GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Courbures externes et torsion interne d'une sous-variété d'une variété riemannienne.* Note (*) de **Joseph Grifone** et **Jean-Marie Morvan**, présentée par M. André Lichnerowicz.

On introduit les notions de courbures externes et torsion interne d'une sous-variété d'une variété riemannienne. On démontre une propriété reliant la torsion interne à l'indice de nullité relative, en vue de donner, dans une prochaine Note, une description des sous-variétés dont l'une des courbures externes et la torsion interne sont constantes, dans le cas où la dimension du premier espace normal principal est 2.

*We introduce the notions of external curvatures and internal torsion of Riemannian submanifols. We prove a property connecting internal torsion to relative nullity index, in order to give, in a forthcoming note, a description of submanifolds of which one of the external curvatures and interal torsion are constant, when the dimension of the first principal normal space is 2.*

Dans une Note ([1]) nous avons étudié les sous-variétés d'une variété à courbure constante, dans le cas où le premier espace normal principal est de dimension 1. On se propose d'étudier le cas où la dimension du premier espace normal principal est 2.

Les notations sont les mêmes que celles employées en ([1]).

1. DÉFINITIONS.

LEMME. — *Soit $\mathcal{D}$ une distribution sur* M *et $\mathcal{D}^{\perp}$ son supplémentaire orthogonal,* $\mathrm{pr}_{\mathcal{D}^\perp}$ *l'application projection sur $\mathcal{D}^{\perp}$. Si $\nabla$ est une connexion sur* M, *alors pour tout $\xi \in \mathcal{D}$,* $\mathrm{pr}_{\mathcal{D}^\perp}(\nabla\xi)$ *a un caractère tensoriel en $\xi$. En particulier* $(\mathrm{pr}_{\mathcal{D}^\perp}\nabla\xi)_x$ *ne dépend que de la valeur de $\xi$ en $x$.*

Ceci autorise les définitions suivantes.

DÉFINITION 1. — *On appelle i*-ième espace normal principal *au point $x \in$ M $(1 \leqq i \leqq p)$ le sous-espace $(\mathrm{E}_i)_x$ défini par récurrence de la manière suivante :*

$$(\mathrm{E}_1)_x = [\mathrm{Im}\,\mathrm{H}]_x$$

*c'est-à-dire : l'espace vectoriel engendré par l'image de* $\mathrm{H}_x$ *:*

$$(\mathrm{E}_i)_x = [(\bar{\mathrm{E}}_i)_x]$$

*où*

$$(\bar{\mathrm{E}}_i)_x = \{\eta \in \mathrm{T}_x^{\perp}\mathrm{M} \mid \exists\, \mathrm{X} \in \mathrm{T}_x\mathrm{M},\ \exists\, \xi \in (\mathrm{E}_{i-1})_x,\ \eta = pr_{(\underset{j<i}{\oplus}(\mathrm{E}_j)_x)^\perp}\nabla_{\mathrm{X}}^{\perp}\xi\}.$$

*Remarque :*

$$(\mathrm{E}_i)_x = \{0\} \quad\Rightarrow\quad (\mathrm{E}_{i+1})_x = \{0\}.$$

Par construction ces espaces sont en somme directe.

DÉFINITION 2. — *Soient les applications (pour $2 \leqq i \leqq p$) :*

$$k_i :\ (\mathrm{E}_{i-1})_x \to \mathbf{R}^+,$$

$$\eta \to \underset{\mathrm{X}\in \mathrm{U}_x(\mathrm{M})}{\mathrm{Sup}} \left\| \mathrm{pr}_{(\underset{j<i}{\oplus}(\mathrm{E}_j)_x)^\perp}\nabla_{\mathrm{X}}^{\perp}\eta \right\|.$$

*On pose*

$$(k_1^{(M)})_x = \sup_{X, Y \in U_x(M)} \| H(X, Y) \|, \qquad (k_i^{(M)})_x = \sup_{\substack{\eta \in (E_i - 1)_x \\ \|\eta\| = 1}} (k_i(\eta))_x \qquad (2 \leqq i \leqq p)$$

$(k_j^{(M)})_x$ $(j = 1, \ldots, p)$ *est dite j-ième courbure de Frenet ou j*-ième courbure externe *de* M *au point x. En particulier* $(k_2^{(M)})_x$ *est dite torsion externe de* M *en x.*

DÉFINITION 3. — *Soit*

$\mathscr{E}_x = \{$ *sections locales, unitaires,* $\eta$, *au voisinage de x, a valeurs dans* $E_1$ *telles que* $k_2(\eta) = 0 \}$.

*Si* $\mathscr{E}_x = \emptyset$ *on pose* $\theta^{(M)}(x) = -\infty$.

*Si* $\mathscr{E}_x \neq \emptyset$ *on pose* $\theta^{(M)}(x) = \sup_{\eta \in \mathscr{E}_x} \sup_{X \in U_x(M)} \| \nabla_X^{\perp} \eta \|$.

$\theta^{(M)}(x)$ *est dite* torsion interne *de* M *en x.*

*Remarques.* — 1. $(E_i)_x = \{ 0 \} \Leftrightarrow (k_i^{(M)})_x = 0$.

Un point $x \in M$ tel que $(k_1^{(M)})_x \ldots (k_s^{(M)})_x$ soient non nulles est dit *s-régulier.*

2. Si M est une courbe, $k_i^{(M)}$ coïncide avec la *i*-ième courbure de Frenet de la courbe au sens classique. $\theta^{(M)}$ est finie si et seulement si la courbe est plane et dans ce cas elle vaut 0.

3. Si $\dim E_1 = 1$, $k_i^{(M)}$ coïncide avec la *i*-ième courbure de Frenet définie en [1]. $\theta^{(M)}$ est finie si et seulement si $k_2^{(M)} = 0$ et dans ce cas elle est nulle.

DÉFINITION 4. — *Soit* M *une sous-variété isométrique de* M'. *On dit que* M *a une distorsion égale à r si*

$$k_2^{(M)} = 0, \qquad \dim E_1 = r \quad (\textit{en tout point}).$$

La proposition suivante généralise une propriété bien connue des courbes :

PROPOSITION. — *Soit* M *une variété simplement connexe, de dimension n, isométriquement immergée dans l'espace à courbure constante* $R^{n+p}(c)$ [cf. [2]]. *Si la distorsion de* M *est r alors* M *peut être immergée isométriquement dans* $R^{n+r}(c)$.

2. SOUS-VARIÉTÉS BIRÉGULIÈRES TELLES QUE $\dim E_1 = 2$.

THÉORÈME. — *Soit* M' *une variété à courbure constante, de dimension* $n+p$ $(n \geqq 3)$ *et* M *une sous-variété isométrique de dimension n, telle que :*

— $\dim E_1 = 2$ *(en tout point);*

— *tout point de* M *est bi-régulier.*

*Alors :*

(1) *Si* $\theta^{(M)} \neq -\infty$ *en tout point de* M, *il existe une base orthonormée* $(\xi, \eta)$ *de* $E_1$ *globale et canonique au signe près telle que* $k_2(\xi) \neq 0$, $k_2(\eta) = 0$. *De plus* $\dim E_2 = 1$ *en tout point.*

(2) *Si* $\theta^{(M)} = -\infty$ *en tout point de* M *l'indice de nullité relative* $\nu$ *de* M *est égal à* $n-2$ *en tout point. De plus,* $\dim E_2 \leqq 2$.

*Indications sur la démonstration.* — (1) Puisque $\theta^{(M)} \neq -\infty$, pour tout $x \in M$ il existe un voisinage U et $\eta \in \mathscr{E}_x$ telle que sur U $k_2(\eta) = 0$. Soit $\xi$ une section de $E_2$ au-dessus de U telle que $(\xi, \eta)$ soit une base orthonormée. On voit facilement, du fait que tout point est bi-régulier, que $k_2(\xi) \neq 0$. Soit maintenant $(U_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$ un recouvrement de M avec des bases $(\xi_\alpha, \eta_\alpha)$ comme ci-dessus. Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ on aura, sur $U_\alpha \cap U_\beta$, $\eta_\alpha = \pm \eta_\beta$ car autrement $\eta_\alpha$ et $\eta_\beta$ seraient linéairement indépendantes et $k_2^{(M)} = 0$ sur $U_\alpha \cap U_\alpha$ (*cf.* lemme). Puisque dim $E_1 = 2$ et $\xi_\alpha \perp \eta_\alpha$ on aura $\xi_\alpha = \pm \xi_\beta$. D'où l'existence de la base globale et canonique au signe près.

(2) On a $\nu(x) \leqq n-2$ pour tout $x \in M$. En effet $\nu(x) = n$ signifie que le point est plat, ce qui est exclus car $(k_2^{(M)})_x \neq 0$; et $\nu(x) = n-1$ implique $\dim (E_1)_x = 1$ comme on le voit facilement. La démonstration de la deuxième partie du théorème se fait par les lemmes suivants.

LEMME ALGÉBRIQUE. — *Soient h et k deux formes bilinéaires symétriques non nulles et non proportionnelles sur* $\mathbf{R}^n$ $(n \geqq 3)$ *et* L, M *deux applications linéaires de* $\mathbf{R}^n$ *dans* $\mathbf{R}^p$ *non nulles et non proportionnelles telles que*

$$(1) \quad h(Y, Z)L(X) - h(X, Z)L(Y) + k(Y, Z)M(X) - k(X, Z)M(Y) = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathbf{R}^n.$$

*Alors :*

– $\dim(\operatorname{Ker} h \cap \ker k) = n-2$;

– $\dim[\operatorname{Im} L \cup \operatorname{Im} M] \leqq 2$.

LEMME 1. — *On note, pour* $\xi \in E_1$, $L_\xi(X) = \mathrm{pr}_{E_2} \nabla_X^\perp \xi$. *Soit* $x \in M$ *tel qu'il existe une base orthonormée* $(\xi, \eta)$ *de* $(E_1)_x$ *pour laquelle* $L_\xi$ *et* $L_\eta$ *ne soient pas proportionnels. Alors*

$$\nu(x) = n-2, \qquad \dim(E_2)_x \leqq 2.$$

En effet, soit en $x$, $H = h \otimes \xi + k \otimes \eta$ la deuxième forme fondamentale. En projetant sur $E_2$ l'équation de Gauss-Codazzi on trouve l'équation (1) avec $L = L_\xi$ et $M = L_\eta$. D'où

$$\dim(\operatorname{Ker} h \cap \operatorname{Ker} k)_x = \nu(x) = n-2$$

et

$$\dim[\operatorname{Im} L_\xi \cup \operatorname{Im} L_\eta]_x = \dim(E_2)_x \leqq 2.$$

LEMME 2. — *Soit* $\theta^{(M)} = -\infty$ *en tout point de* M. *Alors pour tout* $x \in M$, *pour tout voisinage* U *de* $x$ *et pour toute base orthonormée* $(\xi, \eta)$ *de* $E_1$ *au-dessus de* U *il existe* $V \subset U$ *tel que, sur* V, $L_\xi$ *et* $L_\eta$ *sont non proportionnelles.*

En effet, $(L_\xi)_x = 0$ et $(L_\eta)_x = 0$ est impossible car $(k_2^{(M)})_x \neq 0$. Supposant $(L_\xi)_x \neq 0$, $(L_\eta)_x = 0$. Soit $W \subset U$ un voisinage sur lequel $L_\xi |_W \neq 0$. Sur W il existe un point $p$ tel que $(L_\eta)_p \neq 0$ (autrement $\theta_p^{(M)} \neq -\infty$). S'il existe un voisinage W' de $p$ tel que $L_\xi = \alpha L_\eta$ sur W' en posant $\xi = (-\xi + \alpha\eta)/(\sqrt{1+\alpha^2})$ on aurait $L_\xi |_{W'} = 0$, ce qui est exclu car $\theta_p^{(M)} = -\infty$.

Donc pour tout voisinage W' de $p$ il existe $p' \in W'$ tel que en $p'$ $L_\xi \neq 0$, $L_\eta \neq 0$ et $L_\xi$ et $L_\eta$ sont non proportionnelles. Puisque $L_\xi$ et $L_\eta$ sont continues cette propriété est valable sur un voisinage V de $p'$. Enfin si $(L_\xi)_x$ et $(L_\eta)_x \neq 0$ on procède comme ci-dessus avec $p = x$.

*Démonstration de la deuxième partie du théorème.* — En combinant les lemmes 1 et 2 on obtient :

(★) pour tout $x \in M$, pour tout voisinage U de $x$, il existe $V \subset U$ tel que $\nu|_V = n-2$.

Supposons maintenant qu'il existe $x \in M$ tel que $\nu(x) < n-2$. Puisque $\nu$ est semi-continue supérieurement il existe U voisinage de $x$ tel que $\nu|_U < \nu - 2$. Or ceci est impossible d'après (★).

(*) Séance du 23 mai 1977.

[1] J. Grifone et J. M. Morvan, *Comptes rendus*, série A, 283, 1976, p. 207

[2] B. Y. Chen, *Geometry of Submanifolds*, New York, Marcel Dekker, 1973.

*Laboratoire d'Analyse et de Géométrie,*
*U.E.R. de Mathématiques,*
118, *route de Narbonne,*
31077 *Toulouse Cedex.*