C. R. Acad. Sci. Paris, t. 308, Série I, p. 269-272, 1989

Géométrie différentielle/*Differential Geometry*

Classes caractéristiques des sous-variétés isotropes

Jean-Marie MORVAN

Résumé — On définit de façon naturelle les classes caractéristiques d'une sous-variété isotrope M^n de $\mathbb{C}^{n+k}$, muni de sa structure symplectique standard. Ceci généralise directement la théorie des classes caractéristiques des sous-variétés lagrangiennes.

Characteristic classes of isotropic submanifolds

Abstract — *Characteristic classes of isotropic submanifolds* M^n *of* $\mathbb{C}^{n+k}$ *(endowed with its standard symplectic structure) are defined. This is a direct generalisation of the theory of characteristic classes of Lagrangian submanifolds.*

Ce travail est la première partie d'une étude des classes caractéristiques d'une sous-variété isotrope de $\mathbb{C}^{n+k}$. Dans une deuxième partie nous exprimerons ces classes en fonction des invariants locaux (seconde forme fondamentale et courbure) liés à l'immersion.

1. LA GRASSMANNIENNE ISOTROPE $\mathscr{I}\,G_k(\mathbb{C}^{n+k})$. — 1.1. *Généralités.* — Soit $\mathbb{C}^{n+k}$ l'espace vectoriel complexe de dimension réelle $2(n+k)$, muni de son produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$ de sa structure complexe J et de sa structure symplectique $\Omega(.,.)=\langle J.,.\rangle$. Un k-plan [resp. $(2n+k)$-plan] vectoriel réel de $\mathbb{C}^{n+k}$ est dit isotrope (resp. coïsotrope) si : $P\subset P^0$ (resp. $P^0\subset P$) où « ^{0} » désigne l'orthogonal symplectique. La grassmannienne $\mathscr{I}\,G_k(C^{n+k})$ des k-plans isotropes orientés de $\mathbb{C}^{n+k}$ s'identifie naturellement à l'espace homogène $U(n+k)/U(n)\times SO(k)$. Son espace tangent à l'origine, $\mathscr{U}(n+k)/\mathscr{U}(n)\times\mathscr{SO}(k)$, s'identifie à l'espace des matrices carrées du type : $\begin{bmatrix} 0 & A \\ {}^t\bar{A} & B \end{bmatrix}$ où A est une matrice complexe (k, n) et B est une matrice (k, k) symétrique imaginaire pure.

1.2. *La cohomologie de De Rham de* $\mathscr{I}\,G_k(\mathbb{C}^{n+k})$. — Soit $V[\mathscr{U}(n)\times\mathscr{SO}(k)]^*$ l'algèbre symétrique sur $[\mathscr{U}(n)\times\mathscr{SO}(k)]^*$. $(V[\mathscr{U}(n)\times\mathscr{SO}(k)]^*)$ s'identifie au produit tensoriel $\mathbb{R}[c]\otimes\mathbb{R}[a]$, où $\mathbb{R}[c]$ est l'anneau de polynômes sur $\mathbb{R}$ engendré par les générateurs $(c_2,\ldots,c_{2n})$, et $\mathbb{R}[a]$ est l'anneau de polynômes sur $\mathbb{R}$ engendré par les générateurs $(a_4,\ldots,a_{4[k/2]}, e_k)$ (l'indice désigne le degré des générateurs). Ces générateurs sont liés par les seules relations :

$$e_k=0,\qquad \text{si}\quad k \text{ est impair}$$
$$e_k=a_{2k},\qquad \text{si}\quad k \text{ est pair.}$$

Notons $\Lambda P_{U(n+k)}$ l'algèbre extérieure sur le sous-espace gradué des éléments primitifs de $H^*(U(n+k),\mathbb{R})$. On sait que $\Lambda P_{U(n+k)}$ s'identifie à l'algèbre $\Lambda(x_1,\ldots,x_{2n+2k-1})$ (l'indice désigne encore le degré des générateurs), que nous noterons $\Lambda(x)$. Un résultat classique (*cf.* [1] par exemple) permet d'affirmer que la cohomologie réelle de $U(n+k)/U(n)\times SO(k)$ s'identifie à la cohomologie de l'algèbre graduée : $(\mathbb{R}[c]\otimes\mathbb{R}[a])\otimes\Lambda(x)$ munie du cobord d défini par :

$$(1)\qquad d_{\mathbb{R}[c]}=0,\qquad d_{\mathbb{R}[a]}=0,\qquad dx_i=a_{i+1}+\sum_{s+t=i+1} a_s c_t+c_{i+1}$$

avec la convention que $a_s=0$, si s n'est pas un multiple de 4.

Note présentée par André LICHNEROWICZ.

0249-6291/89/03080269 $ 2.00 © Académie des Sciences

Remarquons que les éléments c_{4l+2}, $2 \leqq 4l+2 \leqq 2n$, sont des cobords. En effet, si l'on définit par récurrence les éléments y_{4l+1} par :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{c} y_1 = x_1 \\ y_5 = x_5 - y_1 a_4 \\ \vdots \\ y_{4l+1} = x_{4l+1} - y_{4l+3} a_4 - \ldots - y_{4l+1-4[k/2]} a_{4[k/2]} \\ \vdots \end{array} \right.$$

($1 \leqq 4l+1 \leqq 2n+2k-1$), (avec la convention que $y_s = 0$ si s est négatif), on a :

(3) $dy_{4l+1} = c_{4l+2}$ $(1 \leqq 4l+1 \leqq 2n-1)$, $dy_{4l+1} = 0$ $(2n+1 \leqq 4l+1 \leqq 2n+2k-1)$.

Enfin, si k est pair, $x_{2n+2k-1}$ est un cocycle.

On déduit également de (1) :

$$(4) \qquad (1+c_2+\ldots+c_{2n})(1+a_4+\ldots+a_{4[k/2]}) = 1.$$

Les calculs de cette cohomologie diffèrent ensuite légèrement suivant les valeurs de k et n. Donnons des indications par exemple dans le cas où k est impair et n est pair, $n>k$. On déduit de (1), (2), (3),

$$\mathrm{H}^*(\mathscr{I}\,\mathrm{G}_k(\mathbb{C}^{n+k}), \mathbb{R}) \approx \mathrm{H}^*(\mathbb{R}[a] \otimes \Lambda(x_{2n+3}, \ldots, x_{2n+4u+3}, \ldots, x_{2n+2k-3})) \otimes \Lambda y_{2n+1}, \ldots, y_{2n+4u+1}, \ldots, y_{2n+2k-1})$$

où $\mathbb{R}[a] \otimes \Lambda(x_{2n+3}, \ldots, x_{2n+2k-3})$ est munie de l'opérateur cobord d défini par :

$$d_{\mathbb{R}[a]} = 0, \qquad d_{|\Lambda(x_{2n+3}, \ldots, x_{2n+2k-3})} \text{ est déduite de (1)}$$

et où $dy_{2n+1} = \ldots = dy_{2n+2k-1} = 0$.

Le rang de $\mathbb{R}[a]$ est égal à celui de $\Lambda(x_{2n+3}, \ldots, x_{2n+2k-3})$. Ces deux espaces forment donc une *paire de Cartan*.

La cohomologie de $\mathbb{R}[a] \otimes \Lambda(x_{2n+3}, \ldots, x_{2n+2k-3})$ est engendrée par des générateurs $p_4, p_8, \ldots, p_{4[k/2]}$ dont le degré est multiple de 4. Son polynôme de Poincaré est :

$$\mathrm{P}(t) = \frac{(1-t^{2n+4})}{(1-t^4)} \cdots \frac{(1-t^{2n+2k-2})}{(1-t^{2k-2})}.$$

On en déduit immédiatement la cohomologie de De Rham de $\mathscr{I}\,\mathrm{G}_k(\mathbb{C}^{n+k})$.

D'une façon générale, on a le résultat suivant :

1.3. Théorème. — $\mathrm{H}^*(\mathscr{I}\,\mathrm{G}_k(\mathbb{C}^{n+k}), \mathbb{R})$ *est engendré, en tant qu'anneau,*

(i) *en dimension paire, par les générateurs suivants (dont l'indice désigne le degré)* $(p_4, \ldots, p_{4j}, \ldots, p_{4[k/2]}, e_k, c_k, \ldots, c_{2n})$, *soumis aux seules relations*

$$(l+p_4+\ldots+p_{4[k/2]})(l+c_2+\ldots+c_{2n}) = l, \qquad e_k = 0, \quad \textit{si } k \textit{ est impair},$$
$$\textit{et } e_k = p_{4[k/2]} \textit{ si } k \textit{ est pair;}$$

(ii) *en dimension impaire, par les générateurs*

$$(y_{4[(n+1)/2]+1}, \ldots, y_{4t+1}, \ldots, y_{2n+2k-1}) \quad \textit{si } k \textit{ est impair}$$

$$(y_{4[(n+1)/2]+1}, \ldots, y_{4t+1}, \ldots, y_{2n+2k-3}, x_{2n+2k-1}) \quad \textit{si } k \textit{ est pair.}$$

1.4. *Remarques.* — (i) Géométriquement, les classes p_{4j} sont les classes de Pontrjagyn du fibré tautologique au-dessus de $\mathscr{I}\,\mathrm{G}_k(\mathbb{C}^{n+k})$.

(ii) Lorsque $n=0$, les classes y_{4t+1} sont les « classes de Maslov » de la grassmannienne lagrangienne. On retrouve la classe de Maslov habituelle pour $t=0$ ([2], [3]).

(iii) Lorsque k est pair, $H^*(\mathscr{I}G_k(\mathbb{C}^{n+k}), \mathbb{R})$ admet donc un générateur impair congru à 3 modulo 4.

(iv) On pourra trouver, dans [4], par des voies très différentes, un calcul de la cohomologie de $\mathscr{I}G_k(\mathbb{C}^{n+k})$, à valeurs dans un anneau quelconque. Il ne donne cependant pas les formules explicites (1), (2), (3), qui sont ici indispensables pour la suite.

2. *Classes caractéristiques des sous-variétés isotropes.*

2.1. *Géométrie locale d'une sous-variété isotrope.* — Soit : $M^k \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+k}$ une immersion isotrope d'une variété M orientée de dimension réelle k, à valeurs dans $\mathbb{C}^{n+k}$. Munissons M de la métrique g induite par le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ de $\mathbb{C}^{n+k}$. L'orthogonal (pour g) de $TM \oplus JTM$ définit une distribution complexe $\mathscr{T}$ et l'on a : $T_{IM}\mathbb{C}^{n+k} = TM \oplus JTM \oplus \mathscr{T} = (TM \otimes \mathbb{C}) \oplus \mathscr{T}$. Les classes de Pontryagyn (p) de TM et les classes de Chern (c) de c sont donc liées par la relation $pc = 1$.

2.2. *Définition des classes caractéristiques.* — Identifions $\mathbb{C}^{n+k}$ à $\mathbb{E}^{2(n+k)}$, et considérons l'application de Gauss $\bar{G}$ associée à i, à valeurs dans la Grassmannienne des k-plans orientés $G(k, 2(n+k)) \approx SO(2n+2k)/SO(2n+k) \times SO(k)$, définie par : $\bar{G}(m) = T_m M$, (espace tangent en m à M, translaté à l'origine). Comme M est isotrope, $\bar{G}$ se factorise à travers $\mathscr{I}G_k(\mathbb{C}^{n+k})$:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\bar{G}"] \arrow[dr, "G"'] & & G(k, 2(n+k)) \\ & \mathscr{I}G_k(\mathbb{C}^{n+k}) \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

($G = j \circ \bar{G}$, où j désigne l'inclusion naturelle).

G, $\bar{G}$ et j induisent des morphismes :

$$\begin{tikzcd} H^*(G(k, 2(n+k)), \mathbb{R}) \arrow[rr, "\bar{G}^*"] \arrow[dr, "j^*"'] & & H^*(M, \mathbb{R}) \\ & H^*(\mathscr{I}G_k(\mathbb{C}^{n+k}), \mathbb{R}) \arrow[ur, "G^*"'] & \end{tikzcd}$$

DÉFINITION. — *Soit* $i: M^k \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+k}$ *une immersion isotrope d'une variété* M *à valeurs dans* $\mathbb{C}^{n+k}$. *On appelle classe caractéristique de* M *le pull-back de toute classe de cohomologie de* $\mathscr{I}G_k(\mathbb{C}^{n+k})$.

2.3. *Remarque.* — On pourrait établir de façon analogue une théorie des sous-variétés coïsotropes de $\mathbb{C}^{n+k}$. Dans ce cas, l'application de Gauss associerait, à tout point m de la sous-variété coïsotrope M, l'espace normal $T^\perp M$, translaté à l'origine.

3. GÉNÉRALISATION ET INTERPRÉTATION. — 3.1. Il est facile de généraliser cette construction dans le cadre suivant : (E, M, B) est un fibré symplectique trivial dont les fibres sont de dimension réelle $2(n+k)$, muni d'un sous-fibré coïsotrope trivial C, dont les fibres sont de dimension réelle $2n+k$. La donnée d'un sous-fibré isotrope I, dont les fibres sont de dimension réelle k, d'une métrique riemannienne g et d'une structure presque complexe J adaptée à la structure symplectique sur E, permet de définir une application de Gauss de B à valeurs dans $\mathscr{I}G_k(\mathbb{C}^{n+k})$. Les classes caractéristiques obtenues ne dépendent pas du choix de g et de J. Cette construction peut ensuite s'étendre au cas où E et C ne sont pas triviaux (en augmentant E et C pour se ramener au cas trivial [4]).

3.2. Les classes caractéristiques ainsi obtenues sont, comme dans le cas lagrangien, des obstructions à la transversalité de I et C (chaque composante connexe de l'espace des sous-espaces isotropes I transverses à un sous-espace coïsotrope fixé est contractile (*cf.* [4] pour une preuve élégante)).

Note reçue le 16 septembre 1987, acceptée le 28 septembre 1987.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] W. GREUB, B. HALPERIN et R. VANSTONE, *Connections, curvature and cohomology*, Academic Press, 1972.

[2] D. G. FUKS, Classes caractéristiques de Maslov-Arnold, *Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R.*, 178, 1968, p. 303-306.

[3] J.-M. MORVAN et J. NIGLIO, Classes caractéristiques des couples de sous-fibrés lagrangiens, *Ann. Inst. Fourier*, 37, n° 2, 1986, p. 193-209.

[4] F. LALONDE (à paraître).

Université d'Avignon, Département de Mathématiques, 33, *rue Louis-Pasteur*, 84000 *Avignon.*