GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Connexions et feuilletages en géométrie symplectique.* Note (*) de **Jean-Marie Morvan,** présentée par André Lichnerowicz.

Dans cette Note, nous donnons une interprétation symplectique de la torsion d'une connexion linéaire. Ensuite, nous étudions les feuilles lagrangiennes définies sur une variété symplectique.

DIFFERENTIAL GEOMETRY. — Connexion and Foliation in Symplectic Geometry.

In this Note, we give a symplectic interpretation of the torsion of a linear connexion. Then, we study Lagrangian leaves of a foliation defined on a symplectic manifold.

1. INTRODUCTION. — Rappelons qu'une variété M^{2n} de dimension $2n$ est symplectique si elle est munie d'une 2-forme fermée non dégénérée Ω. Une feuille L d'un feuilletage de codimension n, définie sur M^{2n} est lagrangienne si $\Omega(X, Y)=0\ \forall X, Y \in TL$ (où TL désigne l'espace tangent à L). Nous dirons qu'un feuilletage sur M^{2n} est lagrangien si chaque feuille est lagrangienne.

La structure des feuilles d'un feuilletage lagrangien a été étudiée par A. Weinstein, puis P. Dazord ([4], [1]). Le principal résultat est le suivant :

THÉORÈME A ([4], [1]). — *Soit* L *une feuille d'un feuilletage lagrangien d'une variété symplectique. Alors* L *est canoniquement munie d'une connexion linéaire plate sans torsion (donc* L *est affine).*

Si l'holonomie infinitésimale de L *est réduite à* 0 *et si la connexion canonique est complète, alors* L *est isomorphe au produit d'un tore par un espace euclidien.*

Le théorème a été précisé par A. Lichnerowicz et Tran-Van-Tan [5].

Le théorème de Liouville est un cas particulier de cette situation :

THÉORÈME B. — *Soient* $f_1, \ldots, f_n$, n *fonctions réelles en involution sur une variété symplectique* (M^{2n}, Ω) *de dimension* $2n$. (*i.e.* $\Omega(df_i, df_j)=0\ \forall i, j \in \{1 \ldots n\}$). *Soit* a *une valeur régulière de* $f=(f_1, \ldots, f_n)$, *et* N_a *une composante connexe compacte non vide de* $f^{-1}(a)$. *Alors* N_a *est une sous-variété lagrangienne de* (M^{2n}, Ω), *difféomorphe au tore* $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$.

Dans ce travail, nous utilisons la notion de feuilletages lagrangiens pour définir les connexions lagrangiennes (plates), ce qui permet de donner une interprétation symplectique de la torsion d'une connexion linéaire et de généraliser cette notion au cas non linéaire. Ensuite, nous étudions la structure des feuilles lagrangiennes d'un feuilletage quelconque défini sur une variété symplectique.

2. EXEMPLES DE FEUILLETAGES LAGRANGIENS. — 2.1. Le théorème de Liouville permet de construire localement des feuilletages lagrangiens.

2.2. Tout feuilletage de $T^2 = S^1 \times S^1$, muni de la structure symplectique définie par une forme volume, est évidemment lagrangien. Si $\mathscr{F}_i$ est un feuilletage d'un tore T_i^2, $i \in \{1, \ldots, n\}$ alors $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2 \times \ldots \times \mathscr{F}_n$ définit un feuilletage sur $T^{2n} = T_1^2 \times T_2^2 \times \ldots \times T_n^2$, muni de la structure symplectique produit. Dans ce cas, chaque feuille est un produit de courbe.

2.3. M. Boyom a montré que tout groupe de Lie résoluble muni d'une structure symplectique invariante à gauche possède un sous-groupe qui est une feuille lagrangienne (non publié).

2.4. La proposition suivante permet de construire des champs de plans et des feuilletages lagrangiens à holonomie linéaire.

Elle donne de plus une interprétation symplectique de la torsion d'une connexion. On a :

2.4.1. PROPOSITION. — *Soit* M *une variété munie d'une connexion linéaire* ∇. *Soit* ∇^* *la connexion linéaire duale de* ∇ *définie sur* T^*M. *Alors,* ∇ *est sans torsion si et seulement si la distribution horizontale canoniquement associée à* ∇^* *sur* T^*M *est lagrangienne sur* T^*M *munie de sa structure symplectique canonique.*

Si la connexion ∇ est plate, la distribution horizontale est intégrable. On a donc le :

2.4.2. COROLLAIRE. — *Soit* M *une variété munie d'une connexion linéaire plate sans torsion. Alors* T^*M *est canoniquement munie d'un feuilletage lagrangien à holonomie linéaire.*

3. CONNEXIONS LAGRANGIENNES. — Rappelons qu'une connexion (généralisée) sur un fibré est la donnée d'une distribution supplémentaire à la distribution définie par les fibres. Cette connexion est dite plate si la distribution est intégrable. La proposition 2.4.1. conduit à donner la définition suivante :

3.1. DÉFINITION. — *Une connexion (généralisée) sur le fibré cotangent* T^*M *à une variété* M *est dite lagrangienne si la distribution qu'elle définit est lagrangienne pour la structure symplectique canonique sur* T^*M.

On déduit aisément du théorème A le théorème suivant :

3.2. THÉORÈME. — *Soit* M *une variété de dimension* n, *dont le fibré cotangent est muni d'une connexion (généralisée) lagrangienne plate et complète. Alors* M *admet un revêtement affine.*

3.3. *Remarque.* — Si M est une variété dont le fibré T^*M est muni d'une connexion lagrangienne plate, T^*M est alors muni de deux feuilletages lagrangiens transverses : le feuilletage défini par les fibres de T^*M et celui défini par la distribution horizontale de la connexion plate.

L'auteur [3], ainsi que J. Breuneval et J. Elhadad, dans un travail non publié, ont montré qu'une variété symplectique possédant deux feuilletages lagrangiens transverses est canoniquement muni d'une connexion linéaire sans torsion.

Les deux derniers auteurs ont précisé que la courbure de cette connexion est l'obstruction à l'existence d'un symplectomorphisme local entre la variété et l'espace euclidien muni de sa structure symplectique canonique, qui transporte les feuilletages de la variété sur les feuilletages définis par les plans horizontaux et verticaux. Appliquant ce résultat à T^*M, on voit donc que si le fibré T^*M est muni d'une connexion lagrangienne plate, alors la variété T^*M est munie d'une connexion canonique. Sa courbure est en général non nulle (même dans le cas où $M=\mathbb{R}$).

4. FEUILLE LAGRANGIENNE D'UN FEUILLETAGE. — Nous considérons, dans ce paragraphe, une variété symplectique de dimension $2n$, (M, Ω), munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension n. On a la :

4.1. PROPOSITION. — *Soit* L *une feuille lagrangienne d'un feuilletage* $\mathcal{F}$ *défini sur une variété symplectique* (M, Ω). *Alors :*

1° L *est canoniquement munie d'une connexion linéaire plate* ∇;

2° *la torsion* T *de* ∇ *vérifie :*

$$\Omega(T(X, Y), Z) = Z.\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}), \qquad si \quad X=\tilde{X}_{|L}; \qquad Y=\tilde{Y}_{|L};$$

pour tout $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ *tangents à* $\mathcal{F}$ *et pour tout* $Z \in TM_{|L}$.

La proposition 4.1 conduit à donner les deux définitions suivantes :

4.2. DÉFINITION. — *Une feuille lagrangienne d'un feuilletage $\mathscr{F}$ défini sur une variété symplectique est complète si la connexion canonique qui lui est associée est complète.*

4.3. DÉFINITION. — *Soit* L *une feuille lagrangienne d'un feuilletage $\mathscr{F}$ défini sur une variété symplectique* (M, Ω). *On appelle tenseur fondamental* $\tau_{L,\mathscr{F}}$ *de* L *le tenseur suivant :*

$$\begin{aligned} \tau_{L,\mathscr{F}} : TL \times TL \times TM_{|L} &\to \mathscr{C}^{\infty}(L) \\ (X\ ,\ Y\ ,\ Z) &\mapsto \tau_{L,\mathscr{F}}(X, Y, Z) = Z.\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) \end{aligned}$$

où $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ *sont des champs de vecteurs tangents aux feuilles, définis sur un voisinage de* L, *et prolongeant* X *et* Y.

4.4. UN THÉORÈME DE LINÉARISATION. — *Soit* L *une sous-variété lagrangienne fermée de dimension n d'une variété symplectique* (M, Ω). *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) L *est une feuille d'un feuilletage $\mathscr{F}$ défini sur un voisinage de* L, *de tenseur fondamental* $\tau_{L,\mathscr{F}}$ *identiquement nul;*

(ii) L *est une feuille d'un feuilletage $\mathscr{L}$ Lagrangien défini sur un voisinage de* L;

(iii) L *est une feuille d'un feuilletage $\mathscr{L}'$ Lagrangien à holonomie linéaire, défini sur un voisinage de* L;

Si, de plus* L *est complète*, (i), (ii),. (iii) *impliquent :

(iv) L *admet un revêtement affine.*

5. EXEMPLE ET APPLICATION. — 5.1. On sait qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une sous-variété fermée, plongée dans une variété soit une feuille d'un feuilletage défini sur un de ses voisinages est que le fibré normal de M soit à groupe structural discret [2]. Si l'on impose de plus que M est une sous-variété lagrangienne plongée dans une variété symplectique, l'isomorphisme canonique entre le fibré cotangent et le fibré normal de L implique que L est à groupe structural discret. On peut cependant se poser la question suivante : Si L est une sous-variété lagrangienne fermée à groupe structural discret, plongée dans une variété symplectique, est-elle une feuille d'un feuilletage lagrangien défini sur un de ses voisinages ? La réponse est négative en général. S^3 est un exemple de ce type. Considérons son plongement canonique lagrangien dans T^*S^3 au moyen de la section nulle. Puisque S^3 a une structure de groupe de Lie, elle admet une connexion linéaire plate (associée au parallélisme défini par les translations à gauche). Par dualité il existe donc une connexion linéaire plate sur T^*S^3, qui implique l'existence d'un feuilletage sur T^*S^3 transverse au vertical.

Par contre, si S^3 était une feuille d'un feuilletage lagrangien de T^*S^3, alors S^3 serait munie d'une connexion linéaire plate sans torsion (théorème A). Comme S^3 est simplement connexe, elle serait difféomorphe à $\mathbb{R}^3$ ce qui est absurde.

Ceci implique en particulier que si $\mathscr{F}$ est un feuilletage quelconque d'une variété symplectique dont S^3 est une feuille lagrangienne, alors $\tau_{S_3,\mathscr{F}} \neq 0$.

5.2. Le théorème de Liouville peut être amélioré de la façon suivante :

COROLLAIRE 5.2. — *Soient* $f_1, \ldots, f_n$, *n fonctions réelles sur une variété symplectique* (M^{2n}, Ω). *Soit a une valeur régulière de* $f = (f_1, \ldots, f_n)$ *et* N_a *une composante connexe compacte non vide de* $f^{-1}(a)$. *Si :*

(i) *Les fonctions* f_i *sont « en involution sur* N_a *» i.e. :*

$$\Omega(df_i, df_j)_{|N_a} = 0, \qquad \forall\, i, j \in \{1 \ldots n\},$$

(ii) $$\frac{\partial}{\partial x_k}\,\Omega(df_i,\, df_j)_{|\mathrm{N}_a}=0, \qquad \forall\, i, j \in \{1 \ldots n\}, \quad \forall\, k \in \{1 \ldots 2n\},$$

alors N_a *est une sous-variété Lagrangienne difféomorphe au tore* $\mathrm{T}^n = \mathrm{S}^1 \times \ldots \times \mathrm{S}^1$.

(*) Remise le 25 avril 1983.

[1] P. Dazord, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, 4e série, 13, 1981.

[2] A. Haefliger, *Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa*, (3), n° 16, 1962.

[3] J.-M. Morvan, *Quelques invariants topologiques en géométrie symplectique* [*Ann. I.H.P.* (à paraître)].

[4] A. Weinstein, *Lectures on Symplectic Manifolds* (*Reg. Conf. Serie in Math.*, 29, Amer. Math. Soc. Providence, R.I., 1977).

[5] A. Lichnerowicz et Tran-Van-Tan, *Comptes rendus*, 296, série I, 1983, p. 205.

Faculté des Sciences d'Avignon, Département de Mathématiques,
33, *rue Louis-Pasteur*, 84000 *Avignon.*