nulle) et l'autre sur le concept d'espace-temps plat (l'espace de Minkowski). **Alors l'espace-temps est-il courbe, est-il plat ? Est-il à la fois courbe et plat ?**
On peut maintenant objecter que les deux théories qui certes sont validées toutes les deux, ne sont peut-être pas équivalentes (en quel sens ?). Considérons alors les modèles d'univers isotropes pour lesquels on a l'équivalence équationelle, le même problème pour le concept espace-temps apparaît. L'espace-temps est-il courbe, est-il plat ?
Que penser de la validité d'une expression du type «la matière courbe l'espace» ? Comme en théorie post-newtonienne, il est plus juste de dire que la matière modifie les trajectoires de corps, fussent-ils des photons, passant à proximité, l'expression «la matière modifie les géodésiques» me semble plus appropriée.
Prenons une image familière, celle d'une carte routière. Elle est plane et précise deux types de distances, la distance à vol d'oiseau (concept de géométrie plane) et la distance la plus courte par la route (concept de géométrie non-euclidienne).
Cette image nous suggère de scinder le concept d'espace-temps en deux concepts distincts : l'un provenant de la théorie post-newtonienne que l'on pourrait appeler l'espace-temps des repères; l'autre provenant de la théorie d'Einstein que l'on pourrait appeler l'espace-temps des géodésiques.
En fait le plus important est de bien réaliser que les th
'eories d'Einstein ou de Newton de la gravitation sont des théories du **mouvement et non pas de l'espace-temps**.

D'autres problèmes du même genre se posent évidemment.
Par exemple du fait de l'acceptation de la dualité par transformation de Fourier des concepts d'espace-temps (celui de Minkowski) et d'impulsion énergie, on a les inégalités d'Heisenberg, et donc toute géodésique suivie par un corps d'épreuve est forcément une trajectoire fractale ! Donc à suivre.

En guise de conclusion

«La relativité générale est une synthèse entre la gravitation
« newtonienne et la relativité restreinte.»
J.P. Luminet
dans «Le Temps et sa Flèche» (cf. [10], p.71).

Annexe 1:
Discussion sur la modification de l'équation de Poisson
La modification proposée (cf. [8]) repose sur l'existence ou non d'une pression purement gravitationnelle; elle est en adéquation avec le concept d'entropie;
elle éclaire le concept einsteinien de système de coordonnées localement inertiel (la physique de laboratoire est localement valide);
Elle est très difficile à mettre en évidence (le nuage de Oort semble la plus petite structure permettant de la vérifier);
Par ailleurs cette pression permet un âge de l'univers de 20 milliards d'années, avec une constante de Hubble de 75km/s/Mpc, ce qui est souhaitable au vu des observations. Un tel âge est impossible à obtenir avec le modèle usuel sans pression gravitationnelle (cf. [9] par exemple où les auteurs montrent que l'on ne peut plus se passer de la constante cosmologique, autrement dit de l'existence d'une pression négative).

Annexe 2:
Le modèle d'univers proposé
Sur la base d'une interprétation locale du tenseur impulsion énergie, on peut construire des modèles d'univers expliquant les observations actuelles et ayant un âge aussi grand que l'on veut. Rappelons brièvement les avantages de ces modèles (approximant asymptotiquement ceux de De Sitter), par rapport au modèle standard.
- Un âge de l'univers plus grand que celui des plus vieux objets qu'il contient, et ce quelque soit la valeur du paramètre de Hubble.
- L'isotropie du rayonnement de fond cosmologique, autrement dit pas de problème d'horizon cosmologique.
- Les fluctuations du rayonnement de fond proviennent des fluctuations primordiales, et ce sans recourir à une période inflationnaire.
- Une distance angulaire toujours croissante avec le redshift.
- Le non-mystère de la constante cosmologique qui traduit simplement la densité de matière **comobile**.
- Une formule théorique, la formule (**) applicable facilement à tous les redshift.
- Explication de la statistique des quasars ($q_o \sim -1$).
- La stabilité des modèles par rapport aux conditions initiales.

- L'existence d'une pression purement gravitationnelle (qui permet de définir le concept de rayon d'attraction d'une sur-densité locale).
- Les problèmes de masse manquante et des structures à grande échelle posés de manière nouvelle (ils sont moins délicats à résoudre).

Formulaire récapitulatif pour ces modèles d'univers

A partir de H_o et Ω_o donnés et de la densité de rayonnement (de densité $B = 4.4\ 10^{-34} g/cm^3$ aujourd'hui), on construit la métrique d'univers isotrope, univers de rayonnement et de matière (de densité A aujourd'hui avec $A = \frac{3}{8\pi G} H_o^2 \Omega_o$). Posons $a = \sqrt{{\Omega_o}^{-1} - 1 - \frac{B}{A}}$. La métrique s'écrit :

$$(*) \qquad ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{R^2(t)}{R_o^2} R_o^2 \left(d\alpha^2 + sh^2(\alpha) d\omega^2\right) ,$$

où $R_o = \frac{c}{H_o \sqrt{\Omega_o}\ a}$ et $\frac{R(t)}{R_o} = -\frac{B}{2A} + \lambda_1 e^{H_0 \sqrt{\Omega_o} t} + \lambda_2 e^{-H_0 \sqrt{\Omega_o} t}$, avec $4\lambda_1 \lambda_2 = \frac{B^2}{4A^2} - 1$.
Soit un signal lumineux émis au temps t_e et reçu au temps t_r; notons respectivement z_e et z_r, ν_e et ν_r, etc. les redshifts, «taux d'amortissement» de fréquences, etc. associés par la formule $\nu = \frac{1}{1+z} = \frac{R(t)}{R(t_0)}$ aux temps t_e et t_r; on a la formule fondamentale suivante :

$$(**) \qquad e^{H_0 \sqrt{\Omega_o}(t_r - t_e)} = \frac{\nu_r + \frac{B}{2A} + \sqrt{\frac{1}{\Omega_0} - 1 - \frac{B}{A} + \nu_r(\nu_r + \frac{B}{A})}}{\nu_e + \frac{B}{2A} + \sqrt{\frac{1}{\Omega_o} - 1 - \frac{B}{A} + \nu_e(\nu_e + \frac{B}{A})}}.$$

Soit z le redshift d'un objet observé, nous exprimons en fonction de z le moment $date(z)$ après le début de l'univers de l'émission du signal reçu aujourd'hui avec un redshift de z, les distances temporelle $d_t(z)$, luminosité $d_l(z)$ et angulaire $d_a(z)$ de cet objet; le rayon de courbure $R(z)$, la valeur du paramètre de Hubble $H(z)$, les densités de matière $\rho_{mat}(z)$ et de rayonnement $\rho_{ray}(z)$, du paramètre de deccélération $q(z)$, le paramètre de densité $\Omega(z)$, etc.

$$\rho_{mat}(z) = (1+z)^3 A \quad et \quad \rho_{ray}(z) = (1+z)^4 B$$

$$date(z) = \frac{1}{H_o \sqrt{\Omega_o}} \ln\left(\frac{\frac{1}{1+z} + \frac{B}{2A} + \sqrt{a^2 + (\frac{1}{1+z} + \frac{B}{A})\frac{1}{1+z}}}{\frac{B}{2A} + a}\right)$$

$$d_t(z) = \frac{1}{H_o \Omega_o} \frac{1}{1 - \frac{B^2}{4A^2 a^2}} \left((1 + z + \frac{B}{2Aa^2}) - (1 + \frac{B}{2Aa^2}) \sqrt{1 + (1 - \Omega_o) z (2+z) - \Omega_o \frac{B}{A} z (1+z)}\right)$$

$$d_l(z) = (1+z)^2\ d_a(z) = (1+z)\ d_t(z)$$

$$H(z) = H_o \sqrt{\Omega_o} \sqrt{1 + \frac{B}{A}(1+z) + a^2 (1+z)^2}$$

$$\Omega(z) = \Omega_o \frac{H_o^2}{H(z)^2}$$

$$R_o = \frac{c}{H_o\sqrt{\Omega_o}\ a} \quad et \quad R(z) = \frac{R_o}{1+z}$$

$$q_o = -\Omega_o(1+\frac{B}{2A}) \quad et \quad q(z) = -\Omega(z)(1+\frac{B(1+z)}{2A})$$

Pour obtenir le comportement futur il suffit de remplacer $1+z$ par $\frac{1}{1+z}$, (i.e. faire varier z de 0 à -1).

On peut finalement écrire la métrique d'univers au moyen de la variable z du redshift :

$$(1+z)^2\ \frac{H_o^2\Omega_o}{c^2}\ ds^2 = \frac{dz^2}{(1+z)^2\sqrt{a^2+\frac{1}{1+z}(\frac{1}{1+z}+\frac{B}{A})}} - \frac{1}{a^2}(d\alpha^2 + sh(\alpha)^2 d\omega^2).$$

Numériquement on a pour $H_o = 75km/s/Mpc$ les âges suivants:
pour $\Omega_o = 0.6$ un âge de 17,3 milliards d'années,
pour $\Omega_o = 0.7$ un âge de 18,8 milliards d'années,
pour $\Omega_o = 0.8$ un âge de 21 milliards d'années.
Voir les figures jointes.

Bibliographie :

[1] J-M. SOURIAU : Géométrie et Thermodynamique en cosmologie, in «Géométrie symplectique et Physique mathématique» CNRS Paris (1975).

[1*bis*] J-M. SOURIAU : Un modèle d'univers confronté aux observations, in Dynamics and Processes, Lecture Note in Math. vol 1031, Springer-Verlag (1983).

[2] E. ELBAZ : Cosmology. Ellipses, Paris (1992).

[3] S. WEINBERG : Gravitation and cosmology. John Wiley, New-York (1972).

[4] C. WILL : Theory and experiments in gravitational physics. Cambridge university press, London (1981).

[5] M. FELDEN : Le modèle géométrique de la physique. Masson, Paris (1992).

[6] G.F.R. ELLIS et D.R. MATRAVERS : General Covariance in General Relativity. G.R.G. vol 27, no 7, 1995.

[7] B. d'ESPAGNAT : Une incertaine réalité. Gauthier-Villars, 1985.

[8] M. MIZONY : La relativité générale aujourd'hui. Preprint, Université Lyon 1, (1993).

[9] L. KRAUSS and M. TURNER : The Cosmological Constant is back. G.R.G. Vol 27, no 11, 1995.

[10] E. KLEIN et M. SPIRO : Le Temps et sa Flèche. Ed. Frontières (1994).

[11] V. FOCK : The theory of space,time and gravitation; Pergamon Press, London (1964).

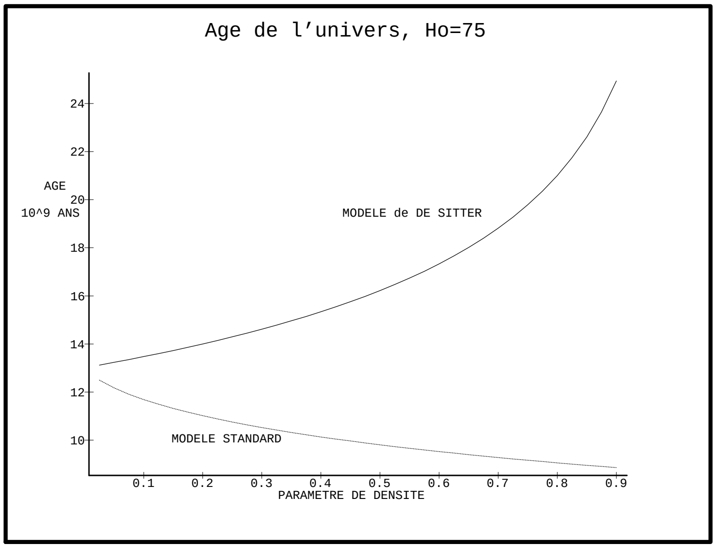


Figure 1: Le problème de l'âge de l'univers en fonction du paramètre de densité se pose d'une manière très différente.

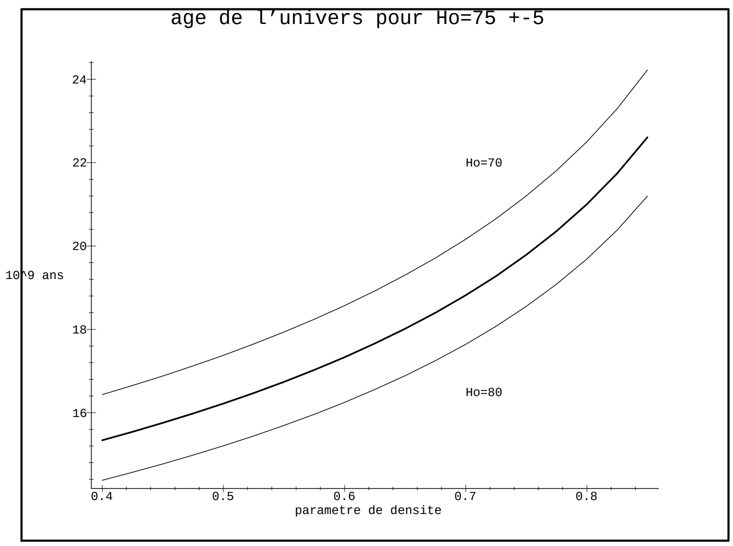
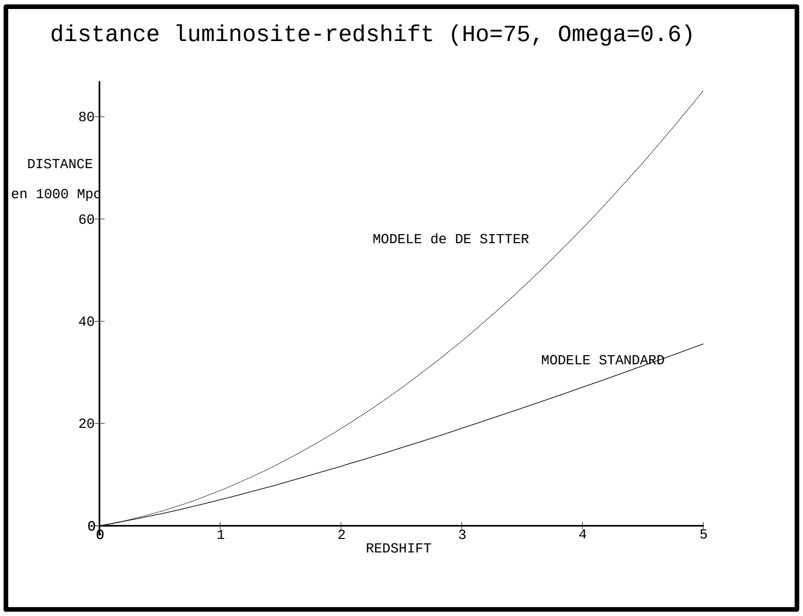


Figure 2: Pour $H_o = 75$, le paramètre de densité Ω_o devrait être plus grand que 0.6.



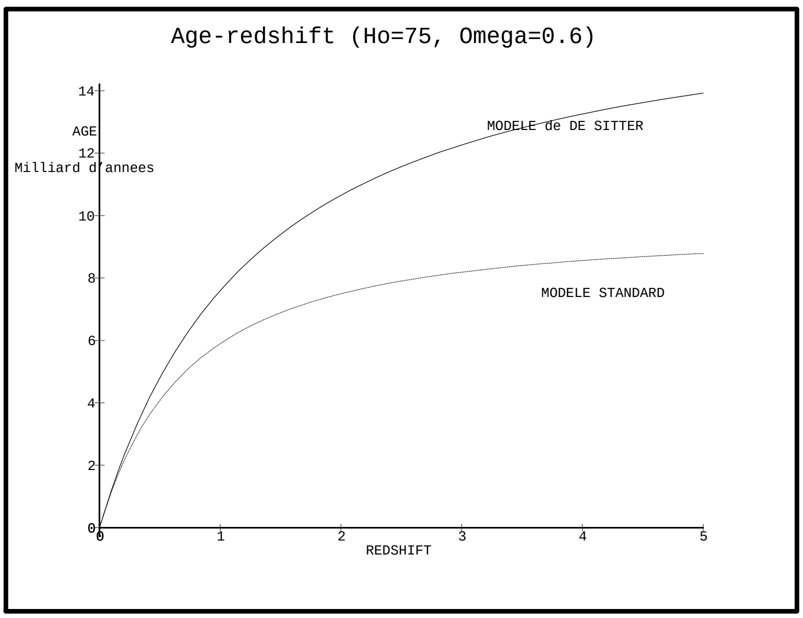


Figure 3 : Ces deux courbes montrent la réévaluation nécessaire des distances et des âges des objets en fonction du redshift observé.

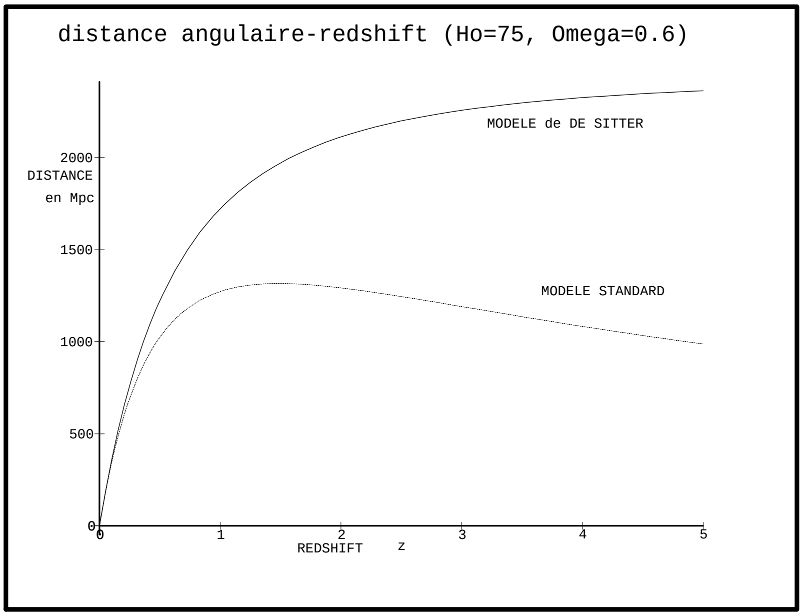
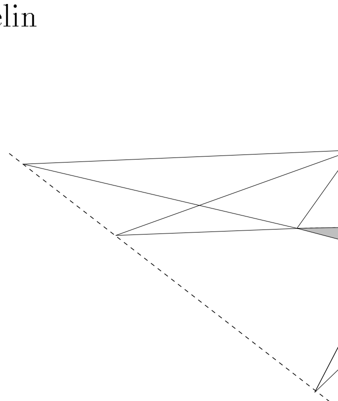


Figure 4 : La courbe de distance angulaire, non décroissante comme dans le modèle standard, permet une étude non ambiguë à grand redshift ($z \geq 2$), en particulier pour les quasars.

En bref ce modèle simple appliqué avec $H_o = 75$ et $\Omega_o = 0.7 \pm 0.1$ rend compte de toutes les observations astronomiques faites à ce jour !

Vaulx-en-Velin



Novembre 1996