GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Courbures de Frenet d'une sous-variété d'une variété riemannienne et « cylindricité »*. Note (*) de MM. **Joseph Grifone** et **Jean-Marie Morvan**, présentée par M. André Lichnerowicz.

On définit les « courbures de Frenet » d'une sous-variété M d'une variété riemannienne M'. On montre, dans le cas où M' est à courbure constante, que si la seconde forme fondamentale (en tant qu'application à image dans le fibré normal) a rang 1 et l'une des courbures de Frenet est constante, non nulle, alors l'immersion est « cylindrique ».

1. COURBURES DE FRENET D'UNE SOUS-VARIÉTÉ D'UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE. — Soient (M, g) et (M', g') deux variétés riemanniennes de dimension n et $n+p$ ($n \geqq 2$) et $i : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ un plongement isométrique. U (M) désignera la variété des vecteurs tangents à M de norme 1; ∇, ∇' les connexions de Levi-Civita de M et M'; $\mathrm{TM}^\perp$ le fibré normal et $\nabla^\perp$ la connexion riemannienne induite par ∇' sur $\mathrm{TM}^\perp$. On notera H la seconde forme fondamentale et K le tenseur associé défini par

$$g(\mathrm{K}(\mathrm{X}, \mathrm{N}), \mathrm{Y}) = g'(\mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}), \mathrm{N}),$$

où X, Y $\in$ TM et N $\in \mathrm{TM}^\perp$. Soit ξ_1 le vecteur de courbure moyenne $[(\xi_1)_x = \sum_i \mathrm{H}(e_i, e_i)$, où (e_i) est une base orthonormée en $x]$ et $k_1^{(\mathrm{M})} = \| \xi^1 \|$. En tout point $x \in \mathrm{M}$ tel que $(k_1^{(\mathrm{M})})_x \neq 0$, on définit $\mathrm{A}_1 = \xi_1/k_1^{(\mathrm{M})}$.

Au voisinage de tout point $x \in \mathrm{M}$ tel que $(k_1^{(\mathrm{M})})_x \neq 0$ on définit les applications $k_i : \mathrm{U}(\mathrm{M}) \to \mathbf{R}^+$ de la manière suivante. Soit $\mathrm{U} \in \mathrm{U}(\mathrm{M})$. On pose $k_2(\mathrm{U}) = \| \nabla_{\mathrm{U}}^\perp \mathrm{A}_1 \|$. Au voisinage de x tel que $k_2(\mathrm{U})_x \neq 0$ on définit le vecteur normal $\mathrm{A}_2(\mathrm{U}) = \nabla_{\mathrm{U}}^\perp \mathrm{A}_1/k_2(\mathrm{U})$, le vecteur $\xi_3(\mathrm{U})$ [normal à A_1 et $\mathrm{A}_2(\mathrm{U})$] par $\nabla_{\mathrm{U}}^\perp \mathrm{A}_2(\mathrm{U}) = \xi_3(\mathrm{U}) - k_2(\mathrm{U})\mathrm{A}_1$ et le scalaire $k_3(\mathrm{U}) = \| \xi_3(\mathrm{U}) \|$. On itère ensuite le procédé : si au voisinage de x on a $k_3(\mathrm{U}) \neq 0$, on définit

$$\mathrm{A}_3(\mathrm{U}) = \frac{\xi_3}{k_3(\mathrm{U})},$$

$\xi_4(\mathrm{U})$ par

$$\nabla_{\mathrm{U}}^\perp \mathrm{A}_3(\mathrm{U}) = \xi_4(\mathrm{U}) - k_3(\mathrm{U})\mathrm{A}_2(\mathrm{U}) \qquad \text{et} \qquad k_4(\mathrm{U}) = \| \xi_4(\mathrm{U}) \|, \qquad \text{etc.}$$

On a ainsi les « formules de Frenet » lorsque $k_1, \ldots, k_p$ sont définies :

$$\nabla_{\mathrm{U}}^\perp \mathrm{A}_1 = k_2(\mathrm{U})\mathrm{A}_2(\mathrm{U}); \qquad \nabla_{\mathrm{U}}^\perp \mathrm{A}_2(\mathrm{U}) = k_3(\mathrm{U})\mathrm{A}_3(\mathrm{U}) - k_2(\mathrm{U})\mathrm{A}_1; \qquad \ldots,$$
$$\nabla_{\mathrm{U}}^\perp \mathrm{A}_{p-1}(\mathrm{U}) = k_p(\mathrm{U})\mathrm{A}_p(\mathrm{U}) - k_{p-1}(\mathrm{U})\mathrm{A}_{p-2}(\mathrm{U}); \qquad \nabla_{\mathrm{U}}^\perp \mathrm{A}_p(\mathrm{U}) = -k_p(\mathrm{U})\mathrm{A}_{p-1}(\mathrm{U}),$$

$k_i(\mathrm{U})$ sera dite *i-ième courbure de Frenet de* M dans la direction définie par U.

DÉFINITION. — Un point $x \in \mathrm{M}$ est dit *s-régulier* s'il existe un voisinage $\mathscr{U}$ de x dans M et un champ de vecteurs unitaires U sur $\mathscr{U}$ tel que sur $\mathscr{U}$ on ait

$$k_1^{\mathrm{M})} \neq 0, \qquad k_2(\mathrm{U}) \neq 0, \qquad \ldots, \qquad k_s(\mathrm{U}) \neq 0.$$

Tout vecteur qui vérifie ces conditions est dit *s-régulier*.

On pose $k_i^{(\mathrm{M})} = \sup_{\mathrm{U} \in \mathrm{U}(\mathrm{M})} k_i(\mathrm{U})$, $k_i^{(\mathrm{M})}$ est dite *i-ième courbure de Frenet de* M ([1]). Si M est une courbe, $k_i^{(\mathrm{M})}$ coïncide avec la i-ième courbure de Frenet au sens classique.

2. Cas où M′ est a courbure constante et le rang de H est 1. — Supposons que, en tout point de M on ait rang (H) = 1. On pourra alors écrire :

$$H(X, Y) = h(X, Y)A_1,$$

avec h_x non identiquement nul, pour tout $x \in M$.

Proposition. — *Soit* M′ *à courbure constante et rang* (H) = 1. *Alors pour tout* $x \in M$ *s-régulier* ($2 \leqq s \leqq p$) *il existe un système de vecteurs orthonormés, normaux à* M $\{A_1, A_2, \ldots, A_s\}$ *(unique au signe près) définis au voisinage de x, et* $s-1$ *formes linéaires non nulles* $\tau_2, \ldots, \tau_s$, *fermées, proportionnelles entre elles, définies sur* M *au voisinage de x, telles que pour tout vecteur s-régulier* U, *on ait*

$$A_i(U) = A_i, \qquad |\tau_i(U)| = k_i(U), \qquad (i = 2, \ldots, s)$$

et, pour tout $X \in T_x(M)$, *on ait*

$$\nabla^{\perp}_{X} A_1 = \tau_2(X) A_2, \qquad \nabla^{\perp}_{X} A_2 = \tau_3(X) A_3 - \tau_2(X) A_1, \qquad \ldots,$$

$$\nabla^{\perp}_{X} A_{s-1} = \tau_s(X) A_s - \tau_{s-1}(X) A_{s-2} \quad (\text{si } s \leqq p-1), \qquad \ldots,$$

$$\nabla^{\perp}_{X} A_p = -\tau_p(X) A_{p-1} \quad (\text{si } s = p).$$

Démonstration :

Lemme. — *Soit* $h : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *une forme bilinéaire et* $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ *une application linéaire. Si* $L \neq 0$ *et* $h \neq 0$ *et si* $h(Y, Z) L(X) - h(X, Z) L(Y) = 0$ *pour tous* X, Y, $Z \in \mathbf{R}^n$, *alors* rang (h) = rang (L) = 1.

En effet si $X \in \operatorname{Ker} h$, on a $h(Y, Z) L(X) = 0$ pour tous Y, $Z \in \mathbf{R}^n$; puisque $h \neq 0$ on en déduit $X \in \operatorname{Ker} L$. Réciproquement, si $X \in \operatorname{Ker} L$, on a $h(X, Z) L(Y) = 0$ pour tous Y, $Z \in \mathbf{R}^n$; puisque $L \neq 0$, on en déduit $X \in \operatorname{Ker} h$. Donc : $\operatorname{Ker} h = \operatorname{Ker} L$.

Si $n = 2$ et rang (L) = 2, L est injective, et par conséquent $h(Y, Z) X - h(X, Z) Y = 0$ pour tous X, Y, $Z \in \mathbf{R}^n$. En prenant X arbitraire et $Y \perp X$, et en faisant le produit scalaire par Y, on obtient $h(X, Z) = 0$ pour tous X, $Z \in \mathbf{R}^n$, c'est-à-dire $h = 0$, ce qui est impossible. Donc rang (L) = rang (h) = 1.

Soit $n \geqq 3$; supposons que rang (h) $\geqq 2$ et soit F un supplémentaire de $\operatorname{Ker} h$ dans $\mathbf{R}^n$ (on a : dim F $\geqq 2$). Soient $X \in F$, $Z \in F$, tels que $X \perp Z$. On aura $h(Y, Z) L(X) = 0$ pour tout $Y \in \mathbf{R}^n$. Puisque $Z \notin \operatorname{Ker} h$ et Y est arbitraire on en déduit $L(X) = 0$ pour tout $X \in F$; donc $L = L|_{\operatorname{Ker} h} = L|_{\operatorname{Ker} L} = 0$ ce qui est impossible. D'où

$$\operatorname{rang}(h) = \operatorname{rang}(L) = 1.$$

Démonstration de la proposition. — Puisque M′ est à courbure constante, la partie normale du tenseur de courbure R′ (X, Y) Z est nulle pour tous X, Y, $Z \in TM$. Les équations de Codazzi-Ricci donnent alors :

$$(\nabla_X h)(Y, Z) A_1 - (\nabla_Y h)(X, Z) A_1 + h(Y, Z) \nabla^{\perp}_{X} A_1 - h(X, Z) \nabla^{\perp}_{Y} A_1 = 0.$$

En annulant la partie normale à A_1, on obtient :

$$(1) \quad h(Y, Z) L(X) - h(X, Z) L(Y) = 0 \quad \text{pour tous X, Y, } Z \in TM, \qquad \text{où } L(X) = \nabla^{\perp}_{X} A_1.$$

Or $h \neq 0$ [car rang (H) = 1] et $L \neq 0$ (car le point est s-régulier, avec $s \geqq 2$). On en déduit : rang (h) = rang (L) = 1. Soit A_2 un vecteur unitaire de Im (L) (défini localement, au voisinage d'un point s-régulier, et au signe près). On pose $\tau_2(X) A_2 = L(X)$. Pour tout U s-régulier, on aura

$$\tau_2(U) A_2 = k_2(U) A_2(U), \qquad \text{d'où} \quad |\tau_2(U)| = k_2(U).$$

D'autre part, en annulant la partie normale de $R'(X, Y) A_1$, on trouve

$$(2) \qquad (d\tau_2)(X, Y) A_2 + \tau_2(Y) \nabla_X^\perp A_2 - \tau_2(X) \nabla_Y^\perp A_2 - h(X, K(Y, A_1)) A_1 + h(Y, K(X, A_1)) A_1 = 0.$$

En projetant sur A_2 on obtient $d\tau_2 = 0$.

Supposons maintenant que le point est s-régulier, avec $s \geqq 3$. En projetant (2) sur $A_1^\perp$, on trouve

$$(3) \qquad \mathrm{pr}_{A_1^\perp}(\tau_2(Y) \nabla_X^\perp A_2 - \tau_2(X) \nabla_Y^\perp A_2) = 0.$$

Soit $M(X) = \mathrm{pr}_{A_1^\perp}(\nabla_X^\perp A_2)$. Si U est s-régulier, on a

$$A_2 = A_2(U) \qquad \text{d'où} \qquad M(U) = k_3(U) A_3(U);$$

donc $M \neq 0$, car $s \geqq 3$. L'équation (3) s'écrit alors :

$$(3') \qquad \tau_2(Y) M(X) - \tau_2(X) M(Y) = 0 \quad \text{pour tous } X, Y \in TM.$$

Puisque τ_2 et M ne sont pas identiquement nuls, on déduit facilement :

$$\mathrm{Ker}\, \tau_2 = \mathrm{Ker}\, M.$$

D'où rang (M) = 1. Il existe donc (localement et défini au signe près) un vecteur unitaire A_3 et une forme linéaire τ_3 tels que $M(X) = \tau_3(X) A_3$. Si U est s-régulier ($s \geqq 3$), on aura : $k_3(U) = |\tau_3(U)|$. D'autre part, d'après (3'), on a

$$\tau_2(Y)\,{}_3(X)\tau - \tau_2(X) \tau_3(Y) = 0,$$

c'est-à-dire $\tau_2 \wedge \tau_3 = 0$. Enfin, puisque $g'(A_1, \nabla_X^\perp A_2) = -g'(\nabla_X^\perp A_1, A_2) = -\tau_2(X)$, on a $\nabla_X^\perp A_2 = \tau_3(X) A_3 - \tau_2(X) A_1$.

On procède ainsi de la sorte, en annulant la partie normale de $R'(X, Y) A_i$ et en projetant successivement sur A_{i+1} et A_i.

C. Q. F. D.

THÉORÈME. — *Soit* M' *une variété à courbure constante, de dimension* $n+p$ *et* M *une sous-variété isométrique de* M', *de dimension* $n \geqq 2$, *complète, connexe, simplement connexe, telle que* rang (H) = 1. *Si*

1° $k_2^{(M)} \neq 0$ *en tout point de* M (*c'est-à-dire, tout point de* M *est bi-régulier*);

2° *Il existe* $i \in [1, \ldots, p]$ *tel que* $k_i^{(M)} = \text{Cte} \neq 0$,

alors $M = C \times M_1$, *où* M_1 *est une sous-variété totalement géodésique de* M' *de dimension* $n-1$ *et* C *une géodésique de* M, *telle que*

$$k_j^{(M)} = k_j^{(C)} \quad \text{pour tout } j = 1, \ldots, p,$$

où $k_j^{(C)}$ *sont les courbures de Frenet classiques de* C *dans* M'.

Démonstration. — Puisque tout point de M est bi-régulier et M est connexe et simplement connexe, la forme τ_2 définie par la direction Im $(\nabla^{\perp} A_1)$ est définie globalement (au signe près) sur M. Soit T_2 le vecteur (non nul, car $k_2^{(M)} \neq 0$) associé à τ_2 par la dualité définie par g et $T = T_2/\| T_2 \|$. L'équation (1) s'écrit alors : $h(Y, Z) \langle T, X \rangle = h(X, Z) \langle T, Y \rangle$ (où : $\langle \, , \rangle = g(\, ,)$) d'où l'on déduit : $h(X, Y) = \beta \langle X, T \rangle \langle Y, T \rangle$ (où $\beta = h(T, T)$).

LEMME 1. — $| \tau_i (T) | = k_i^{(M)}$ *si* $i \geqq 2$.

En effet (*cf.* prop.) τ_i est proportionnelle à τ_2. Donc $\tau_i(X) = 0$ si et seulement si $X \underset{g}{\perp} T$. D'où : $k_i^{(M)} = \sup\limits_{U \in U(M)} k_i(U) = \sup\limits_{U \in U(M)} | \tau_i(U) | = | \tau_i(T) |$.

LEMME 2. — *Soit* ω *la forme associée à* T *par la dualité définie par* g. *On a* $d(\beta\omega) = 0$.

En effet, puisque M′ est à courbure constante, la partie normale de $R'(X, Y) T$ est nulle pour tous X, $Y \in TM$. En projectant sur A_1 l'équation de Gauss-Codazzi, on obtient facilement $d(\beta\omega) = 0$.

LEMME 3. — *S'il existe* $i \in [1, \ldots, p]$ *tel que* $k_i^{(M)} = \text{Cte} \neq 0$, *alors* $X.\beta = 0$ *pour tout* $X \underset{g}{\perp} T$.

En effet, pour $i = 1$ c'est évident puisque $k_1^{(M)} = | \beta |$. Supposons $i \geqq 2$. Puisque $\omega = \tau_i/\| \tau_i \|$, d'après le lemme 2, on aura $d(\beta(\tau_i/\| \tau_i \|)) = 0$. Or

$$\| \tau_i \| = | \tau_i(T) | = k_i^{(M)} = \text{Cte};$$

on en déduit $d(\beta \tau_i) = 0$. Puisque $d\tau_i = 0$, on obtient $d\beta \wedge \tau_i = 0$, d'où $X.\beta = 0$ pour tout $X \in \operatorname{Ker} \tau_i$ c'est-à-dire, pour tout $X \underset{g}{\perp} T$.

LEMME 4. — *S'il existe* $i \in [1, \ldots, p]$, *tel que* $k_i^{(M)} = \text{Cte} \neq 0$, *alors le champ* T *est parallèle.*

En effet, puisque $R'(X, T) A_1 = 0$, en écrivant l'équation de Codazzi-Ricci avec $X \underset{g}{\perp} T$ on trouve

$$\nabla_X T = \langle X, \nabla_T T \rangle T, \qquad \text{d'où} \quad \nabla_X T = 0 \quad \text{et} \quad \nabla_T T = 0.$$

Par conséquent les distributions Δ_1 et Δ_2 définies par T et $T^{\perp}$ sont parallèles et différentiables et donc M est le produit $C \times M_1$, où C et M_1 sont les sous-variétés intégrales maximales de Δ_1 et Δ_2 passant par un certain point de M. D'autre part on a $h(X, Y) = 0$ si X, $Y \in \Delta_2$; donc M_1 est totalement géodésique dans M′.

Enfin, en évaluant les courbures de Frenet de C dans M′, on trouve

$$\nabla'_T T = h(T, T) A_1 = \beta A_1, \qquad \text{d'où} \quad k_1^{(C)} = | \beta | = k_1^{(M)},$$

$$\nabla'_T A_1 = \nabla_T^{\perp} A_1 - K(T, A_1) = \tau_2(T) A_2 - \beta T, \qquad \text{d'où} \quad k_2^{(C)} = | \tau_2(T) | = k_2^{(M)}, \qquad \text{etc.}$$

(*) Séance du 17 mai 1976.

([1]) Pour ce qui est de $k_2^{(M)}$, *cf* : T. OTSUKI, *Kodai Math. Sem. Rep.*, 20, 1968, p. 282-295.

Laboratoire d'Analyse et Géométrie,
U.E.R. de Mathématiques,
118, *route de Narbonne,*
31077 *Toulouse Cedex.*