

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Sur quelques relations entre l'auto-enchaînement d'une sous-variété riemannienne, la somme des indices de ses points d'intersections avec certains fibrés, et ses courbures externes.* Note (*) de **Jean-Marie Morvan**, présentée par M. André Lichnerowicz.

On montre que toute sous-variété M^n de l'espace euclidien dont la troisième courbure externe est non nulle, a un auto-enchaînement nul. On majore également la somme des indices des points d'intersection d'une variété avec son bord au moyen de la première courbure externe de la variété. Enfin, on majore la somme des indices des points d'intersection $I(M^n, E_j)$, $j \geq 1$ d'une variété M^n avec son j -ième espace normal principal au moyen des courbures externes de M^n .

In this work, topological results on submanifolds of Euclidean space are discussed. It is proved that if a submanifold has a third external curvature which is never null, it has a null self-linking. Then, one gives a majoration of the sum of the indices of the intersections of a submanifold with its boundary and with its j -th principal normal spaces, in terms of external curvatures.

Les notations sont celles de ⁽³⁾. Pour ce qui est des définitions des courbures externes et des espaces normaux principaux, on pourra se référer à ⁽¹⁾ et ⁽²⁾.

1. UNE RELATION ENTRE L'AUTO-ENCHAÎNEMENT D'UNE SOUS-VARIÉTÉ ET SES ESPACES NORMAUX PRINCIPAUX.

THÉORÈME 1. — Soit $i : M^n \rightarrow E^{2n+1}$ une immersion isométrique partout non minimale d'une variété riemannienne compacte orientée de dimension n paire dans l'espace euclidien E^{2n+1} . Alors, si $(E_1 \oplus E_2)_p \neq T_p^\perp M^n$ en tout point $p \in M^n$, (en particulier si $k_3^{(i)} \neq 0$ en tout point de M^n), l'auto-enchaînement de M^n est nul.

Démonstration du théorème 1. — Soit h le champ de vecteur de courbure moyenne. Puisque i est partout non minimale, h est partout non nul. Utilisant la définition de J. H. White ⁽⁴⁾, on sait que l'auto-enchaînement SL de M^n est égal à $(1/2) \chi(h^\perp)$, où $h^\perp$ est le sous-fibré du fibré normal, supplémentaire orthogonal du fibré en droite engendré par h . Pour calculer $\chi(h^\perp)$, considérons un repère local $(a_1 \dots a_{2n+1})$ au-dessus de M^n tel que $(a_1 \dots a_n)$ soit tangent à M^n , a_{n+1} soit dans la direction h , a_{2n+1} soit dans $(E_1 \oplus E_2)^\perp$. Alors avec les notations de ⁽³⁾ :

$$\chi(h^\perp) = \frac{(-1)^{n/2}}{2^n \pi^{n/2} [(1/2)n]!} \int_{M^n} \varepsilon_{s_1 \dots s_n} \Omega_{s_2}^{s_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{s_n}^{s_{n-1}},$$

où

$$\Omega_i^s = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^s \wedge \alpha_i^i.$$

Or, chaque terme $\Omega_{s_2}^{s_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{s_n}^{s_{n-1}}$ est une somme de termes tous multiples d'un $\alpha_i^{2n+1} = \langle \nabla' a_i, a_{2n+1} \rangle$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Puisque $a_{2n+1} \in (E_1 \oplus E_2)^\perp$, α_i^{2n+1} est nulle. D'où le résultat.

2. UNE MAJORATION DE LA SOMME DES INDICES DES POINTS D'INTERSECTION D'UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE DE DIMENSION IMPAIRE, AVEC SON BORD, AU MOYEN DE LA PREMIÈRE COURBURE EXTERNE.

THÉORÈME 2. — Soit $g : N^{n+1} \rightarrow E^{2n+1}$ une immersion isométrique d'une variété riemannienne de dimension impaire $n+1$, dans l'espace euclidien E^{2n+1} . On suppose que le bord de N^{n+1} est une variété compacte orientée M^n . On pose $g|_{M^n} = f$. On suppose que f et g sont transverses.

Alors $I(f, g)$, la somme des indices des points d'intersections de N^{n+1} avec son bord M^n , satisfait la relation

$$|I(f, g)| \leq \frac{(n+1)^{n/2} n!}{2^{n+1} \pi^{n/2} (n/2)!} \int_{M^n} k_1^{(g)n}.$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si $k_1^{(g)}|_{M^n} = 0$. Dans ce cas, $I(f, g) = 0$.

Enfin, si E_1^N , le premier espace normal principal associé à g , est différent de $T_p^\perp N^{n+1}$ en tout point $p \in M^n$ (en particulier si $k_2^{(g)} \neq 0$ en tout point, $p \in M^n$), alors $I(f, g) = 0$.

Remarquons d'abord que si f et g ne sont pas transverses, on peut, en utilisant le théorème de transversalité de Thom, les rendre transverse par une « petite déformation » de g . Dans ce cas, $I(f, g)$ est fini puisque M^n est compacte.

Démonstration du théorème 2. — D'après un résultat de J. H. White⁽⁴⁾, $I(f, g) = (1/2) \chi(v^\perp)$, où $v^\perp$ est le fibré supplémentaire orthogonal du fibré engendré par le vecteur v normal à M^n et tangent à N^{n+1} . Choisissons un repère local au-dessus de $M^n(a_1, \dots, a_{2n+1})$ de la façon suivante : $(a_1, \dots, a_n) \in TM$, $a_{n+1} \in TN$, $(a_{n+2}, \dots, a_{2n+1}) \in TN^\perp$. Alors on a

$$\chi(v^\perp) = \frac{(-1)^{n/2}}{2^n \pi^{n/2} (n/2)!} \int_{M^n} \varepsilon_{s_1 \dots s_n} \Omega_{s_1}^{s_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{s_n}^{s_{n-1}}$$

où

$$s_j \in \{n+2, \dots, 2n+1\}, \quad \Omega_{s_k}^{s_j} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^{s_j} \wedge \alpha_{s_k}^i.$$

En remarquant que $\alpha_i^{s_j} = \langle \nabla' a_i, a_{s_j} \rangle$, et donc $\|\alpha_i^{s_j}\| \leq k_1^{(g)}$, on en déduit l'inégalité.

Montrons que l'égalité n'a lieu que si $k_1^{(g)}|_{M^n} = 0$. En effet, soit p un point quelconque de M , soit $(a_{n+2}, \dots, a_{2n+1})$ une base locale au voisinage de p du fibré normal $T^\perp N$, et $(a_1, \dots, a_{n+1})$ une base locale du fibré tangent à N qui diagonalise $\langle H^g(\dots), a_{2n+1} \rangle$ (où H^g désigne la seconde forme fondamentale associée à g).

(★) est une égalité si chaque terme $\Omega_{s_2}^{s_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{s_n}^{s_{n-1}}$ a une norme maximale. Ceci implique, en particulier que

$$\alpha_{2n+1}^{s_j}(a_j) = \pm k_1^{(g)}, \quad \text{et} \quad \alpha_{n+i}^{s_j}(a_j) = 0, \\ \forall j \in \{1, \dots, n+1\}, \quad \forall i \in \{2, \dots, n\}.$$

Le vecteur de courbure moyenne associé à g a donc pour expression $h = q k_1^{(g)} a_{2n+1}$, où q est non nul puisque $n+1$ est impaire.

a_{2n+1} étant quelconque, ceci implique $k_1^{(g)}|_{M^n} = 0$.

Enfin, si E_1^N est différent de $T^\perp N^{n+1}$ en tout point, on peut choisir a_{2n+1} dans $E_1^{N^\perp}$. De façon claire, $\Omega_{s_2}^{s_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{s_n}^{s_{n-1}}$ est alors nul, et donc $\chi(v^\perp) = 0$.

3. UNE MAJORATION DU NOMBRE D'INTERSECTIONS D'UNE SOUS-VARIÉTÉ AVEC SES ESPACES NORMAUX PRINCIPAUX.

DÉFINITION [comparer avec ⁽⁵⁾]. — Une immersion isométrique $i : M^n \rightarrow E^N$ d'une variété riemannienne M^n dans l'espace euclidien E^N est dite E_j -bien courbée si la dimension de E_j est constante lorsque p varie sur M^n .

THÉORÈME 3. — Soit $i : M^n \rightarrow E^{2n+m_j}$ une immersion isométrique d'une variété riemannienne de dimension paire n , compacte, orientée dans l'espace euclidien E^{2n+m_j} .

Soit E_j le j -ième espace normal principal. On suppose M^n E_j -bien courbée, $\dim E_j = m_j$, E_j orientée, M^n et E_j transverses. Alors, en notant $I(M^n, E_j)$ la somme des indices des points d'intersection de M^n avec E_j ,

(a) Si $j=1$:

$$|I(M^n, E_1)| \leq \frac{m_1^{n/2} n!}{2^n \pi^{n/2} (n/2)!} \int_{M^n} k_2^{(i)n} dv;$$

l'égalité a lieu si et seulement si $k_2^{(i)}=0$ en tout point, c'est-à-dire si, localement, la codimension essentielle de M^n est n_1 . Dans ce cas $I(M^n, E_1)=0$. De plus, si $\bigoplus_1^2 E_i \neq T^\perp M^n$ en tout point (en particulier si $k_3^{(i)} \neq 0$ en tout point), $I(M^n, E_1)=0$.

(b) Si $j=2$:

$$|I(M^n, E_2)| < \frac{(n+m_2)^{n/2} n!}{2^n \pi^{n/2} (n/2)!} \int_{M^n} \text{Sup} [k_1^{(i)} k_2^{(i)} k_3^{(i)}]^n dv.$$

De plus, si $\bigoplus_1^3 E_i \neq T^\perp M^n$ (en particulier si $k_4^{(i)} \neq 0$ en tout point), $I(M^n, E_2)=0$.

(c) Si $j=3$:

$$|I(M^n, E_3)| < \frac{(n+m_3)^{n/2} n!}{2^n \pi^{n/2} (n/2)!} \int_{M^n} \text{Sup} [k_1^{(i)} k_3^{(i)} k_4^{(i)}]^n dv.$$

De plus, si $\bigoplus_{j=1}^4 E_j \neq T^\perp M^n$ en tout point (en particulier si $k_5^{(i)} \neq 0$ en tout point), $I(M^n, E_3)=0$.

(d) Si $j \geq 4$:

$$I(M, E_j)=0.$$

Esquisse de démonstration du théorème. — D'après un théorème de J. H. White ⁽⁴⁾, on sait que $I(M^n, E_j) = \chi(E_j^\perp)$. Il suffit donc de majorer $\chi(E_j^\perp)$.

(a) Cas de E_1 . — Considérons un repère local $(a_1, \dots, a_{2n+m_1})$ tel que

$$(a_1, \dots, a_n) \in TM^n, \quad (a_{n+1}, \dots, a_{n+m_1}) \in E_1, \quad (a_{n+m_1+1}, \dots, a_{2n+m_1}) \in E_1^\perp.$$

On a alors

$$\chi(E_1^\perp) = \frac{(-1)^{n/2}}{2^n \pi^{n/2} (n/2)!} \int_{M^n} \varepsilon_{s_1 \dots s_n} \Omega_{s_2}^{s_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{s_n}^{s_{n-1}},$$

où

$$s_k \in \{n+m_1+1, \dots, 2n\}, \quad \Omega_i^s = \sum_{j=1}^{n+m_1} \alpha_j^s \wedge \alpha_i^j.$$

Remarquons que

$$\alpha_j^s = \langle \nabla' a_j, a_s \rangle = 0 \quad \text{si } a_j \in TM,$$

et

$$\|\alpha_j^s\| = |\langle \nabla^\perp a_j, a_s \rangle| \leq k_2^{(i)} \quad \text{si } a_j \in E_1.$$

Par conséquent

$$|\chi(E_1^\perp)| = |I(M^n, E_1)| \leq \frac{m_1^{n/2} n!}{2^n \pi^{n/2} (n/2)!} \int_{M^n} k_2^{(i)n} dv.$$

On peut montrer que l'inégalité est stricte si $\chi(E_1^\perp) \neq 0$. Enfin, si $(E_1 \oplus E_2)_p \neq T_p^\perp M^n$ en tout point $p \in M^n$, on peut choisir a_{2n+n_1} dans $(E_1 \oplus E_2)^\perp$. On en déduit immédiatement que dans ce cas, $\chi(E_1^\perp) = 0$.

(b) *Cas de E_2* . — Considérons dans ce cas $(a_1, \dots, a_{2n+m_2})$ un repère local tel que $(a_1, \dots, a_n) \in TM^n$, $(a_{n+1}, \dots, a_{n+m_2}) \in E_2$, $(a_{n+n_2+1}, \dots, a_{2n+m_2}) \in (E_2 \oplus TM)^\perp$.

Remarquons que

$$\begin{aligned} \|\alpha_j^s\| &\leq k_2^{(i)} && \text{si } a_j \in E_2 \quad \text{et } a_s \in E_1, \\ \|\alpha_j^s\| &\leq k_1^{(i)} && \text{si } a_j \in TM \quad \text{et } a_s \in E_1, \\ \|\alpha_j^s\| &\leq k_3^{(i)} && \text{si } a_j \in E_2 \quad \text{et } a_s \in E_3, \\ \alpha_j^s &= 0 && \text{si } a_j \in TM \quad \text{et } a_s \in E_l, \quad l > 2, \\ \alpha_j^s &= 0 && \text{si } a_j \in E_2 \quad \text{et } a_s \in E_l, \quad l \geq 4. \end{aligned}$$

Un raisonnement semblable à celui de (a) permet de conclure.

Le cas (c) se traite de manière analogue au cas (b).

(d) *Cas de E_j , $j \geq 4$* . — Choisissons un repère local $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+m_j}, \dots, a_{2n+m_j})$ tel que

$$(a_1, \dots, a_n) \in TM, (a_{n+1}, \dots, a_{n+m_j}) \in E_j, \quad j \geq 4,$$

$(a_{n+m_j+1}, \dots, a_{2n+m_j}) \in E_j^\perp$. Il existe l tel que $a_l \in E_2$. Ainsi $\alpha_l^i = 0$ pour tout i tel que a_i appartient à $TM \oplus E_j$. Par suite, $\Omega_{s_2}^{s_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{s_n}^{s_{n-1}} = 0$ et donc $\chi(E_j^\perp) = 0$.

(*) Séance du 5 juin 1978.

(¹) J. GRIFONE et J. M. MORVAN, *Comptes rendus*, 284, série A, 1977, p. 67.

(²) J. GRIFONE et J. M. MORVAN, *Comptes rendus*, 285, série A, 1977, p. 132.

(³) J. M. MORVAN, *Comptes rendus*, 287, série A, 1978, p. 23.

(⁴) J. H. WHITE, Self-Linking and the Gauss Integral in Higher Dimensions. *Amer. J. Math.*, XCI, n° 3, juillet 1969.

(⁵) M. SPIVAK, *Differential Geometry*, IV.

Laboratoire d'Analyse et Géométrie, Université Paul-Sabatier,
U.E.R. de Mathématiques, 118, route de Narbonne, 31077 Toulouse.