

SUR LES COURBURES EXTERNES DES SOUS-VARIÉTÉS

JACQUES GASQUI - JEAN MARIE MORVAN

(Pres. dal socio corrisp. R. ROSCA)

La première courbure externe d'une sous-variété d'une variété Riemannienne a été définie par le second auteur (voir [6] ou [7]) comme la norme de sa seconde forme fondamentale. Nous montrons dans cet article que toute fonction différentiable ρ positive, définie sur une variété M de dimension finie peut être considérée, localement, comme la première courbure externe d'une hypersurface convexe d'un espace Euclidien (théorème 1).

Nous étudions également, dans le cas plus délicat où ρ est une fonction non négative, s'il est possible de trouver des hypersurfaces dont la première courbure externe est égal à ρ , au voisinage d'un point m de M tel que $\rho(m)=0$. Si, après un changement de coordonnées autour de m , ρ est une fonction analytique radiale, nous obtenons une réponse positive (théorème 2). Nécessairement, m est un point critique de ρ et l'hypothèse du théorème englobe, (grâce au lemme de Morse), le cas où m est un point critique non dégénéré.

Enfin, nous pouvons définir p courbures externes d'une sous-variété de codimension p (voir [6] ou [7]) et se poser la question de l'existence de sous-variétés dont plusieurs courbures externes sont données à l'avance. Dans le cas d'une courbe d'un espace Euclidien, ces courbures sont simplement les fonctions de courbures classiques associées au repère de Frenet de cette courbe; il est bien connu qu'il existe des courbes dont les courbures sont des fonctions positives données a priori (voir [5 chap. 1]). En fait, ce phénomène est particulier aux courbes, et nous pouvons obtenir facilement des résultats de non existence en dimensions supérieures. Les auteurs remercient le référé dont les remarques ont permis d'améliorer certains résultats.

§1. Courbures externes.

Tous les objets considérés ici sont de classe C^∞ . Soient M une variété différentiable de dimension n , et f une immersion de M dans l'espace Euclidien \mathbb{R}^{n+p} , $p \geq 1$. Nous notons respectivement \langle, \rangle et ∇ le produit scalaire canonique et la connexion plate canonique sur \mathbb{R}^{n+p} . Si ∇ est la connexion de Levi-Civita de l'image réciproque de \langle, \rangle par f , il est bien connu que

$$\nabla_{f_*\xi} f_*\eta = f_*\nabla_\xi \eta + B^f(\xi, \eta),$$

pour tous champs ξ, η sur M , où B^f est la seconde forme fondamentale de f . Enfin, nous notons ∇^\perp la connexion normale sur le fibré normal $T^\perp(M)$ de M et E_f le sous-fibré (peut être à fibres variables) de $T^\perp(M)$, engendré par l'image de B^f . Le fibré E_f est appelé premier fibré normal principal de f .

a) Définition de la première courbure externe.

La première courbure externe $k_1(f)$ de f est la norme de B^f : Si $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ (resp. $\{\eta_1, \dots, \eta_p\}$) est un repère tangent (resp. normal) sur un ouvert U de M , nous avons:

$$(1) \quad k_1(f)^2 = \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}} \langle B^f(\xi_i, \xi_j), \eta_k \rangle^2$$

Dans le cas particulier où f est une immersion de M dans \mathbb{R}^{n+1} , il est facile de relier $k_1(f)$ aux « courbures moyennes » de l'immersion.

En effet, désignons par $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ les coefficients du polynôme caractéristique de la seconde forme fondamentale B^f de f :

$$\det(I + tB^f), \quad \text{où } I \text{ est l'identité.}$$

Ces coefficients sont, à des constantes près, les courbures moyennes σ_i , $1 \leq i \leq n$, de l'immersion f ; (voir [2] par exemple).

En d'autres termes, si nous notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les fonctions de courbures principales de f (c'est-à-dire les valeurs propres de B^f), nous avons

$$\sigma_i = \sum_{1 \leq m_1 < \dots < m_i \leq n} \lambda_{m_1} \dots \lambda_{m_i}.$$

Il est clair que $k_1(f)^2 = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2$ et, par suite nous avons

$$(2) \quad k_1(f^2) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

Remarquons que (2) implique que $k_1(f)^2$ est C^∞ .

b) *Une remarque sur la différentiabilité de $k_1(f)$.*

Bien que $k_1(f)^2$ soit C^∞ , il n'en n'est pas toujours de même pour $k_1(f)$, aux points où $k_1(f)$ s'annule. Par exemple, l'immersion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$f(x_1, x_2) = \left(\int_0^{x_1} \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt, \int_0^{x_2} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt, x_2 \right)$$

vérifie $k_1(f) = |x_1|$, fonction qui n'est pas différentiable aux points $(0, x_2)$.

Par conséquent, le théorème 1 d'existence que nous montrerons n'englobera pas toutes les fonctions susceptibles d'être, sur une variété, une première courbure externe, puisque la fonction dont nous partons sera C^∞ a priori.

c) *Définition des courbures externes d'ordre supérieur.*

Si le premier fibré normal principal est de rang constant, notons $P_1: T^+(M) \rightarrow E_1^+$ la projection orthogonale sur le supplémentaire orthogonal de E_1 . Nous notons aussi \mathcal{O}_M le module des fonctions différentiables réelles sur M , et \mathbf{E} le module des sections d'une variété fibrée E sur M .

Si $T(M)$ est l'espace tangent à M , il est facile de voir que l'application

$$(\xi, \zeta) \mapsto P_1 \nabla_{\xi}^{\perp} \zeta$$

de $\mathbf{T}(M) \oplus E_1$ dans E_1^{\perp} est θ_M -bilinéaire. Par suite nous pouvons définir sa norme $k_2(f)$, appelée *deuxième courbure externe* de f .

De façon plus précise, si $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, $\{\xi'_1, \dots, \xi'_r\}$ et $\{\xi''_1, \dots, \xi''_s\}$ sont des repères orthonormés de $T(M)$, E_1 et E_1^{\perp} , sur un ouvert U de M , nous avons

$$k_2(f) = \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r \\ 1 \leq k \leq s}} \langle P_1 \nabla_{\xi_i}^{\perp} \xi'_j; \xi''_k \rangle \right)^{1/2}$$

Nous pouvons alors noter E_2 le sous-fibré (à fibres peut être variables) de $T^{\perp}(M)$, engendré par l'image de P_1 .

Le fibré E_2 est appelé *deuxième fibré normal principal* de f . Si le rang de E_2 est constant, notons

$$P_2: T^{\perp}(M) \mapsto (E_1 \oplus E_2)^{\perp}$$

la projection orthogonale sur le supplémentaire orthogonal de $E_1 \oplus E_2$.

L'application $(\xi, \eta) \mapsto P_2 \nabla^{\perp} \eta$ de $\mathbf{T}(M) \oplus E_2$ dans $(E_1 \oplus E_2)^{\perp}$ est θ_M -bilinéaire. Nous notons sa norme $k_3(f)$, appelée *troisième courbure externe* de f .

Il est possible de définir les courbures externes $k_4(f) \dots k_i(f) \dots$ de manière analogue, par récurrence.

d) *Interprétation géométrique des courbures externes* [6], [7].

Rappelons ici brièvement la signification géométrique des courbures externes. On montre facilement que ces courbures sont des obstructions à la réduction de la codimension de l'immersion. Plus précisément, on peut montrer le

THÉORÈME A. *Soit M est une sous-variété de dimension n connexe,*

simplement connexe d'un espace Euclidien \mathbb{R}^{n+p} . On suppose que les espaces normaux principaux E_1, \dots, E_l sont de dimension constante r_1, \dots, r_l , et que la $(l+1)$ -ième courbure externe k_{l+1} de l'immersion soit identiquement nulle.

Alors M est une sous-variété d'un $(n + \sum_1^l r_i)$ -plan de \mathbb{R}^{n+p} .

Naturellement, la définition même des courbures externes permet de voir que ces dernières ne peuvent que très partiellement décrire la « forme » de la sous-variété. Deux immersions différentes peuvent avoir même première courbure externe; il suffit de considérer une immersion $\bar{f}: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$, et définir une autre immersion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $n > k$, par

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_k), \dots, \bar{f}_{k+1}(x_1, \dots, x_k), x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Nous avons

$$k_1(f)(x_1, \dots, x_n) = k_1(\bar{f})(x_1, \dots, x_k).$$

Cependant, sans entrer dans les détails, signalons que, lorsque la codimension de l'immersion est « petite » (≤ 2), ces courbures permettent de décrire l'immersion en terme de feuilletages et de réduction de codimension.

§2. Existence d'immersions à première courbure externe donnée.

Nous allons montrer le théorème suivant:

THÉORÈME 1. Soit M une variété différentiable de dimension n et $\rho: M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Soit $m \in M$ un point tel que $\rho(m) > 0$. Alors il existe une immersion convexe de M dans l'espace euclidien \mathbb{R}^{n+1} , définie sur un voisinage de m dont la première courbure externe est égale à ρ .

Puisque nos résultats sont locaux, nous pouvons supposer que M est un ouvert de \mathbb{R}^n et que $m=0$. Notons (x^1, \dots, x^n) , (resp. (y^1, \dots, y^{n+1})) les coordonnées canoniques de \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{R}^{n+1}). Soit f une immersion de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^{n+1} . Si nous posons

$$f(x) = (f^1(x), \dots, f^{n+1}(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

et

$$g_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n+1} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j}; \quad 1 \leq i < j \leq n,$$

nous avons

$$(3) \quad B^f \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_{\alpha=1}^{n+1} \left(\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{\alpha=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \circ f$$

où

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n g^{hk} \left(\frac{\partial g_{hi}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} - \frac{\partial g_{hj}}{\partial x^i} \right).$$

Ici, (g^{ij}) est la matrice inverse de (g_{ij}) .

Soit $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions différentiables réelles sur \mathbb{R}^n , et $A: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'opérateur différentiel non linéaire du second ordre, défini par

$$A(z) = \sum_{1 \leq i, j, k, l \leq n} g^{ik}(z) g^{jl}(z) \langle B_{f_z}^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right), B_{f_z}^j \left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \rangle$$

où $z \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, et f_z est l'immersion de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^{n+1} définie par $f_z(x) = (x, z(x))$, $x \in \mathbb{R}^n$, et où $(g^{ij}(z))$ est la matrice inverse de $\langle (f_z)_* \frac{\partial}{\partial x^i}, (f_z)_* \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle$.

Nous avons à présent besoin du lemme suivant:

LEMME 1. Soit $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction telle que $\rho(0) > 0$. Il existe une fonction $z \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $A(z)(0) = \rho^2(0)$ et telle que l'opérateur linéarisé A'_z de A en z soit elliptique en 0.

Démonstration. La démonstration est semblable à celle du lemme de [3]. Rappelons que, si $z \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, l'opérateur linéarisé de A en z est défini par

$$A'_z(u) = \frac{d}{dt} A(z + tu)|_{t=0}$$

avec $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Soit $z \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction telle que $z(0) = 0$ et $\frac{\partial z}{\partial x^i}(0) = 0$, $1 \leq i \leq n$. Nous avons $g_{ij}(z)(0) = \delta_{ij}$ et

$$B^f_z \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) (0) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^i \partial x^j} (0) \frac{\partial}{\partial y^{n+1}} \Big|_0.$$

On en déduit facilement que

$$(A_z)(0) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^i \partial x^j} (0) \right)^2$$

et que la partie principale de A'_z en 0 est l'opérateur différentiel

$$P: u \rightarrow 2 \sum \frac{\partial^2 z}{\partial x^i \partial x^j} (0) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Si nous choisissons z tel que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^i \partial x^j} (0) = \frac{\rho(0)}{\sqrt{n}} \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

alors P est le Laplacien standard dans \mathbb{R}^n , à une constante près, et $(A_z)(0) = \rho^2(0)$. Le lemme est ainsi démontré.

Nous pouvons maintenant montrer le théorème 1. Soit B une boule fermée centrée à l'origine de \mathbb{R}^n . Si l est un entier positif et $s \in]0, 1[$, soit $C^{l+s}(B)$ l'espace des C^l -fonctions à valeurs réelles, sur B , dont les dérivées d'ordre l sont Hölderiennes d'exposant s .

Si les espaces $C^{l+2+s}(B)$ et $C^{l+s}(B)$ sont munis de leurs normes usuelles, il est facile de voir que

$$A: C^{l+2+s}(B) \rightarrow C^{l+s}(B)$$

est C^∞ . Nous allons utiliser la proposition suivante.

PROPOSITION 1. ([3]). *Soit l et m des entiers positifs et $s \in]0, 1[$. Soit $F: C^{l+m+s}(B) \rightarrow C^{l+s}(B)$ un opérateur différentiel d'ordre m , non linéaire, de classe C^∞ , et $\rho \in C^\infty(B)$. S'il existe un m -jet en 0 de fonctions $z \in C^{l+m}(B)$, tel que $(F_z)(0) = \rho(0)$, et tel que l'opérateur F'_z est elliptique en 0, alors nous pouvons trouver un germe C^∞ en 0 de fonction $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $Fu = \rho$.*

Ainsi, le lemme 1 et la proposition 1 permettent de conclure qu'il existe une fonction $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur un voisinage de 0, telle que

$$(4) \quad \Delta u = \rho^2.$$

Utilisant (1) et (3), nous concluons que (4) est réalisé si et seulement si $k_1(f) = \rho$. Si z est donné par le lemme 1, la seconde forme fondamentale de f_z en 0 est définie positive. Ceci implique (voir le corollaire de [3, Appendice]) que nous pouvons avoir, en plus, B^f_u défini positive sur un voisinage de 0. Cette dernière propriété est équivalente à la convexité de f_u . Le théorème 1 est démontré.

Remarque sur le théorème 1. Si $n=1$, il est bien connu que l'on a le résultat suivant: si $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^r , non négative, ($r \in \{1, \dots, \infty\}$), alors il existe une courbe f de classe C^{r+2} ,

$$f = (f_1, f_2): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

telle que $k_1(f) = \rho$.

Il suffit en effet de considérer

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(t) = \int_0^t \cos \left(\int_0^s \rho(\sigma) d\sigma \right) ds \\ f_2(t) = \int_0^t \sin \left(\int_0^s \rho(\sigma) d\sigma \right) ds. \end{array} \right.$$

Il faut donc noter que si $n=1$, le théorème 1 est une version légèrement affaiblie de ce résultat.

§ 3. Une remarque sur l'existence d'immersions cylindriques.

La conclusion du théorème 1 précise que l'immersion obtenue est convexe. Nous pouvons également obtenir une immersion cylindrique, sous de « bonnes » conditions. Rappelons qu'une immersion f d'une variété M de dimension n de l'espace Euclidien \mathbb{R}^{n+1} est cylindrique si

$$B^f = \omega \otimes \omega \otimes \eta,$$

où ω est une 1-forme sur M et η une section de $T^\perp(M)$. ([2].)

Donnons-nous en effet une fonction de classe C^r , $r \in \{0, 1, \dots, \infty\}$, $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la condition: il existe des coordonnées convenables sur \mathbb{R}^n , (x_1, \dots, x_n) , telles que ρ ne dépende que d'une seule variable: $\rho(x_1, \dots, x_n) = \tau(x_1)$, où $\tau: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ . (Cette condition est en particulier vérifiée localement au voisinage d'un point où $d\rho \neq 0$).

Il existe une courbe $c = (c_1, c_2): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $k_1(c) = \tau$, d'après la remarque du paragraphe précédent. L'immersion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ définie par

$$f(x_1, \dots, x_n) = (c_1(x_1), c_2(x_1), x_2, \dots, x_n)$$

vérifie

$$k_1(f)_{(x_1, \dots, x_n)} = k_1(c)_{(x_1)} = \tau_{(x_1)} = \rho(x_1, \dots, x_n)$$

§4. Le cas dégénéré.

Soit x_1, \dots, x_n des coordonnées sur un voisinage de U de 0 dans \mathbb{R}^n et $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Nous notons f_ψ l'immersion de $U - (0)$ dans \mathbb{R}^{n+1} , défini par

$$f_\psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, \psi(r)), \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in U - (0),$$

où $r = \sqrt{x^2 + \dots + x^2}$. Posons $\psi' = \frac{d\psi}{dr}$ et $\psi'' = \frac{d^2\psi}{dr^2}$.

PROPOSITION 2. *Nous avons*

$$k_1^2(f_\psi) = \frac{(\psi'')^2}{(1 + (\psi')^2)^3} + \frac{n-1}{r^2} \frac{(\psi')^2}{1 + (\psi')^2}$$

sur $U - (0)$.

Démonstration. Nous introduisons des coordonnées sphériques $r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ données par

$$x_i = r \left(\prod_{j=1}^{n-1} \cos \theta_j \right) \sin \theta_{n-1}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n,$$

et nous calculons $k_1(f_\psi)$ dans la région V où ces coordonnées sont non singulières. Si g est l'image réciproque de \langle, \rangle par f_ψ , nous avons:

$$g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta_i}\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j}\right) = 0, \quad \forall i, j, i \neq j$$

$$g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = g_{11} = 1 + (\psi')^2;$$

et

$$g\left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_i}\right) = g_{i+1, i+1} = r^2 \prod_{j=1}^{i-1} \cos^2 \theta_j, \quad \text{si } i = 1; \dots; n-1.$$

Il est fastidieux mais facile de voir que

$$B^{f_\psi} \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta_i} \right) = B^{f_\psi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) = 0, \quad \forall i, j, i \neq j;$$

$$\|B^{f_\psi} \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right)\|^2 = (\psi'')^2 / (1 + (\psi')^2),$$

et

$$\|B^{f_\psi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right)\|^2 = \frac{(r\psi')^2}{1 + (\psi')^2} \prod_{i=1}^{i-1} \cos^4 \theta_j, \quad \text{si } i = 1; \dots; n-1.$$

Finalement, nous avons

$$\begin{aligned} k_1^2(f_\psi) &= \frac{\|B^{f_\psi} \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right)\|^2}{g_{11}^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\|B^{f_\psi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_i} \right)\|^2}{g_{i+1, i+1}^2} = \\ &= \frac{(\psi'')^2}{[1 + (\psi')^2]^3} + \frac{n-1}{r^2} \frac{(\psi')^2}{1 + (\psi')^2}, \end{aligned}$$

qui est la formule désirée sur V . Puisque l'image de f_ψ est une hypersurface de révolution, $k_1(f_\psi)$ est invariante par rotations, et la dernière formule est également vraie sur $U - (0)$.

Remarque sur la proposition 2: Ce calcul généralise de façon claire celui de la courbure moyenne λ_2 d'une surface de révolution de \mathbb{R}^3 définie par

$$f_\psi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, \psi(r)).$$

On obtient

$$\lambda_1 = \frac{\psi'}{r \sqrt{1 + \psi'^2}}, \quad \lambda_2 = \frac{\psi''}{(\sqrt{1 + \psi'^2})^3}$$

et par conséquent

$$k_1^2(f_\psi) = \frac{(\psi')^2}{(1+(\psi')^2)^3} + \frac{1}{r^2} \frac{(\psi')^2}{(\psi')^2}.$$

Le lemme suivant est facilement vérifié.

LEMME 2. *La fonction*

$$\varphi(r) = r^3 (n+8-r^6)^{-1/2}$$

est une solution de l'équation différentielle ordinaire

$$(5) \quad r^2 (\varphi')^2 = (1+\varphi^2)^2 \{r^6 + \varphi^2 (r^6 - n + 1)\},$$

dans l'intervalle ouvert $]-(n+8)^{1/6}, (n+8)^{1/6}[$.

Si nous posons $\psi(r) = \int_0^r \varphi(\tau) d\tau$, ψ peut être développé en série entière convergente, relativement à r^2 ; ainsi, f_ψ est une fonction C^∞ sur un voisinage de 0. De plus, le calcul donné dans la démonstration du lemme 1 montre que $k_1(f_\psi)(0) = 0$. D'autre part, il est facile de voir que (5) est équivalent, pour $r \neq 0$, à

$$k_1(f_\psi) = r^2.$$

Ce calcul et le lemme de Morse implique le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Soit ρ une fonction C^∞ , non négative, à valeurs réelles sur une variété de dimension $n \geq 2$. Soit $x \in M$ tel que $\rho(x) = 0$. Si x est un point critique non dégénéré pour ρ , alors il existe une immersion f de M dans l'espace Euclidien \mathbb{R}^{n+1} , définie sur un voisinage de x , dont la première courbure externe est égale à ρ .*

Soit $\rho(r) = \sum_{k=m}^{+\infty} a_k r^k$ la série entière convergente, où $a_m \neq 0$ et $m \geq 2$. Nous avons le

LEMME 3. L'équation différentielle ordinaire

$$(6) \quad r^2 (u')^2 + (n-1) u^2 = r^2 \rho^2,$$

possède une solution analytique réelle dont le domaine de convergence est celui de ρ .

Démonstration. De façon claire, il suffit de montrer que (6) possède une solution en série entière formelle à l'origine.

Posons $F(u) = r^2 (u')^2 + (n-1) u^2 - (r \rho)^2$; Par récurrence, nous pouvons montrer que, pour tout $l \geq m+1$, il existe un polynôme $P_l \in \mathbb{R}(r)$, de degré l , tel que

$$F(P_l) = 0 \pmod{r^{l+m+2}}.$$

La seule possibilité, pour $l = m+1$, est $P_{m+1} = \lambda r^{m+1}$, avec

$$|\lambda| = \frac{a_m}{\sqrt{(m+1)^2 + n - 1}},$$

et nous avons

$$F(P_{m+1}) = a_m^2 r^{2m+2} - (r \rho)^2 = 0 \pmod{r^{2m+3}}.$$

Supposons maintenant que $l \geq m+1$, et que le résultat est vrai pour l . Remarquons que l'hypothèse de récurrence implique que

$$P_l = \lambda r^{m+1} \pmod{r^{m+2}}.$$

Supposons maintenant que $l \geq m+1$, et que le résultat est vrai pour l . Remarquons que l'hypothèse de récurrence implique que

$$P_l = \lambda r^{m+1} \pmod{r^{m+2}}.$$

Donc, si $a \in \mathbb{R}$, nous avons

$$F(P_l + a r^{l+1}) = F(P_l) + ((l+1)^2 + n - 1) a^2 r^{2l+2} +$$

$$2a((l+1)r^{l+2}P' + (n-1)r^{l+1}P_l) = \\ = F(P_l) + 2a\lambda((l+1)(m+1) + n-1)r^{l+m+2} \text{ mod } (r^{e+m+3})$$

Posons $a = \frac{-b}{2\lambda((l+1)(m+1) + n-1)}$ où b est donné par

$$F(P_l) = b r^{l+m+2} \text{ mod } (r^{l+m+3}).$$

Nous obtenons

$$(8) \quad F(P_{l+1}) = 0 \text{ mod } (r^{e+m+3}).$$

A présent, posons

$$\psi(r) = \int_0^r \tan \text{Arcsin } u(\tau) d\tau,$$

où u est donné par le lemme 3. Il est facile de voir que

$$k_1(f_\psi) = \rho, \quad \text{si } r \neq 0.$$

La démonstration du lemme 3 montre que, si ρ s'écrit comme une série entière en r^2 , alors ψ est de même type; ainsi f_ψ est C^∞ sur un voisinage de 0. De plus, d'après le lemme 1, $k_1(f_\psi)(0) = 0$.

Finalement, nous avons montré le théorème suivant, qui généralise le précédent:

THÉORÈME 3. *Soit ρ une fonction C^∞ sur une variété M de dimension $n \geq 2$. Soit $x \in M$ tel que $\rho(x) = 0$. S'il existe des coordonnées (x_1, \dots, x_n) centrées en x sur M , telles que ρ soit développable en série entière convergente de variable $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, il existe une immersion f de M dans \mathbb{R}^{n+1} , définie au voisinage de x , dont la première courbure externe est égale à ρ .*

§5. Un résultat de non existence.

Dans ce paragraphe, nous allons montrer, en utilisant une construction particulière, qu'il est en général impossible de trouver une immersion locale d'une variété dans l'espace Euclidien, avec plusieurs courbures externes données.

Nous avons le théorème suivant:

THÉORÈME 4. *Soit M une variété de dimension n et $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+3}$ une immersion telle que $k_1(f) > 0$, sur un voisinage U d'un point de M . Alors*

$$d[k_1(f)] \wedge d[k_3(f)] = 0 \quad \text{sur } U.$$

Il est d'abord facile de voir que, dans ce cas, le premier et le second espace normal principal sont de rang constant 1.

Nous utilisons le

LEMME 4. (Voir [6] ou [7]). *Soit $\Phi: X \rightarrow \mathbb{R}^{n+3}$ une immersion isométrique d'une variété Riemannienne X dans \mathbb{R}^{n+3} . Supposons que le premier espace normal principal est de rang 1 en tout point, et que $k_2(\Phi)$ est une fonction constante positive. Alors $\Phi(X)$ est localement un cylindre $C \times X_1$, où X_1 est une sous-variété de \mathbb{R}^{n+3} totalement géodésique, et C une courbe, dont les courbures de Frenet satisfont:*

$$k_1(C) = k_1(\Phi)|_C; \quad k_2(C) = k_2(\Phi)|_C; \quad k_3(C) = k_3(\Phi)|_C.$$

Nous pouvons maintenant montrer le théorème 4. Le lemme 4 implique que $f(M)$ est localement un cylindre $C \in M$. De façon claire, ceci implique que $k_1(f)$ et $k_3(f)$ sont constantes sur toute géodésique orthogonale à C . Ainsi $d[k_1(f)] \wedge d[k_3(f)] = 0$.

D'après le théorème 5, si $n \geq 2$ et $\rho_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction positive, ρ_2 est une fonction constante positive, et $\rho_3: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction positive telle que $d\rho_1 \wedge d\rho_3 \neq 0$, nous ne pouvons pas trouver d'immersion f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^{n+3} définie sur un voisinage de 0, tel que $k_1(f) = \rho_1$, $k_2(f) = \rho_2$, $k_3(f) = \rho_3$.

BIBLIOGRAPHIE

- 1) Alexander S., *Reductibility of Euclidean immersions of low codimension*. J. Differential Geometry 3 (1969), 69-82.
- 2) Chen B.Y., *Geometry of Submanifolds*, Marcel Dekker.
- 3) Gasqui J., *Sur l'existence locale d'immersions à courbure scalaire donnée II: le cas différentiable*, Math. Annalen (to appear).
- 4) Grifone J., Morvan J.M., *Courbures de Frenet d'une sous-variété d'une variété riemannienne et cylindricité*. C.R.A.S. Paris 283 (1976) 207-210.
- 5) Klingenberg W., *A course in differential geometry*, Graduate texts in Mathematics 51, Springer-Verlag (1978).
- 6) Morvan J.M., *Thèse*. Université de Limoges, Février 1979.
- 7) Grifone J., Morvan J.M., *External curvatures and internal torsion of a Riemannian submanifold*, J. Diff. Geom. 16 (1981), 351-371.

BIBLIOGRAPHIE

- 1) Alexander S., *Reductibility of Euclidean immersions of low codimension*. J. Differential Geometry 3 (1969), 69-82.
- 2) Chen B.Y., *Geometry of Submanifolds*, Marcel Dekker.
- 3) Gasqui J., *Sur l'existence locale d'immersions à courbure scalaire donnée II: le cas différentiable*, Math. Annalen (to appear).
- 4) Grifone J., Morvan J.M., *Courbures de Frenet d'une sous-variété d'une variété riemannienne et cylindricité*. C.R.A.S. Paris 283 (1976) 207-210.
- 5) Klingenberg W., *A course in differential geometry*, Graduate texts in Mathematics 51, Springer-Verlag (1978).
- 6) Morvan J.M., *Thèse*. Université de Limoges, Février 1979.
- 7) Grifone J., Morvan J.M., *External curvatures and internal torsion of a Riemannian submanifold*, J. Diff. Geom. 16 (1981), 351-371.