GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Étude locale des applications projectives.* Note (*) de **Jean-Marie Morvan** et **Thérèse Nore,** présentée par André Lichnerowicz.

Nous étudions les applications projectives entre variétés munies de connexions linéaires sans torsion.
Nous sommes conduits à introduire la notion d'application « fortement projective », dont la seconde forme fondamentale vérifie une propriété caractéristique analogue à celle des transformations projectives.

DIFFERENTIAL GEOMETRY. — Local Study of Projective Maps.

We study projective maps between manifolds endowed with torsion-free linear connections. This leads us to introduce the notion of "strongly projective map" the second fundamental form of which has a characteristic property generalizing the characteristic property of projective transformations.

1. INTRODUCTION. — Une *transformation projective* est un difféomorphisme qui transforme une géodésique en une géodésique. Les propriétés de telles transformations ont été étudiées en détail par R. Couty [1], et K. Yano [7] entre autres. Utilisant la notion de seconde forme fondamentale d'une application, le théorème suivant donne une propriété caractéristique des transformations projectives.

THÉORÈME A. — [7]. *Soit* $f:(M, \nabla)\to(M', \nabla')$ *un difféomorphisme d'une variété* M *munie d'une connexion* ∇ *à valeurs dans une variété* M′ *munie d'une connexion* ∇'. *f est projective si et seulement si* σ, *la seconde forme fondamentale de f, satisfait la propriété :*
Il existe une 1*-forme* ω *telle que :*

$$(\star\star)\qquad \forall X, Y\in TM,\qquad \sigma(X, Y)=\omega(X)\, f_* Y+\omega(Y)\, f_* X.$$

Il est tentant de vouloir étendre cette propriété aux *applications projectives* (i. e. lorsque f « conserve les géodésiques », mais peut éventuellement avoir un noyau). Généralisant la notion d'immersion projective introduite par K. Yano et S. Ishihara [6], Z. Har'El a défini plus généralement les applications projectives.

Un contre-exemple montre que la propriété caractéristique $(**)$ du théorème A ne s'étend pas aux applications projectives, ce qui est en désaccord avec [3] (*cf.* § 5). Nous sommes ainsi conduits à déterminer la classe des applications projectives dont la propriété caractéristique est $(**)$.

2. CONNEXION IMAGE-RÉCIPROQUE ET SECONDE FORME FONDAMENTALE. — Dans la suite, toutes les connexions seront supposées linéaires sans torsion.

2.1. : Soit $f:(M, \nabla)\to(M', \nabla')$ une application d'une variété M munie d'une connexion ∇ à valeurs dans une variété M′ munie d'une connexion ∇'. Nous notons $f^{-1}(TM')$ le *fibré image réciproque* de base M dont la fibre au point $m\in M$ est l'espace tangent à M′ en $f(m)$, noté $T_{f(m)}M'$.

2.2. : Rappelons (*cf.* [4] ou [5]) qu'il existe une unique connexion linéaire $\overline{\nabla'}$ sur $f^{-1}(TM')$ telle que pour tout vecteur X tangent à M, et pour tout champ Y′ tangent à M′, on ait en posant $\xi'=f^*Y'$:

$$\overline{\nabla'}_X\xi'=\nabla'_{f_*X}Y'|_{f(M)}.$$

2.3. : On désigne par $\overline{\nabla}$ la connexion somme directe de ∇ et $\overline{\nabla'}$ sur le fibré $TM\oplus f^{-1}(TM')$ et sur son algèbre tensorielle.

Rappelons la définition suivante (*cf.* [2] par exemple) :

DÉFINITION. — *Le tenseur symétrique* $\sigma : \mathrm{T}\,\mathrm{M} \times \mathrm{T}\,\mathrm{M} \to \mathrm{T}\,\mathrm{M}'$ *défini par :*

$$\forall \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{T}\,\mathrm{M}, \qquad \sigma(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = (\overline{\nabla} f_*)\,(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \overline{\nabla}'_{\mathrm{X}} f_* \mathrm{Y} - f_* \nabla_{\mathrm{X}} \mathrm{Y}$$

est appelé seconde forme fondamentale de f.

3. APPLICATIONS PROJECTIVES ET FORTEMENT PROJECTIVES. — Pour plus de clarté, précisons que nous appelons une *géodésique par morceaux* d'une variété M munie d'une connexion ∇, une application $\mathscr{C}^\infty$:
$\gamma : \mathrm{I} \to \mathrm{M}$ d'un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ à valeurs dans M telle que :

$$t \to \gamma(t),$$
$$\nabla_{d/dt}\, \dot{\gamma} = \lambda\, \dot{\gamma}, \qquad \text{où} \quad \lambda \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}).$$

Une telle application est appelée une *géodésique* si elle est de plus une immersion. Lorsqu'aucune confusion n'est possible, nous identifions une géodésique et son image. Donnons les :

3.1. DÉFINITION. — *On appelle application projective* $f : (\mathrm{M}, \nabla) \to (\mathrm{M}', \nabla')$ *d'une variété* M *munie d'une connexion* ∇ *vers une variété* M′ *munie d'une connexion* ∇', *une application* $\mathscr{C}^\infty$ *telle que, si* γ *est une géodésique par morceaux de* M, *alors* $f \circ \gamma$ *est une géodésique par morceaux de* M′.

3.2. DÉFINITION. — *On appelle application fortement projective* $f : (\mathrm{M}, \nabla) \to (\mathrm{M}', \nabla')$ *d'une variété* M *munie d'une connexion* ∇ *vers une variété* M′ *munie d'une connexion* ∇', *une application* $\mathscr{C}^\infty$ *telle que si* γ *est une géodésique de* M, *alors* $f \circ \gamma$ *est une géodésique de* M′, *ou a pour image un point de* M′.

3.3. *Remarque.* — Si $f : (\mathrm{M}, \nabla) \to (\mathrm{M}', \nabla')$ est une application fortement projective, une géodésique de M est soit tangente, soit transverse à Ker f_*, en tout point.

4. LE THÉORÈME : PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DES APPLICATIONS FORTEMENT PROJECTIVES.

4.1. THÉORÈME. — *Soit* $f : (\mathrm{M}, \nabla) \to (\mathrm{M}', \nabla')$ *une application de rang constant d'une variété* M *munie d'une connexion* ∇, *à valeurs dans une variété* M′ *munie d'une connexion* ∇'. *Soit* σ *la seconde forme fondamentale de f; f est fortement projective si et seulement si il existe une* 1-*forme* ω *sur* M *telle que :*

$$\forall \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{T}\,\mathrm{M}, \qquad \sigma(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \omega(\mathrm{X})\, f_* \mathrm{Y} + \omega(\mathrm{Y})\, f_* \mathrm{X}.$$

4.2. *Esquisse de démonstration du théorème.* — Notons $\mathscr{N}$ le feuilletage défini par le noyau de f_*. La condition nécessaire repose sur les lemmes suivants, et la condition suffisante ne pose pas de difficultés.

LEMME 1. — *Soit* $f : (\mathrm{M}, \nabla) \to (\mathrm{M}', \nabla')$ *une application de rang constant. Si f est fortement projective, alors le feuilletage* $\mathscr{N}$ *est totalement géodésique.*

LEMME 2. — *Soit* $f : (\mathrm{M}, \nabla) \to (\mathrm{M}', \nabla')$ *une application de rang constant. Si f est fortement projective, alors en tout point m de* M, $\sigma_m(\mathrm{X}_m, \mathrm{X}_m)$ *est proportionnel à* $f_*(\mathrm{X}_m)$, *pour tout* $\mathrm{X}_m \in \mathrm{T}_m\,\mathrm{M}$, *i. e. il existe une fonction* $\mu_m : \mathrm{T}_m\,\mathrm{M} \to \mathbb{R}$ *telle que :*

$$\forall \mathrm{X}_m \in \mathrm{T}_m\,\mathrm{M}, \qquad \sigma_m(\mathrm{X}_m, \mathrm{X}_m) = 2\,\mu_m(\mathrm{X}_m)\, f_*(\mathrm{X}_m).$$

LEMME 3. — *Soit* $\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *une application bilinéaire symétrique. Soit* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *une application linéaire. On suppose que, pour tout* $X \in \mathbb{R}^n$, $\sigma(X, X)$ *est proportionnel à* $\varphi(X)$ [*i. e. il existe une fonction* $\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *telle que* $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\sigma(X, X) = 2\mu(X)\varphi(X)$]. *Alors il existe une forme linéaire* $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *telle que :*

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n, \quad \sigma(X, Y) = \omega(X)\varphi(Y) + \omega(Y)\varphi(X).$$

Démonstration du lemme 2. — Supposons f fortement projective. Soit $m \in M$, X_m un vecteur tangent à M en m. Si $X_m = 0$, $\sigma_m(X_m, X_m) = 0$.

Si $X_m \neq 0$, considérons la géodésique $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ de conditions initiales $\gamma(0) = m$ et $\dot{\gamma}(0) = X_m$, munie d'un paramétrage affine s.

1. Si $X_m \in \operatorname{Ker} f_*$,

$$f_* \dot{\gamma} \equiv 0 \qquad \text{et} \qquad \sigma_m(X_m, X_m) = (\nabla'_{d/ds} f_* \dot{\gamma})_m - f_*(\nabla_{d/ds} \dot{\gamma})_m = 0.$$

2. Si $X_m \notin \operatorname{Ker} f_*$,

$$\sigma_m(X_m, X_m) = (\nabla'_{d/ds} f_* \dot{\gamma})_m \text{ est proportionnel à } f_* X_m.$$

Notons $2\bar{\mu}_m(X_m)$ le facteur de proportionnalité.

Posons :

$$\mu_m(X_m) = \begin{cases} 0 & \text{si } X_m \in \operatorname{Ker} f_*. \\ \mu_m(X_m) & \text{si } X_m \notin \operatorname{Ker} f_*. \end{cases}$$

Nous avons :

$$\forall X_m \in T_m M, \qquad \sigma_m(X_m, X_m) = 2\mu_m(X_m) f_*(X_m).$$

Démonstration du lemme 3. — Soit S un supplémentaire de Ker φ. On pose $S^* = S \setminus \{0\}$.

$\forall V \in S^*$, $\sigma(U, V) = (\mu(U+V) - \mu(V))\varphi(V)$. Posons $\hat{\nu} : \operatorname{Ker}\varphi \times S^* \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\hat{\nu}(U, V) = \mu(U+V) - \mu(V)$. $\hat{\nu}$ est linéaire en U et indépendant de V. Ceci permet d'introduire la forme linéaire $\nu : \operatorname{Ker}\varphi \to \mathbb{R}$ définie par $\nu(U) = \hat{\nu}(U, V)$, pour tout $V \in S^*$. Finalement nous avons :

$$\forall U \in \operatorname{Ker}\varphi, \qquad \forall V \in S, \qquad \sigma(U, V) = \nu(U)\varphi(V).$$

En définissant une forme linéaire $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $\omega(U+V) = \nu(U) + \mu(V)$ pour tout U dans Ker φ, pour tout V dans S, nous obtenons :

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n, \qquad \sigma(X, Y) = \omega(X)\varphi(Y) + \omega(Y)\varphi(X).$$

5. EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES.

5.1. La projection orthogonale p de la sphère $S^2 \subset \mathbb{E}^3$ privée des pôles, sur son axe Nord-Sud est *projective* mais n'est pas *fortement projective*. L'image d'une *géodésique* est une *géodésique par morceaux*. Les feuilles de Ker p_* sont les cercles horizontaux, et donc ombilicaux dans S^2. Un calcul montre d'ailleurs que la seconde forme fondamentale ne peut pas se mettre sous la forme (* *).

5.2. La projection $\pi : \mathbb{E}^3 - \{0\} \to S^2$ définie par :

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, \frac{x_3}{r}\right) \qquad \text{avec} \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

est *fortement projective*.

Les feuilles de $\operatorname{Ker}\pi_*$ sont les droites vectorielles privées de l'origine. Un calcul montre que $\operatorname{Ker}\sigma=\{0\}$. Le vecteur position **m** appartient à $\operatorname{Ker}\pi_*$. Par suite $\operatorname{Ker}\pi_*\not\subset\operatorname{Ker}\sigma$, ce qui est en désaccord avec [3].

6. REMARQUE : LE CAS RIEMANNIEN. — Si les connexions ∇ sur M et ∇' sur M′ sont des connexions de Levi-Civita associées à des métriques g et g', on peut montrer les résultats suivants :

Si $f:(\mathrm{M}, g)\to(\mathrm{M}', g')$ est une application de rang constant fortement projective, l'orthogonal du noyau $\mathcal{N}$ de f_* est intégrable, et définit un feuilletage totalement ombilical. De plus il existe une métrique g_1 sur M, riemannienne, telle que f soit totalement géodésique.

M. Couty a aidé les auteurs de ses conseils et suggestions.

(*) Remise le 27 septembre 1982.

[1] R. COUTY, *Sur les transformations des variétés Riemanniennes et Kähleriennes*, Ann. Inst. Fourier, 19, 1959, p. .

[2] J. EELLS et L. LEMAIRE, *Bull. London Math. Soc.*, 10, 1978.

[3] Z. HAR'EL, *J. Diff. Geom.*, 5, 1980.

[4] N. J. HICKS, *Illinois J. Math.*, 10, 1966.

[5] A. LICHNEROWICZ, *Istuto Nazionale di Alta Mathematica Symposia*, 3, 1970.

[6] K. YANO et S. ISHIHARA, *J. Diff. Geom.*, 10, 1975.

[7] K. YANO, *Integral Formulas in Riemannian Geometry*, Marcel Dekker, 1970.

J.-M. M. : *Centre Universitaire d'Avignon,*
Faculté des Sciences, Département de Mathématiques,
33, *rue Louis-Pasteur*, 84000 *Avignon.*

Th. N. : *Université de Limoges,*
Faculté des Sciences, Département de Mathématiques,
123, *rue Albert-Thomas*, 87060 *Limoges Cedex.*