Métriques et géométries

Michel Mizony
U.O. Cycle Géométries, géodésiques et espace-temps

MAI 2008

Table des matières

1 Introduction

Dans les conférences précédentes, Gilbert ARSAC nous a présenté la géométrie d'Euclide puis la géométrie neutre et des exemples de géométries non euclidiennes, en particulier avec l'existence de deux géométries sur une même surface (le disque et le demi-plan). Or l'on sait que la gravitation d'Einstein utilise conceptuellement ces géométries. Je voudrai maintenant vous présenter comment la notion de géométrie non-euclidienne est naturelle à travers la notion de métrique sur des surfaces puis en mécanique.

2 Chemin le plus court, le plus économe, sur une surface

Beaucoup de domaines de la physique et de la mécanique sont confrontés au problème de connaître puis calculer des trajectoires qui minimisent des contraintes ; il est question souvent de trajectoire la plus courte, de géodésique. Mais souvent les contraintes se réduisent à un objet (un lagrangien) qui s'interprète en terme d'énergie, aussi une trajectoire minimisant une énergie est le chemin le plus économe.

2.1 Sur le théorème d'Euler-Lagrange

Examinons le cas le plus simple, bien qu'abstrait. Soit l'espace de fonctions continues, différentiables par morceaux définies sur un intervalle $I = [t_1,\ t_2]$ et à valeurs réelles. Nous noterons $E = \mathcal{C}^{1,0}(I, \mathbb{R})$. Pour $f \in \mathcal{C}^{1,0}(I, \mathbb{R})$, nous noterons $\dot{f}$ sa dérivée qui existe presque partout. Lorsque cela sera nécessaire nous supposerons les fonctions deux fois dérivables.

Soit maintenant une fonction (un lagrangien par exemple) $L = L(f, \dot{f}, t)$ définie sur $E \times E \times I$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Sur le sous espace des fonctions de E qui vérifient $f(t_1) = x_1$ et $f(t_2) = x_2$, considérons l'application

$$J := f \to J(f) = \int_{t_1}^{t_2} L(f, \dot{f}, t) dt$$

et cherchons les fonctions f qui soient un minimum relatif pour J ; si une telle fonction existe nous le nommerons chemin le plus court sous la contrainte L.

La réponse est donnée par le théorème d'Euler-Lagrange :
si f est un minimum local alors

$$\frac{\partial L}{\partial f}(f, \dot{f}, t) = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{f}}(f, \dot{f}, t)).$$

Réciproquement si f vérifie l'équation d'Euler-Lagrange alors on a un extremum (minimum local, maximum local, col).

2.2 Sur une surface dans $\mathbb{R}^3$

Soit $\mathbb{R}^3$ muni d'une base orthonormée $(e_1,\ e_2,\ e_3)$; tout vecteur $\vec{x}$ s'écrit $\vec{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$. Une surface dans $\mathbb{R}^3$ est définie par une équation de la forme $f(x_1, x_2, x_3) = 0$. Par exemple l'hyperboloïde à une nappe est définie par $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - R^2 = 0$, la sphère par $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2 = 0$ et le cylindre, d'axe e_3 et de rayon R, par $x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0$. Etant donné que l'on peut paramétrer (au moins localement) une surface par deux variables (u, v), une surface peut être définie par un ensemble de trois équations de ces deux variables : $x_1 = f_1(u, v),\ x_2 = f_2(u, v),\ x_3 = f_3(u, v)$. Par exemple pour la sphère on peut prendre les variables angulaires usuelles $(\theta,\ \phi)$ et pour l'hyperboloïde un angle sphérique et un angle hyperbolique.

Problème : Soit deux points A et B d'une surface de $\mathbb{R}^3$, comment trouver le chemin $t -> \gamma(t)$ le plus court, tracé sur cette surface, joignant des points A et B donnés ?

Nous avons trois méthodes à notre disposition ; la première purement géométrique (et heuristique), la méthode lagrangienne et enfin la méthode métrique.

La méthode géométrique est intuitive, utilisant la visualisation de la figure et les symétries de cette surface. Si pour la sphère le chemin le plus court est toujours porté par un arc de grand cercle, i.e. par l'intersection de la sphère avec le plan passant par A, B et le centre de la sphère (si les points A et B ne sont pas antipodaux), qu'en est-il pour un cylindre, un hyperboloïde ? On peut penser que l'on obtient ces chemins via l'intersection du cylindre, de l'hyperboloïde avec un plan, mais quel plan ? Et pour une surface quelconque ?

La méthode Lagrangienne : Soit $t- >\to \vec{\gamma}(t) = \gamma_1(t)e_1 + \gamma_2(t)e_2 + \gamma_3(t)e_3$, une courbe, tracée sur la surface et joignant les points A et B. L'élément de longueur usuel ds de la courbe s'écrit $ds = \sqrt{\dot{\gamma}_1^2(t) + \dot{\gamma}_2^2(t) + \dot{\gamma}_3^2(t)}\, dt$ et le point $\vec{\gamma}(t)$ étant sur la surface, on a la contrainte

$$f(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) = 0. \tag{1}$$

Pour $\vec{\gamma}(t_0) = A$ et $\vec{\gamma}(t_1) = B$, la longueur $S_{AB}(\vec{\gamma})$ du chemin définie par $\vec{\gamma}$ entre les points A et B est :

$$S_{AB} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{ds}{dt}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{\gamma}_1^2(t) + \dot{\gamma}_2^2(t) + \dot{\gamma}_3^2(t)}\, dt\ .$$

Or la contrainte (1) relie les $\dot{\gamma}_i^2(t)$, pour i=1,2,3 par :

$$\frac{\partial f}{\partial \gamma_1}\dot{\gamma}_1 + \frac{\partial f}{\partial \gamma_2}\dot{\gamma}_2 + \frac{\partial f}{\partial \gamma_3}\dot{\gamma}_3 = 0$$

et donc

$$S_{AB} = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt$$

où

$$L = \sqrt{\dot{\gamma}_1^2(t) + \dot{\gamma}_2^2(t) + \frac{(\frac{\partial f}{\partial \gamma_1}\dot{\gamma}_1 + \frac{\partial f}{\partial \gamma_2}\dot{\gamma}_2)^2}{(\frac{\partial f}{\partial \gamma_3})^2}} \tag{2}$$

On est ramené à un problème similaire au précédent de minimisation de $\gamma \to S_{AB}(\gamma)$ qui s'obtient au moyen des équations d'Euler-Lagrange qui pour i=1,2 s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}_i}) - \frac{\partial L}{\partial \gamma_i} = 0. \tag{3}$$

Application : pour la sphère, le cylindre et l'hyperboloïde,

$$L = \sqrt{\dot{\gamma}_1^2(t) + \dot{\gamma}_2^2(t) - \epsilon\frac{(\gamma_1(t)\dot{\gamma}_1(t) + \gamma_2(t)\dot{\gamma}_2(t))^2}{\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) - R^2}}\ ,$$

avec $\epsilon = 1$ pour la sphère et -1 pour l'hyperboloïde. Pour le cylindre vertical de rayon R, on a

$$L = \sqrt{(1 + \frac{\gamma_1^2(t)}{R^2 - \gamma_1^2(t)})\dot{\gamma}_1^2(t) + \dot{\gamma}_3^2(t)}\,.$$

Les équations d'Euler-Lagrange nécessitent des calculs précautionneux (mais très rapides si on le fait avec un logiciel de calcul formel), et l'on vérifie facilement que par exemple $\gamma_1(t) = 0$ fournit une solution pour chacun des trois exemples ce qui signifie que pour la sphère tout arc de grand cercle est géodésique (en utilisant les symétries de la sphère. Pour le cylindre ou l'hyperboloïde cela signifie que toute intersection avec un plan vertical passant par l'origine est géodésique. Mais trouver toutes les géodésiques de l'hyperboloïde est beaucoup plus compliqué. Mais ici une remarque s'impose : si l'on prend l'élément de distance invariant par les rotations hyperboliques dans les plan (e_1, e_3) et (e_2, e_3), alors ds est la distance pseudo-euclidienne définie par $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2$, et L a la même expression que ci-dessus avec $\epsilon = 1$. Les équations d'Euler-Lagrange correspondantes sont plus simples et il est alors facile de montrer que les géodésiques sont intersections de certains plans et de la surface, comme pour la sphère et le cylindre.

La méthode métrique : considérons maintenant notre surface définie par $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ comme paramétrée (localement) par un ensemble de trois équations de deux variables u et v : $x_1 = f_1(u, v),\ x_2 = f_2(u, v),\ x_3 = f_3(u, v)$.

Dans l'exemple de la sphère on peut prendre : $x_1(u, v) = Rcos(u)cos(v),\ x_2(u, v) = Rcos(u)sin(v),\ x_3(u, v) = Rsin(u)$. L'élément de longueur euclidien ds sur cette surface va pouvoir s'exprimer avec les éléments du et dv :

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = (\frac{\partial x_1}{\partial u}du + \frac{\partial x_1}{\partial v}dv)^2 + (\frac{\partial x_2}{\partial u}du + \frac{\partial x_2}{\partial v}dv)^2 + (\frac{\partial x_3}{\partial u}du + \frac{\partial x_3}{\partial v}dv)^2.$$

Dans l'exemple du cylindre on peut prendre :

$x_1(u, v) = Rcos(v),\ x_2(u, v) = Rsin(v),\ x_3(u, v) = u$. On prendra le même élément de longueur.

Dans l'exemple de l'hyperboloïde on peut prendre : $x_1(u, v) = Rch(u)cos(v),\ x_2(u, v) = Rch(u)sin(v),\ x_3(u, v) = Rsh(u)$. L'élément de longueur pseudo-euclidien ds sur cette surface va pouvoir s'exprimer avec les éléments du et dv :

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 = (\frac{\partial x_1}{\partial u}\,du + \frac{\partial x_1}{\partial v}\,dv)^2 + (\frac{\partial x_2}{\partial u}\,du + \frac{\partial x_2}{\partial v}\,dv)^2 - (\frac{\partial x_3}{\partial u}\,du + \frac{\partial x_3}{\partial v}\,dv)^2\,.$$

Ainsi, en regroupant les termes (aussi bien dans les trois exemples que pour une surface quelconque) et en nommant $g_{i\,j}$ les coefficients on a :

$$ds^2 = g_{1\,1}du^2 + g_{1\,2}du\,dv + g_{2\,1}dv\,du + g_{2\,2}dv^2 = g_{i\,j}du^i\,du^j\ . \tag{4}$$

Le dernier membre de droite utilise ce que l'on appelle les conventions d'Einstein ; plus précisément, $u^1 = u$, $u^2 = v$ et l'on somme sur les indices inférieurs qui apparaissent également en indices supérieurs.

Nous obtenons ainsi ce que l'on appelle une métrique, notée g, sur la surface paramétrée, ici la métrique induite sur cette surface par la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^3$ pour la sphère et le cylindre et par la métrique pseudo-euclidienne pour l'hyperboloïde. Il nous reste plus qu'à utiliser le calcul tensoriel usuel pour obtenir les équations des géodésiques sur cette surface.

On commence par calculer ce que l'on appelle la connexion Γ associée à cette métrique (les symboles de Christoffel) :

$$\Gamma^k_{i\,j} = \frac{1}{2}g^{k\,n}(\frac{\partial g_{i,n}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{j,n}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial u^n})\ ,$$

où les $g^{k\,n}$ sont les éléments de la matrice inverse de la matrice $(g_{i,j})$, et ou la sommation se fait sur les indices répétés (ici l'indice n).

Soit maintenant une courbe $t \to \vec{\gamma}(t) = \gamma_1(t)e_1 + \gamma_2(t)e_2 + \gamma_3(t)e_3$ tracée sur cette surface paramétrée, on a $\gamma_i(t) = f_i(u(t), v(t))$ pour $i = 1, 2, 3$ (et où les fonctions $f_i(u, v)$ paramètrent la surface). Alors pour que cette courbe soit sur une géodésique il faut qu'elle vérifie les équations des géodésiques :

$$\ddot{u}^k + \Gamma^k_{i\,j}\,\dot{u}^i\,\dot{u}^j = 0. \tag{5}$$

Mais la métrique elle-même donne une **intégrale première** de ces équations :

$$L = g_{i\,j}\,\dot{u}^i\,\dot{u}^j\,, \tag{6}$$

que je nommerai le Lagrangien de la métrique. Ce Lagrangien exprime une constante du mouvement sur une géodésique. Et les équations d'Euler-Lagrange associées à L sont équivalentes aux équations des géodésiques. Ainsi une formulation métrique nous donne un Lagrangien. Nous avons donc à notre disposition deux formulations équivalentes pour trouver les géodésiques, et ces formulations s'éclairent l'une l'autre.

Application à la sphère, au cylindre et à l'hyperboloïde. Nous donnons ici la métrique, l'intégrale première et les équations des géodésiques, le détail (via un programme de calcul formel) étant reporté en annexe.

Pour la sphère : la matrice de la métrique est $\begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\,cos(u)^2 \end{bmatrix}$ et la métrique s'écrit $ds^2 = R^2\,du^2 + R^2\,cos(u)^2\,dv^2$.

Donc la constante du mouvement est

$$L = R^2\,\dot{u}^2 + R^2\,cos(u)^2\,\dot{v}^2\,,$$

et les équations des géodésiques sont :

$$\left\{\ddot{u} + \cos(u)\sin(u)\,\dot{v}^2 = 0, \ddot{v} - 2\,\frac{\sin(u)\,\dot{u}\dot{v}}{\cos(u)} = 0\right\}.$$

Pour le cylindre : la matrice de la métrique est $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix}$ et la métrique s'écrit

$ds^2 = du^2 + R^2\,dv^2$.

La constante du mouvement est

$$L = \dot{u}^2 + R^2\,\dot{v}^2\,,$$

et les équations des géodésiques sont :

$$\{\ddot{u} = 0, \ddot{v} = 0\}.$$

Pour l'hyperboloïde : la matrice de la métrique est $\begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & -R^2\,ch(u)^2 \end{bmatrix}$ et la métrique s'écrit $ds^2 = R^2\,du^2 - R^2\,ch(u)^2\,dv^2$.

Et donc la constante du mouvement est

$$L = R^2\,\dot{u}^2 - R^2\,ch(u)^2\,\dot{v}^2\,,$$

et les équations des géodésiques sont :

$$\left\{\ddot{u} + ch(u)\;sh(u)\,\dot{v}^2 = 0, \ddot{v} + 2\,\frac{sh(u)\,\dot{u}\dot{v}}{ch(u)} = 0\right\}.$$

2.3 Dans un espace de dimension n

Les résultats sont qualitativement les mêmes, nous allons les préciser pour fixer des notations.

Soit donc une "surface généralisée" S (une sous-variété) de dimension m dans $\mathbb{R}^n$ de base $(e_1,\ e_2,\ ...,\ e_n)$. Tout vecteur $\vec{x}$ s'écrit $\vec{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$. Cette surface est définie par $d = n - m$ équations $f_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, pour $i = 1...d$. Localement on la considérera paramétrée par n équations des m paramètres $u^1, u^2, ..., u^m$: $x_1 = h_1(u^1, u^2, ..., u^m)$, $x_2 = h_2(u^1, u^2, ..., u^m)$, ..., $x_n = h_n(u^1, u^2, ..., u^m)$; mathématiquement, on dit que l'on a une carte de cette variété S. Considérons S munie de la métrique induite par une métrique (euclidienne, pseudo-euclidienne ou plus générale) choisie a priori sur $\mathbb{R}^n$. Cette métrique définit un élément de longueur ds sur cette surface ; et dans le paramétrage par $(u^1, u^2, ..., u^m)$ on a, pour la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^n$:

$$ds^2 = (\frac{\partial x_1}{\partial u^1}\, du^1 + \frac{\partial x_1}{\partial u^2}\, du^2 + ... + \frac{\partial x_1}{\partial u^m}\, du^m)^2 + (\frac{\partial x_2}{\partial u^1}\, du^1 + \frac{\partial x_2}{\partial u^2}\, du^2 + ... + \frac{\partial x_2}{\partial u^m}\, du^m)^2 +$$

$$... + (\frac{\partial x_n}{\partial u^1}\, du^1 + \frac{\partial x_n}{\partial u^2}\, du^2 + ... + \frac{\partial x_n}{\partial u^m}\, du^m)^2\,,$$

c'est à dire :

$$ds^2 = \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x_k}{\partial u^j}\, du^j)^2\,.$$

Pour une métrique pseudo-euclidienne $\sum_{k=1}^n \epsilon_k dx_k^2$, où $\epsilon_k \in \mathbb{R}$, sur $\mathbb{R}^n$ on a

$$ds^2 = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k (\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x_k}{\partial u^j}\, du^j)^2\,.$$

Notons $g_{i\,j}$ le coefficient de $du^i\, du^j$ alors le carré de l'élément de longueur s'écrit :

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} g_{i\,j} du^i\, du^j \;\; = g_{i\,j} du^i\, du^j\,, \tag{7}$$

avec les conventions d'Einstein. Nous appellerons $g = (g_{i\,j})$ la matrice de la métrique dans les coordonnées (u_i). Cette formule générale sur une "surface" de dimension m dans $\mathbb{R}^n$, s'écrit ainsi de la même manière que dans le cas d'une surface dans l'espace usuel, il en est de même pour la connexion Γ :

$$\Gamma^k_{i\,j} = \frac{1}{2} g^{k\,n} (\frac{\partial g_{i\,n}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{j\,n}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{i\,j}}{\partial u^n})\,, \tag{8}$$

où les $g^{k\,n}$ sont les éléments de la matrice inverse de la matrice $(g_{i\,j})$, la sommation se faisant suivant la convention usuelle sur les indices répétés.

Soit maintenant $t \to \vec{\gamma}(t) = \sum_{k=1}^n \gamma_k(t) e_k$, une courbe, tracée sur la surface paramétrée au moyen des n fonctions h_k des m variables u_i ; on a $\gamma_k(t) = h_k((u_i(t))$ pour $k = 1, 2, ..., n$. Alors pour que cette courbe soit sur une géodésique il faut qu'elle vérifie les équations des géodésiques :

$$\ddot{u}^k + \Gamma^k_{i\,j}\, \dot{u}^i\, \dot{u}^j = 0. \tag{9}$$

Et la métrique elle-même donne une **intégrale première** de ces équations, un Lagrangien :

$$L = g_{i\,j}\, \dot{u}^i\, \dot{u}^j\ , \tag{10}$$

dont les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial u_i} = 0. \tag{11}$$

nous donnent des trajectoires qui sont les géodésiques de la métrique g.

Il est important de signaler des objets géométriques qui sont des invariants associés à la métrique et donc à la surface ; ces invariants sont les tenseurs de Riemann, de Ricci et la courbure scalaire. Nous les introduirons plus loin.

Un exemple : l'espace la relativité restreinte. On prend n=m=4, avec sur la base e_1, e_2, e_3, e_4 la métrique pseudo-euclidienne (métrique de Minkowski) définie par $(\epsilon_k) = (1, -1, -1, -1)$. On paramètre cette surface (qui est l'espace tout entier) au moyen des coordonnées polaires usuelles. On a $\vec{x} = \sum_{k=1}^{4} h_k(t, r, \theta, \phi)\, e_k$ avec

$$h_1 = ct, \quad h_2 = r\cos(\theta), \quad h_3 = r\, sin(\theta)\, cos(\phi), \quad h_4 = r\, sin(\theta)\, sin(\phi).$$

On calcule les coefficients $g_{i\,j}$ la métrique

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - dr^2 - r^2\, d\theta^2 - r^2\, cos(\theta)^2\, d\phi^2$$

est associée à la matrice $\begin{bmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\cos(\theta)^2 \end{bmatrix}$.

2.4 applications en mécanique et à la gravitation

Nous allons donner deux exemples dans l'espace-temps de Minkowski qui permettront de saisir l'intérêt du calcul métrique.

2.4.1 Système tournant

Considérons une pièce tournant autour de l'axe e_4 à la vitesse angulaire ω. On paramètre $\mathbb{R}^4$ au moyen des coordonnées cylindriques : $\vec{x} = \sum_{k=1}^{4} h_k(t, r, \theta, \phi)\, e_k$ avec

$$h_1 = ct, \quad h_2 = r\cos(\theta), \quad h_3 = r\, sin(\theta), \quad h_4 = z.$$

Le calcul des coefficients $g_{i\,j}$ nous donne la métrique

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - dr^2 - r^2\, d\theta^2 - dz^2$$

et la matrice $\begin{bmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Les éléments non nuls de la connexion sont :

$$\Gamma^{2}_{3\,3} = -r \ , \Gamma^{3}_{2\,3} = \frac{1}{r} \ .$$

On en déduit alors les équations des géodésiques :

$$\left\{ \frac{d^2}{dp^2} t\,(p) = 0, \frac{d^2}{dp^2} r\,(p) - r \left(\frac{d}{dp} \theta\,(p) \right)^2 = 0, \frac{d^2}{dp^2} \theta\,(p) + 2\, \frac{\left(\frac{d}{dp} r\,(p) \right) \frac{d}{dp} \theta\,(p)}{r} = 0, \frac{d^2}{dp^2} z\,(p) = 0 \right\}.$$

La variable p de paramétrage des géodésiques est temporelle du fait de la première équation $\frac{d^2}{dp^2} t\,(p) = 0$; les deux équations suivantes nous donnent les forces centrifuge et de Coriolis. On aurait retrouver ces résultats en prenant les équations d'Euler-Lagrange du Lagrangien $L = c^2\, \dot{t}^2 - \dot{r}^2 - r^2\, \dot{\theta}^2 - \dot{z}^2$.

Plaçons nous maintenant du point de vue de l'observateur lié à la pièce tournante, ce qui revient à poser $\theta = \vartheta + \omega\, t$. La métrique s'écrit alors :

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - dr^2 - r^2\, (d\vartheta + \omega dt)^2 - dz^2$$

et la matrice $\begin{bmatrix} c^2 - r^2\, \omega^2 & 0 & -r^2\, \omega & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -r^2\, \omega & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Les éléments non nuls de la connexion sont : $\Gamma^{2}_{1\,1} = -r\, \omega^2$, $\Gamma^{2}_{1\,3} = -r\, \omega$, $\Gamma^{2}_{3\,3} = -r$, $\Gamma^{3}_{1\,2} = \frac{\omega}{r}$, $\Gamma^{3}_{2\,3} = \frac{1}{r}$.

Les équations des géodésiques s'en déduisent :

$$\left\{ \frac{d^2}{dp^2} r\,(p) - r\omega^2 \left(\frac{d}{dp} t\,(p) \right)^2 - 2\, r\omega\, \left(\frac{d}{dp} t\,(p) \right) \frac{d}{dp} \theta\,(p) - r \left(\frac{d}{dp} \theta\,(p) \right)^2 = 0, \right.$$

$$\left. \frac{d^2}{dp^2} \theta\,(p) + 2\, \frac{\omega\, \left(\frac{d}{dp} t\,(p) \right) \frac{d}{dp} r\,(p)}{r} + 2\, \frac{\left(\frac{d}{dp} r\,(p) \right) \frac{d}{dp} \theta\,(p)}{r} = 0, \frac{d^2}{dp^2} z\,(p) = 0, \frac{d^2}{dp^2} t\,(p) = 0 \right\}.$$

Compte tenu de $\theta = \vartheta + \omega\, t$, on retrouve exactement les mêmes équations.

En clair, cet exemple montre que les concepts de forces centrifuge et de Coriolis sont les mêmes tant du point de vue mécanique classique (Newtonienne) que relativiste (dans un univers vide). Au vu des résultats ci-dessus, on se convaincra sans peine que l'on obtient les forces centrifuges et de Coriolis en se restreignant à l'espace $\mathbb{R}^3$ avec la métrique euclidienne exprimée dans les coordonnées cylindriques ou même à l'espace $\mathbb{R}^2$ en coordonnées polaires.

Remarque : si l'on considère maintenant un système tournant à vitesse variable $t \longrightarrow \omega(t)$, les résultats sont qualitativement les mêmes : la métrique (qui donne une intégrale première du mouvement) s'écrit :

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - dr^2 - r^2\, (d\theta - \dot{\omega}(t) dt)^2 - dz^2$$

et les équations des géodésiques

$$\frac{d^2}{dt^2} r\,(t) - r\left(\frac{d}{dt}\omega\,(t)\right)^2 - 2\,r\left(\frac{d}{dt}\omega\,(t)\right)\frac{d}{dt}\theta\,(t) - r\left(\frac{d}{dt}\theta\,(t)\right)^2 = 0,$$

pour la force centrifuge et pour la force de Coriolis on a :

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta\,(t) + \frac{d^2}{dt^2}\omega\,(t) + 2\,\frac{\left(\frac{d}{dt}\omega\,(t)\right)\frac{d}{dt}r\,(t)}{r} + 2\,\frac{\left(\frac{d}{dt}r\,(t)\right)\frac{d}{dt}\theta\,(t)}{r} = 0\,.$$

Signalons que la courbure scalaire ainsi que le tenseur de Ricci (deux invariants géométriques) sont nuls.

2.4.2 Corps en chute libre

Considérons maintenant, toujours dans l'espace de Minkowski, le mouvement radial d'un corps en chute libre attiré par une masse m, (on notera $M = mG/c^2$ sa "masse" relativiste qui a une dimension de longueur) que l'on prendra au centre du système de coordonnées sphériques. On supposera connue la vitesse v_0 à la distance r_0 (données initiales). On sait, d'après la mécanique newtonienne classique, que ce corps en chute libre est soumis à une accélération $\gamma(r) = -mG/r^2 = -Mc^2/r^2$, qui dérive du potentiel $\Phi = \frac{mG}{r}$. Donc sa vitesse de chute est $v = \pm\sqrt{\frac{2mG}{r} + K} = \pm\sqrt{\frac{2Mc^2}{r} + K}$, où la constante $K = v_0^2 - 2mG/r_0$ est donné par les conditions initiales $(v_0,\ r_0)$. Le signe $\pm$ est le signe de v_0 ; en effet le mobile soit se rapproche de la masse m si $v_0 \leq 0$, (c'est le cas également d'une pierre que l'on lache à vitesse nulle), soit s'éloigne comme une pierre que l'on lance avec une vitesse initiale positive v_0. Dans les deux cas la vitesse newtonienne en r est donnée par

$$v(r) = signe(v_0)\sqrt{\frac{2mG}{r} - \frac{2mG}{r_0} + v_0^2}\;.$$

La constante K est reliée à l'énergie du mobile (énergie cinétique - énergie potentielle) car $v^2(r) - 2\Phi(r) = v_0^2 - 2\Phi(r_0) = K$.

Procédons comme dans l'exemple précédent de la pièce qui tourne, il est alors immédiat de remarquer que si l'on prend les métriques obtenues par déformation de la métrique de Minkowski qui utilisent le fait que $dr = v(r)dt$ pour le mobile en chute libre, donc de la forme

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - \alpha(dr - v(r)\, dt)^2 - r^2\, d\theta^2 - r^2\, cos(\theta)^2\, d\phi^2,$$

où α est une constante, ces métriques admettent les trajectoires du mobile comme solutions des équations des géodésiques. On a, de manière équivalente, les Lagrangiens

$$L = c^2\, \dot{t}^2 - \alpha(\dot{r} - v(r)\, \dot{t})^2 - r^2\, \dot{\theta}^2 - r^2\, cos(\theta)^2\, \dot{\phi}^2,$$

et leurs équations d'Euler-Lagrange qui rendent compte du mouvement radial. En fait par le changement de variable $\dot{r} \to \dot{r} - v(r)\,\dot{t}$, il y a le point de vue d'effacer la gravitation ce qui est le cas pour un mobile en chute libre. Il reste à déterminer la constante α, ce qui peut être fait en minimisant la courbure de cette surface. A chaque métrique on associe des invariants géométriques de courbure (cf. le paragraphe suivant), et parmi ceux-ci la courbure scalaire notée R qui généralise la courbure de Gauss. Cette courbure mesure l'écart entre l'aire euclidienne d'une sphère et l'aire associée à la métrique de cette sphère. Le calcul de R (immédiat avec un logiciel de calcul formel) nous dit que : $R = 0 \iff \alpha = \frac{1}{1+K}$. Ainsi la métrique "la plus simple" (car la plus plate) s'écrit

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - \frac{(dr - v(r)\,dt)^2}{1+K} - r^2\,d\theta^2 - r^2\,cos(\theta)^2\,d\phi^2\,, \tag{12}$$

où $v(r)$est la vitesse newtonienne $v(r) = signe(v_0)\sqrt{\frac{2mG}{r} - \frac{2mG}{r_0} + v_0^2}$.

Remarque : cette métrique, facile à obtenir, est solution des équations d'Einstein dans le vide, fait qui est ignoré dans la littérature, et pourtant établit en 1921 par Paul Painlevé et également par A. Gullstrand. Il est trop souvent utilisé la métrique dite de Schwarzschild pour ce problème. A ce propos pour obtenir cette forme il suffit de changer la coordonnée temporelle en posant (avec K=0) $dt = d\tau + \frac{\sqrt{\frac{2mG}{r}}}{1-\frac{2mG}{r}}dr$.

Mais surtout nous l'avons obtenu uniquement à partir des principes newtoniens ! C'est le premier exemple d'équivalence entre la théorie de Newton et de celle d'Einstein.

2.5 Formules du calcul tensoriel

2.5.1 Pourquoi ce formulaire ?

Nous avons vu dans un premier temps qu'une surface dans $\mathbb{R}^3$ présentait de la courbure et que naturellement on avait un élément de longueur, le ds qui s'exprime, dans un paramétrage, par une métrique. Pour les mathématiciens se donner un paramétrage d'une surface c'est se donner ce qu'ils appellent une carte de la variété (surface). Puis nous avons considéré des surfaces de dimension m (paramétrées par m variables u_j) dans un espace (pseudo) euclidien de dimension n. Cette métrique (pseudo) euclidienne induit, sur la surface paramétrée, un élément de longueur ds qui permet de calculer la longueur d'une trajectoire tracée sur cette surface. Le calcul tensoriel permet de mettre en oeuvre un moyen de calculer les géodésiques, les chemins les plus courts entre deux points d'une surface. Les mécaniciens et physiciens savent, depuis Euler et Lagrange, calculer les géodésiques à partir d'un Lagrangien. C'est une méthode analytique qui a largement fait ses preuves ; mais la difficulté réside souvent dans la recherche d'un "bon" Lagrangien pour traduire un problème mécanique ou physique, l'idée reposant sur le fait que ce Lagrangien doit exprimer une "bonne" conservation de l'énergie. Quand se manifeste des phénomènes de dissipation d'énergie, la difficulté redouble. Un mouvement mécanique pouvant être décrit par une trajectoire sur une surface, aussi bien au sens restreint du terme (une surface dans $\mathbb{R}^3$), que dans un sens plus général (associé aux degrés de liberté) traduit par une surface de dimension m, nous pouvons utiliser alors l'outil géométrique des métriques et du calcul tensoriel pour soutenir notre intuition et "trouver un bon Lagrangien". Les premiers exemples donnés ci-dessus en sont, nous l'espérons, une bonne illustration. Une métrique sur une surface de dimension m doit être vue comme une déformation d'une distance dans $\mathbb{R}^n$, déformation provenant de la forme de cette surface ; cette déformation se traduit donc par des "courbures" dans toutes les directions. La géométrie étudie donc des objets abstraits pour nommer ces "courbures" et en donner des propriétés.

Le résultat principal de cette théorie mathématique associée à une surface munie d'une métrique est l'existence d'invariants géométriques, appelés courbures, le premier d'entre eux étant le tenseur de Riemann, noté traditionnellement $R^l_{i\,j\,k}$. Deux autres invariants obtenus par "moyennisation" de ce tenseur de Riemann est le tenseur de Ricci, noté $R_{i\,j}$, et la courbure scalaire, notée R. L'idée intuitive repose sur le fait que plus ces courbures s'annulent, plus la surface est plate. Par exemple si le tenseur de Riemann est identiquement nul on dit que cette surface est plate (c'est le cas de l'espace de Minkowski). Dans l'exemple du corps en chute libre, nous avons utiliser la nullité de la courbure scalaire pour déterminer un paramètre inconnu ; et dans cet exemple, le tenseur de Ricci est également identiquement nul. Il y a aussi par derrière le principe de simplicité, cher à Einstein : plus les courbures s'annulent, plus les calculs sont aisés et l'interprétation des résultats facilitée.

Evidemment il nous faut rappeler qu'à toute métrique est associé un Lagrangien dont les équations d'Euler-Lagrange nous donnent les mêmes trajectoires que les équations des géodésiques associées à la métrique, et réciproquement. Mais suivant les problèmes les calculs sont plus faciles (plutôt moins difficiles) dans un des deux cadres. En fait on a à notre disposition deux approches théoriquement équivalentes qui s'éclairent mutuellement : l'une basée sur la "conservation de l'énergie", l'autre sur la "simplicité des courbures géométriques". A nous de jouer sur ces deux tableaux pour mieux saisir des problèmes de mécanique.

De nombreux ouvrages présentent des propriétés (et démonstrations) de ces courbures ; il n'est pas question ici de donner des preuves qui seraient aussi absconses qu'inutiles. On donnera cependant la définition du tenseur de Riemann, bien qu'il ne sera pas utiliser concrètement par la suite. Si culturellement il permet d'entrevoir que la connaissance d'une surface est résumée dans ce tenseur, il est important pour définir le tenseur de Ricci et la courbure scalaire, puis le tenseur d'Einstein qui tisse des liens entre "courbures" et "énergies".

2.5.2 Définitions et formules

Tenseur.
Nous noterons T^μ un tenseur contravariant, T_μ un tenseur une fois covariant, ce sont des vecteurs, et plus généralement $T^{\mu_i}_{\nu_j}$, $i = 1, ..., p$ et $j = 1, ..., q$, un tenseur p fois contravariant et q fois covariant.
Dans un changement de variables $x^\mu \to x'^\mu$ (i.e. un changement de cartes en mathématique), on a les formules de passage : $T'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} T^\nu$ pour un tenseur contravariant, et $T'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} T_\nu$ pour un tenseur covariant.
Une métrique $g_{\mu\nu}$, exprimée dans un paramétrage, est un deux-tenseur covariant et symétrique (i.e. $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$).

Nous adoptons les **conventions d'Einstein** sur les indices (ce qui signifie que chaque fois qu'il y a un même indice en haut et en bas dans une formule tensorielle, il y a sommation sur cet indice, par exemple la formule $T'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} T^\nu$ doit se lire comme $T'^\mu = \sum_\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} T^\nu$.

Connexion.
La connexion affine associée à une métrique g est définie dans un paramétrage par :
$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} (\frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa})$; ce n'est pas un tenseur.

Dérivation covariante.
Soit V^μ un tenseur contravariant, la dérivation covariante de ce tenseur est le tenseur $\nabla_\lambda V^\mu = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\kappa} V^\kappa$.

Plus généralement pour un tenseur T, p fois contravariant et q fois covariant, on ajoute à la dérivée partielle de T par rapport à λ, le terme $\Gamma^{\mu}_{\lambda\kappa}T$ pour chaque indice contravariant μ (en substituant l'indice κ à l'indice μ dans T) et on retranche $\Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu}T$ pour chaque indice covariant ν (en substituant l'indice κ à l'indice ν dans T). Par exemple :
$\nabla_{\lambda}T^{\mu\rho}_{\nu} = \frac{\partial T^{\mu\rho}_{\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\kappa}T^{\kappa\rho}_{\nu} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\kappa}T^{\mu\kappa}_{\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu}T^{\mu\rho}_{\kappa}$.

Equations des géodésiques.
Soit $p \to x^{\mu}(p)$ une trajectoire (supposée de classe $\mathcal{C}^2$) ; cette trajectoire est une géodésique pour la métrique g, si elle vérifie le système d'équations :
$\frac{d^2x^{\mu}}{dp^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\frac{dx^{\nu}}{dp}\frac{dx^{\lambda}}{dp} = 0$; une **intégrale première** de ces équations est donnée par la métrique :

$$L = g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{dp}\frac{dx^{\nu}}{dp}\,.$$

Le Lagrangien.
On peut également établir les équations des géodésiques, sans calculer la connexion Γ en écrivant les équations d'Euler-Lagrange associées à ce qui est appelé le Lagrangien géodésique. Posons $L = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{dp}\frac{dx^{\nu}}{dp}$; les équations des géodésiques s'écrivent alors :
$\frac{d}{dp}(\frac{\partial L}{\partial(dx^{\mu}/dp)}) = \frac{\partial L}{\partial x^{\mu}}$.

D'Alembertien.
Soit $\Gamma^{\lambda} = g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(\sqrt{\mid g \mid}g^{\lambda\mu})$, alors le d'Alembertien s'écrit :
$\Delta^2 = g^{\lambda\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu}} - \Gamma^{\lambda}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}$.

Tenseur de courbure de Riemann.
Le tenseur de courbure, appelé tenseur de Riemann, est un 4-tenseur défini par :
$R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}$; par contraction on définit le

Tenseur de Ricci :
$R_{\mu\kappa} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\kappa}$ et
la **courbure scalaire** : $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$.
Les **identités de Bianchi** (propriété de symétrie du tenseur de courbure) donnent, par contraction, les "lois de conservation" :
$\nabla_{\mu}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) = 0$.
$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ est tout simplement le **Tenseur d'Einstein** .

Paramétrage, carte, observateur, référentiel, coordonnées :
Toutes ces notions sont proches mais parfois nécessaires pour éviter des erreurs. Prenons la sphère dans $\mathbb{R}^3$, les coordonnées d'un point sont les x_{μ} sur la base canonique de l'espace ; un paramétrage d'une surface par deux variables (u, v), sera définie par un ensemble de trois équations de ces deux variables : $x_1 = f_1(u, v)$, $x_2 = f_2(u, v)$, $x_3 = f_3(u, v)$. Mais pour la sphère, il n'existe aucun paramétrage qui soit une bijection de l'ensemble de définition des variables u et v sur celle-ci. Aussi les mathématiciens ont introduit le concept de carte qui correspond à celui de paramétrage injectif et dérivables (k fois) définie sur un ouvert. Il faut au moins deux cartes pour représenter la sphère.

Un observateur, appelé parfois ligne d'univers, est un concept, trop souvent implicite dans la littérature, source de difficultés d'interprétation ; Soit un paramétrage d'une surface (variété lorentzienne) admettant une variable temporelle, un observateur est la donnée d'un paramétrage (une carte) et d'un point fixé des variables non temporelles ; cela définit une trajectoire, la ligne d'univers de ce point fixé sur cette surface.

Un référentiel est une carte (un paramétrage) possédant une propriété particulière ; un référentiel sera donc précisé par un qualificatif. Par exemple un référentiel inertiel en x est une carte pour laquelle il existe un point x de l'ouvert tel que $g_{\mu\nu}(x)$ soit la métrique de Minkowski (pseudo-euclidienne) et tel que la connexion soit nulle en x. En tout point d'une variété lorentzienne il est admis qu'il existe une telle carte, (ce qui est vrai par exemple si la métrique est supposée deux fois différentiable). Un tel repère est plus souvent appelé un repère localement inertiel en x. Un référentiel comobile (ou gaussien normal) est une carte telle que $g_{oo} = 1$ et $g_{oi} = 0$.

Ces concepts de carte, référentiel, observateur, ... ne nous serviront pas explicitement dans la suite, mais il est important de savoir leur existence lorsque l'on a une difficulté d'interprétation qui se présente. Nous n'avons pas introduit de définitions concernant la nature de la dérivabilité des objets associés à une surface ; de même si une "singularité" se présente, le recours à ces notions de dérivabilité sera indispensable pour éviter des erreurs (trop nombreuses).

3 Cosmologies newtonienne et einsteinienne

L'idée : Sur l'espace-temps de Minkowski (vitesse finie de la lumière oblige), plaçons nous dans les coordonnées sphériques (t, r, ω), où $\omega = (\theta, \phi)$, et supposons simplement l'existence d'un potentiel gravitationnel $\Phi(t, r)$ traduisant un modèle d'univers homogène et isotrope (en expansion). A partir de cette simple existence d'un potentiel cosmologique, on peut construire un temps cosmologique τ, et un invariant, puis un Lagrangien et les équations d'Euler-Lagrange associées qui donneront les trajectoires des particules en chute libre, et enfin donner l'expression de ce potentiel cosmologique dont on a simplement admis l'existence.

La question : Pourquoi se donner un peu de peine pour retrouver des résultats que l'on aurait pu obtenir à partir de la relativité générale ? Pour deux types de raisons, le premier type étant de nature épistémologique (un exemple de pluralisme théorique, concept cher à H. Poincaré, le sens du Vème axiome d'Euclide), le deuxième touchant au problème de comprendre plus clairement ce que l'on observe et mesure (on peut penser par exemple au problème dit de l'accélération anormale des sondes Pioneer, à la vitesse et à l'accélération du photon).

3.1 Le temps cosmologique

Définition 1 : soit H(t,r) le *paramètre de Hubble* au point évènement (t, r, ω) de l'espace de Minkowski M, (cet espace peut être interprété comme l'espace tangent à l'évènement "hic et nunc" correspondant à $t = t_o$ aujourd'hui, et à $r = 0$ ici, dans le cadre de la relativité générale).

Définition 2 : Le *temps cosmologique* $\tau = h(t, r)$ est celui par rapport auquel le mouvement radial $\tau \rightarrow r(\tau)$ d'un corps en chute libre s'écrit le plus simplement :

$$V_\tau = \frac{dr(\tau)}{d\tau} = H(\tau)\, r(\tau). \tag{13}$$

Ce temps sera, de plus, supposé coïncider avec le temps t en $r = 0$, i.e. h(t,0)=t.

Autrement dit on postule l'existence d'une variable temporelle $\tau = h(t, r)$, avec $h(t, 0) = t$, telle que dans ces coordonnées (τ, r), on ait le mouvement d'expansion cosmologique gouverné par l'équation (13). En prenant la définition usuelle du paramètre de décélération q (défini par exemple par $\frac{dH(\tau)}{d\tau} = -(q + 1)H^2(\tau)))$, on obtient l'accélération cosmologique :

$$\frac{dV_\tau}{d\tau} = -q\, H^2(\tau)\, r(\tau). \tag{14}$$

Dans la mesure où nous sommes parti d'un mouvement radial (13), la forme de Lagrangien la plus simple est :

$$2L = \dot{\tau}^2 - \alpha\ (\dot{r} - r\ H(\tau)\ \dot{\tau})^2\ -\ r^2\ \dot{\omega}^2, \tag{15}$$

où α est une fonction à déterminer.

Utilisons pour cela les équations de la cosmologie newtonienne :

3.2 Les équations de la cosmologie post-Newtonienne

Employons la dynamique post-Newtonienne correspondant à un tel fluide parfait. Pour cela il n'y a qu'à suivre l'exemple traité par J. M. Souriau pour retrouver ou reconstruire les modèles d'univers ; il s'appuie sur l'hydrodynamique relativiste (cf. Weinberg, chap.2-10) ; plus précisément cet auteur montre que lorsque la pression du fluide cosmique est nulle, l'équation de Poisson, l'équation d'Euler et l'équation de continuité permettent de retrouver les mêmes équations, la même dynamique, mais dans un cadre post-Newtonien (nous disons post-Newtonien pour signifier la mécanique newtonienne avec la vitesse de la lumière finie). Pour éviter des confusions de langage, l'expression post-newtonien étant déjà employée dans un autre contexte, il serait préférable d'employer l'expression "lorentz-newtonien".

En mécanique newtonienne, un point matériel qui occupe la position $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ à l'instant τ gravite selon l'équation :

$$\frac{d^2\vec{r}}{d\tau^2} = \vec{g} \ , \tag{16}$$

où $\vec{g} = \vec{g}(\vec{r}, \tau)$ désigne le champ de gravitation.

Supposons que $\tau \rightarrow \vec{r}(\tau)$ décrive la trajectoire dans $\mathbb{R}^3$ d'un point comobile avec le fluide parfait de densité $\rho = \rho(\tau)$ et de pression $\vec{p} = \vec{p}(\tau)$ de composantes $p(\tau)$, emplissant de manière homogène et isotrope l'espace $\mathbb{R}^3$.

Notons $\vec{v} = \vec{v}(\tau) = \frac{d\vec{r}}{d\tau}$ la vitesse en chaque point $\vec{r}$, alors on a
$\vec{g}(\tau) = -\lambda(\tau)\vec{r}(\tau)$, et $\vec{v}(\tau) = H(\tau)\vec{r}(\tau)$, (H s'interprète comme le coefficient de Hubble).

Avec ces notations, voici les trois Equations d'Euler, de Poisson et de continuité :

$$\frac{dH}{d\tau} + H^2 = -\lambda; \tag{17}$$

$$Div(\vec{g}(\tau)) = -4\pi G(\rho(\tau) + 3p(\tau)), \tag{18}$$

cette équation de Poisson (modifiée en introduisant un terme de pression, cf. Souriau) s'écrit encore :

$$3(\frac{dH}{d\tau} + H^2) = -4\pi G(\rho(\tau) + 3p(\tau)). \tag{19}$$

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{d\rho}{d\tau} + 3H(\rho + p) = 0. \tag{20}$$

Dans ce cadre post-newtonien, il nous reste donc deux équations à résoudre : les équations de continuité (20) et de conservation (19), puis l'équation d'Euler permet alors de calculer le champ gravitationnel newtonien $\vec{g}(\vec{r}, \tau)$.

Remarque fondamentale : les équations (20) et (19) admettent une intégrale première :

$$3(H^2 - \frac{K}{\|\vec{r}\|^2}) = 8\pi G\rho, \tag{21}$$

où K est une constante.

Notons maintenant $\Omega(\tau)$ le rapport entre la densité de l'univers et la densité critique (donnée par $K = 0$), et notons $r = \|\vec{r}\|$. Alors cette intégrale première s'écrit :

$$K = H^2r^2 - \Omega H^2r^2, \tag{22}$$

autrement dit une particule comobile de masse m a une constante de mouvement $\frac{1}{2}mK$ égale à la différence entre son énergie cinétique $(\frac{1}{2}mH^2r^2)$ et son énergie potentielle $(\frac{1}{2}m\Omega H^2r^2)$

3.3 Le Lagrangien et des conséquences

Il nous reste maintenant à déterminer complètement le Lagrangien (15) dans ces coordonnées (τ, r, ω) de la cosmologie newtonienne, ce qui permettra d'obtenir les équations générales du mouvement. Pour cela utilisons cette constante du mouvement K en disant que la fonction α dépend de K. Puis exigeons que le lagrangien nous donne un champ d'accélération qui vaut $-q\,H^2\,r$, alors on a

$\alpha = \alpha(K) = \frac{1}{1+K}$.

On a ainsi le Lagrangien :

$$2L = \dot{\tau}^2 - \frac{(\dot{r} - r\ H(\tau)\ \dot{\tau})^2}{1 + (1 - \Omega(\tau))\ \ H^2(\tau)\ \ r^2}\ \ -\ r^2\ \dot{\omega}^2, \tag{23}$$

le potentiel cosmologique Φ défini par $2\Phi = \Omega H^2 r^2$ et les équations d'Euler-Lagrange du mouvement :

$$\frac{dL}{d\lambda}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) = \frac{\partial L}{\partial x}, \tag{24}$$

où $x = \tau,\ r, \theta$ ou ϕ et $\dot{x} = \frac{dx}{d\lambda}$.

A propos du potentiel $2\Phi = \Omega H^2 r^2$, il est rapide de vérifier que $\frac{d\Phi}{dr} = \frac{d\Phi}{vdt} = \frac{1}{v}(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial t}) = -qH^2 r = \gamma$, en utilisant le fait que $\dot{\Omega} = -2qH(1-\Omega)$.

On peut alors rapidement obtenir le mouvement radial d'un photon (ou d'un signal électromagnétique), en prenant $L = 0$, $\dot{\omega} = 0$ et $d\lambda = d\tau$ dans le Lagrangien ; sa vitesse (variable) est :

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm\sqrt{1 + (1 - \Omega(\tau))\ \ H^2(\tau)\ \ r^2} + r\ H(\tau)), \tag{25}$$

et son accélération (qui change) vaut, pour $Hr << 1$:

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} \approx \pm H(\tau) - (q + \Omega - 1)H^2(\tau)\ r. \tag{26}$$

En clair cela signifie que la vitesse et l'accélération d'un photon ne sont pas covariants, contrairement à son redshift qui l'est et qui vaut dans les coordonnées (τ, r, ω) :

$$z = z(\tau, r) = H(\tau)r + \frac{1-\Omega}{2}H^2(\tau)\ r^2 + o(H^2(\tau)\ r^2). \tag{27}$$

.

Remarques :

1 Ce Lagrangien ne dépend que des fonctions $H(\tau)$ et $\Omega(\tau)$. Il ne dépend ni du "rayon de l'univers" $R(\tau)$, ni du champ d'accélération $q(\tau)$.

2 Ce Lagrangien admet une forme locale statique :

$$\dot{\tau}^2 - \frac{(\dot{r} - r\ H_o\ \dot{\tau})^2}{1 + (1 - \Omega_o)\ \ H_o^2\ \ r^2}\ \ -\ r^2\ \dot{\omega}^2, \tag{28}$$

où H_o et Ω_o, valeurs hic et nunc des paramètres de Hubble et de densité. Cela permet une étude aisée de l'univers local.

3 Ce Lagrangien met en évidence la constante $K = v^2 - 2\Phi$ du mouvement, qui est la différence entre "l'énergie cinétique" $H^2 r^2$ et "l'énergie potentielle" $\Omega H^2 r^2$.

4 Les équations du mouvement nous donnent les **trajectoires** sur l'espace-temps choisi à priori qui est l'espace de Minkowski.

Si l'on veut maintenant réaliser ces **trajectoires** comme **géodésiques** d'une métrique, il suffit alors de transformer formellement ce Lagrangien en métrique lorentzienne sur la carte initiale, i.e. dans les coordonnées $\tau,\ r, \omega$, et l'on a :

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{(dr - r\ H(\tau)\ d\tau)^2}{1 + (1 - \Omega(\tau))\ \ H^2(\tau)\ \ r^2} \ - \ r^2\ d\omega^2. \tag{29}$$

En resumé qu'avons nous fait ? Dans les coordonnées cosmologiques newtoniennes (τ, r, ω), définie en prenant la vitesse du mouvement radial $v = H(\tau) r$, nous avons obtenu le champ d'accélération $\gamma(\tau) = \frac{dv}{d\tau} = -q * H(\tau)^2\, r$ et l'invariant du mouvement (i.e. "énergie cinétique" - "énergie potentielle") $K = (1 - \Omega(\tau))\ \ H^2(\tau)\ \ r^2 = v^2 - 2\Phi$, et le Lagrangien s'est écrit sous la forme

$$2L = \dot{\tau}^2 - \frac{(\dot{r} - v\ \dot{\tau})^2}{1 + v^2 - 2\Phi} - \ r^2\ \dot{\omega}^2. \tag{30}$$

Pour vérifier que l'on obtient ainsi tous les modèles d'univers homogènes et isotropes de la relativité générale, il suffit de prendre la forme dite de Robertson-Walker de ces modèles

$$ds^2 = d\tau^2 - R^2\ (\tau)\ \ [dx^2 + f_k^2(x)\ d\omega^2], \tag{31}$$

où $f_k(x) = x,\ \ \sin(x),\ \ \sinh(x)$ suivant le signe $k = 0,\ 1$ or -1 de la courbure spatiale, et de faire un simple changement de variable en posant $r = R(\tau) f_k(x)$.

3.4 Moralité

Nous avons prouvé (quasiment sans calculs) que la théorie de Newton est strictement équivalente à celle d'Einstein en ce qui concerne le champ gravitationnel émis par un astre dans le vide et pour les modèles isotropes de l'univers, et ce grâce à l'introduction d'une forme de Lagrangien d'une simplicité surprenante.

Autrement dit, pour plagier une formule bien connue, "Donnez moi un Lagrangien et je soulève le monde".

Incise *: Il est important de signaler, à la lumière de ces exemples de deux modélisations mathématiquement et observationellement équivalentes et pourtant conceptuellement différentes (du champ gravitationnel créé par le soleil dans le vide et de celui des modèles d'univers isotropes) que*

1- La phrase trop souvent écrite "La matière courbe l'espace-temps" n'a aucun sens.

2- On peut par contre dire que "Dans la modélisation einsteinienne de la gravitation, la matière courbe l'espace-temps".

3- Et on doit dire aussi que "Dans la modélisation newtonienne de la gravitation, la matière ne courbe pas l'espace-temps, mais déforme les géodésiques".

Autrement dit le concept d'espace-temps est métaphysique.

4 Bibliographie

M. MIZONY : La relativité générale aujourd'hui, l'observateur oublié ; Aléas, (2003).

M. Mizony et M. Lachièze-Rey : Cosmological effects in the local static frame ; A.& A. Vol. 434, n^o1, Avril 2005 ; (gr-qc/0412084).

H. POINCARE : La science et l'hypothèse, Flammarion (1902), édition 1968.

J-M. SOURIAU : Géométrie et Thermodynamique en cosmologie, in "Géométrie symplectique et Physique mathématique" CNRS Paris (1975).

S. WEINBERG : Gravitation and cosmology. John Wiley, New-York (1972).

5 Biographies

Lagrange Joseph Louis, français, 1736-1813.

Né à Turin (Italie), il y enseigna les mathématiques dès l'âge de 19 ans à l'École d'artillerie. Il connut Euler et d'Alembert, s'installa à Berlin (où il présida l'Académie des sciences, à la suite d'Euler) et revint à Paris en 1787 à l'invitation de Louis XVI. Il fut anobli par Napoléon. Encouragé dans ses débuts par d'Alembert, sa contribution est essentielle en Arithmétique ; Algèbre : équations algébriques et résolution approchée ; Equations différentielles et aux dérivées partielles ; Intégrales elliptiques ; Calcul des variations, mécanique céleste ; Théorie des fonctions réelles et complexes ;

Euler Leonhard, suisse, 1707-1783.

Elève de Jean Bernoulli. Sans doute un des plus grands mathématiciens de tous les temps. Il s'installa à Saint-Petersbourg auprès de Pierre Ier le Grand (en remplacement de Daniel Bernoulli) puis à Berlin (1741) sous le règne de Frédéric II où il présida l'Académie des sciences jusqu'en 1766 (c'est Lagrange qui lui succéda). Vers la fin de sa vie, alors aveugle, il revint à Saint-Petersbourg invité par Catherine II. Son oeuvre est considérable. Euler intervint dans les trois domaines fondamentaux de la science de son époque : l'astronomie (orbites planétaires, trajectoires des comètes), les sciences physiques (champs magnétiques, hydrodynamique, optique, nature ondulatoire de la lumière,...), et les mathématiques, dans toutes ses branches, de l'arithmétique à la géométrie différentielle en passant par l'analyse numérique et fonctionnelle, le calcul des variations, les courbes et les surfaces algébriques, le calcul des probabilités et les premiers aspects de la théorie des graphes et de la topologie.

6 Annexe : Sur l'oscillateur harmonique

Sur la problématique de l'oscillateur harmonique (pendule simple ou ressort).

Plaçons-nous dans le contexte d'un des plus simples des systèmes mécaniques : celui du système masse-ressort idéal, à petites oscillations, soumis à une force extérieure F(t). L'équation du mouvement de la masse m est traditionnellement écrit sous la forme

$$m\ddot{x} + Kx - F(t) = 0, \tag{32}$$

où K est une constante associée au ressort. Expérimentalement les mécaniciens se sont vite aperçus qu'il existait un terme complémentaire en $\dot{x}$, appelé force de "frottement" plus précisément force de dissipation, du fait qu'il est proportionnel à la vitesse, et ce parfois bien qu'il n'existe aucune source de frottement identifiée. On a donc l'équation

$$m\ddot{x} + 2\alpha\sqrt{Km}\dot{x} + Kx - F(t) = 0\ , \tag{33}$$

où α, le coefficient dit de dissipation (ou de viscosité) est bien mesuré.
Il est donc présupposé un espace-temps symbolisé par le couple (x, t). Dans toute la suite, x désignera le déplacement observé par un observateur fixe du laboratoire où l'oscillateur se meut et t le temps qui s'écoule à la montre de cet observateur rivé au laboratoire.
Se donner l'équation simple du pendule (de l'oscillateur harmonique) (32), c'est se donner un certain nombre d'objets : une masse m et donc deux écritures de l'énergie associée $E = mc^2 = h\nu$, où h est la constante de Planck, c la vitesse de la lumière et ν la fréquence relativiste ; une rigidité K et la fréquence de résonnance $\Omega = \sqrt{K/m}$ associée à la solution générale de l'équation homogène associée à (32) ; une force extérieure $F(t)$ agissant sur la masse m.

Cette équation différentielle (32) est établie dans le cadre de la mécanique newtonienne et provient de l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} \tag{34}$$

associée au Lagrangien classique

$$Lc = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \left(\frac{1}{2}Kx^2 - F(t)x\right) \tag{35}$$

où $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ désigne l'énergie cinétique de la masse m et $\Phi = \frac{1}{2}Kx^2 - F(t)x$ le potentiel attaché à la rigidité (ou force de rappel) K et à la force extérieure F.

Tâche 1 : Ecrire une procédure qui à un Lagrangien L associe l'équation d'Euler-Lagrange du mouvement. Faire un test pour le Lagrangien (35).

Pour ne pas compliquer le problème nous avons supposé que la force de rappel K ne dépend ni de x ni de t, et nous le supposerons par la suite, car là ne se situe pas l'essentiel du propos (autrement dit, le fait que K soit constant ou non est annexe par rapport aux problèmes de fond posés par la modélisation de l'oscillateur harmonique).

Problème : Quel Lagrangien faut-il prendre pour obtenir l'équation du mouvement de l'oscillateur amorti (33) ?

Tâche 2 : Chercher un lagrangien de la forme

$$e^{A(t)}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \left(\frac{1}{2}Kx^2 - F(t)x\right)\right) \tag{36}$$

tel que l'équation d'Euler-Lagrange du mouvement soit (33).

Sur la correction relativiste Même si la première correction relativiste, liée à la vitesse $\dot{x}(t)$, est tout à fait négligeable dans le cas de l'oscillateur harmonique, l'étude de cette correction relativiste dans un cadre Lagrangien, va nous permettre de mettre en évidence le rôle joué par la présence d'un facteur conforme.
Cette correction relativiste s'obtient usuellement en remplacant dans l'équation du mouvement d'une part

$\dot{x}(t)$ par $\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}(t)^2}{c^2}}}$,

et d'autre part

m par $\frac{m}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}(t)^2}{c^2}}}$,

la masse relativiste. Ainsi on obtient comme termes principaux de l'équation du mouvement :

$$m\ddot{x}(t) + (Kx(t) - F(t))\left(1 - \frac{3\dot{x}(t)^2}{2c^2}\right) + ... = 0. \tag{37}$$

Une autre manière d'obtenir cette première correction relativiste, est de remplacer $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ par $\frac{1}{2}m\dot{x}^2(1+\frac{\dot{x}(t)^2}{4c^2})$ dans le Lagrangien classique. Ces deux obtentions possèdent des inconvénients ; elles ne donnent pas les mêmes points de suspension et font apparaître des termes en $\dot{x}(t)^n$, avec $n > 2$.

Il est facile de remarquer que si l'on pose

$$Lr = e^{\frac{-3}{mc^2}(\frac{1}{2}Kx^2-F(t)x)}Lc = e^{\frac{-3}{mc^2}\Phi(t,x)}(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - (\frac{1}{2}Kx^2 - F(t)x)), \tag{38}$$

("r" comme relativiste), on obtient :

$$m\ddot{x}(t)+(Kx(t)-F(t))(1-\frac{3\dot{x}(t)^2}{2c^2})+\frac{3\dot{F}(t)x(t)}{c^2}\dot{x}(t)-\frac{3}{mc^2}(Kx(t)-F(t))(\frac{1}{2}Kx^2(t)-F(t)x(t)))=0. \tag{39}$$

Nous obtenons ainsi une formulation simple de la correction relativiste dans les coordonnées (t, x) du laboratoire. Sans doute est-elle connue ? Je ne l'ai pas encore trouvée dans la littérature.

Tâche 3 : Vérifier ces assertions concernant la correction relativiste.