

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Énergie, tension, et ordre des applications à valeurs dans un espace euclidien.* Note de **Bang-Yen Chen, Jean-Marie Morvan et Thérèse Nore**, présentée par André Lichnerowicz.

En utilisant la notion d'ordre (introduite par le premier auteur), nous étudions les applications C^∞ d'une variété riemannienne compacte dans l'espace euclidien E^m . On donne en particulier une estimation de l'énergie et de la tension des applications, au moyen de leur ordre. Nous en déduisons des corollaires concernant les courbes et les applications harmoniques à valeurs dans une hypersphère.

DIFFERENTIAL GEOMETRY. — Energy, tension, and spectral geometry of maps into E^m .

Using the notion of order (introduced by the first author), we study smooth maps of a compact Riemannian manifolds in Euclidean space E^m . In particular, we give an estimate of the energy and the tension of a map, using the order. We give some applications concerning curves and harmonic maps taking their values in a hypersphere.

1. INTRODUCTION. — Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n . Notons Δ le laplacien de (M, g) , agissant sur l'espace des applications $C^\infty(M)$. Δ est un opérateur différentiel elliptique auto-adjoint, dont les valeurs propres définissent une suite infinie :

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k < \dots \quad \text{avec} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = +\infty.$$

Soit $V_k = \{f \in C^\infty(M) \mid \Delta f = \lambda_k f\}$ l'espace propre de Δ correspondant à la valeur propre λ_k (V_k est de dimension finie). Sur $C^\infty(M)$, définissons le produit scalaire :

$$(1.1) \quad (f_1, f_2) = \int_M f_1 f_2 dV.$$

$\sum_{k=0}^{\infty} V_k$ est dense dans $C^\infty(M)$. Si $f \in C^\infty(M)$, on note f_t la projection de f sur V_t . On a alors la décomposition spectrale (au sens L^2) :

$$(1.2) \quad f = \sum_{t=0}^{\infty} f_t.$$

Comme V_0 est de dimension 1, il existe, pour toute fonction non constante $f \in C^\infty(M)$, un entier $p \geq 1$, tel que $f_p \neq 0$, et :

$$(1.3) \quad f = f_0 + \sum_{t \geq p} f_t.$$

Notons q le plus grand entier t , s'il existe, tel que $f_t \neq 0$. S'il n'existe pas, posons $q = +\infty$. On a alors :

$$(1.4) \quad f = f_0 + \sum_{t=p}^q f_t.$$

Soit $x : (M, g) \rightarrow \mathbb{E}^m$ une application C^∞ non constante.

Posons $x = (x_1, \dots, x_m) = (x_A)_{1 \leq A \leq m}$, où x_A est la A -ième fonction coordonnée. On a, pour chaque A tel que $x_A \neq (x_A)_0$,

$$(1.5) \quad x_A = (x_A)_0 + \sum_{t=p_A}^{q_A} (x_A)_t.$$

Posons $p = p(x) = \inf \{q_A\}$ et $q = q(x) = \sup \{q_A\}$, où A parcourt tous les indices tels que $x_A \neq x_{A_0}$. p et q sont indépendants du choix des coordonnées euclidiennes sur $\mathbb{E}^m$. On appelle $[p, q]$ l'ordre de x (cf. [1]). On peut aussi écrire (1.5) sous forme vectorielle :

$$(1.6) \quad x = x_0 + \sum_{t=p}^q x_t; \quad \Delta x_t = \lambda_t x_t,$$

où x_0 est un vecteur constant de $\mathbb{E}^m$, appelé centre de gravité de x dans $\mathbb{E}^m$.

Si q est fini, x est dit « de type fini », sinon, x est « de type infini » [cf. (1)]. L'application est dite de type k s'il y a exactement $k x_t$ non nuls dans la décomposition (1.6). (On pourra consulter [1] pour des résultats généraux sur les sous-variétés de type fini.) Dans cette Note, nous utilisons la notion d'ordre pour étudier les applications à valeurs dans $\mathbb{E}^m$. Nous obtenons les meilleures estimations possibles sur l'énergie et la tension de telles applications. Dans tout ce qui suit, M désigne une variété compacte connexe. Les applications sont supposées C^∞ .

2. TENSION TOTALE ET ORDRE. — Soit $\varphi : (M, g) \rightarrow (N, g')$ une application C^∞ entre variétés riemanniennes.

Soient dV l'élément de volume de (M, g) , et $d\varphi$ la différentielle de φ .

La densité d'énergie $e(\varphi)$ de φ est la fonction à valeurs réelles positives définies par :

$$(2.1) \quad e(\varphi)_m = \frac{1}{2} |d\varphi_m|^2 = \frac{1}{2} \text{Trace} (\varphi^* g')_m, \quad \forall m \in M,$$

L'énergie $E(\varphi)$ de φ est définie par :

$$(2.2) \quad E(\varphi) = \int_M e(\varphi) dV \quad (\text{cf. [2], [3], [4]}).$$

L'opérateur d'Euler-Lagrange associé à E , noté $\tau = \tau(\varphi)$ est appelé *champ de tension* de φ . On a :

$$(2.3) \quad \tau = \text{div}(d\varphi).$$

L'application φ est harmonique si $\tau(\varphi) \equiv 0$.

Dans le cas d'une application à valeurs dans l'espace euclidien $x : (M, g) \rightarrow \mathbb{E}^m$, on a :

$$(2.4) \quad \Delta x = -\tau(x).$$

Supposons que N soit isométriquement immergée dans une variété riemannienne P . Soit $\Phi : M \rightarrow P$ la composée de φ et de l'immersion.

Notons σ la seconde forme fondamentale de N dans P . On a :

$$(2.5) \quad \tau(\Phi) = \tau(\varphi) + \text{Trace} \sigma(d\varphi, d\varphi).$$

En particulier, si P est l'espace euclidien $\mathbb{E}^m$, et N l'hypersphère $S_0^{m-1}(1)$ de rayon 1, centrée à l'origine, on a :

$$(2.6) \quad \tau = \tau' - e(x)x,$$

où τ est le champ de tension de $x : M \rightarrow S_0^{m-1}(1) \subset \mathbb{E}^m$, et τ' est celui de $x' : M \rightarrow S_0^{m-1}(1)$, induit par x .

THÉORÈME 1. — Soit $x : (M, g) \mapsto \mathbb{E}^m$ une application non constante. On a :

$$2\lambda_p E(x) \leq \int_M |\tau(x)|^2 dV \leq 2\lambda_q E(x),$$

où $[p, q]$ est l'ordre de x . L'égalité (à droite ou à gauche) a lieu si et seulement si x est de type 1.

La preuve de ce théorème se déduit de la décomposition spectrale (1.5) et de la théorie de Hodge. Il donne la meilleure estimation possible de la tension totale. Il généralise des résultats de [1]. Il implique en particulier les corollaires suivants :

COROLLAIRE 1. — Soit $x : (M, g) \mapsto \mathbb{E}^m$ une application non constante, on a :

$$\int_M |\tau(x)|^2 dV \geq 2\lambda_1 E(x).$$

L'égalité a lieu si et seulement si x est l'ordre [1, 1].

Si x est une immersion isométrique, ce corollaire est dû à R. C. Reilly [5]. Si $x : C \mapsto \mathbb{E}^m$ est une courbe fermée paramétrée par la longueur de l'arc s , on en déduit le :

COROLLAIRE 2. — Soit $x : C \rightarrow \mathbb{E}^m$ une courbe fermée. On a :

$$\int_C |x''|^2 ds \geq \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \int_C |x'|^2 ds,$$

où L est la longueur de C et $x^{(k)} = d^k x / ds^k$. L'égalité a lieu si et seulement si x est de la forme :

$$x = c_0 + c_1 \cos\left(\frac{2\pi s}{L}\right) + c_2 \sin\left(\frac{2\pi s}{L}\right), \quad \text{avec } c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{E}^m.$$

Remarque. — Par itération, on déduit du corollaire 2 :

$$\int_C |x^{(k)}|^2 ds \geq \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{2k-2h} \int_C |x^{(h)}|^2 ds,$$

$\forall h, k$ tels que $k > h$, l'égalité ayant lieu dans les mêmes cas que ceux du corollaire 2.

3. ÉNERGIE ET ORDRE. — Soit $x : (M, g) \rightarrow \mathbb{E}^m$ une application. On a :

$$(3.1) \quad \Delta \langle x, x \rangle = 2(\langle x, \Delta x \rangle - \langle dx, dx \rangle).$$

Soit c un point de $\mathbb{E}^m$. On définit le moment de x relativement à c par :

$$(3.2) \quad \mathcal{M}_c = \mathcal{M}_c(x) = \int_M \langle x - c, x - c \rangle dV.$$

En utilisant (1.5), (3.1), (3.2) et la théorie de Hodge, on obtient le résultat suivant :

THÉORÈME 2. — Soit $x : (M, g) \rightarrow \mathbb{E}^m$ une application non constante d'ordre $[p, q]$.

On a $\lambda_p \mathcal{M}_{x_0} \leq 2E(x) \leq \lambda_q \mathcal{M}_{x_0}$, où x_0 est le centre de gravité de x . L'égalité (à droite ou à gauche) a lieu si et seulement si x est de type 1.

Une application $x : (M, g) \rightarrow S^{m-1}(1) \subset \mathbb{E}^m$ est dite *masse symétrique* si le centre de gravité x_0 est le centre de $S^{m-1}(1)$ dans $\mathbb{E}^m$. Dans ce cas, le théorème 2 donne la meilleure estimation possible de l'énergie $E(x)$.

COROLLAIRE 3. — Soit $x : (M, g) \rightarrow S_0^{m-1}(1) \subset \mathbb{E}^m$ une application non constante « masse symétrique ». On a $E(x) \geq (\lambda_1/2) \text{vol}(M)$.

L'égalité a lieu si et seulement si x est d'ordre [1, 1].

Dans le cas d'une courbe fermée, le théorème 2 implique le résultat suivant :

COROLLAIRE 4. — Soit $x : C \rightarrow \mathbb{E}^m$ une immersion isométrique d'une courbe C de longueur L dans $\mathbb{E}^m$. On a $\mathcal{M}_{x_0} \leq L^3/4\pi^2$.

L'égalité a lieu si et seulement si C est un cercle de rayon $L/2\pi$ dans un plan.

4. APPLICATIONS HARMONIQUES DANS UNE SPHÈRE. — Une immersion isométrique de type 1, d'une variété compacte dans $\mathbb{E}^m$ est, d'après un résultat de Takahashi [6], une

immersion isométrique à valeur dans une hypersphère S^{m-1} de $\mathbb{E}^m$. Une telle immersion est toujours « masse symétrique », et harmonique dans S^{m-1} .

D'autre part, une application de type 1 de (M, g) dans $\mathbb{E}^m$ n'est pas sphérique, en général. Il est donc naturel de chercher des conditions pour qu'une application de type 1 soit sphérique, et dans ce cas, masse symétrique ou harmonique. On a la :

PROPOSITION 1. — Soit $x : (M, g) \mapsto S_0^{m-1}(1) \hookrightarrow \mathbb{E}^m$ une application sphérique. Alors x est masse symétrique et de type 1 si et seulement si l'application induite $\bar{x} : (M, g) \rightarrow S_0^{m-1}(1)$ est harmonique et à densité d'énergie constante positive.

Remarquons à présent que si l'application $x : (M, g) \mapsto \mathbb{E}^m$ a une densité d'énergie $e(x)$, l'application $\tilde{x} : (M, eg) \xrightarrow{i} (M, g) \xrightarrow{x} \mathbb{E}^m$, a une densité d'énergie constante. (i désigne le changement conforme de métrique.) De plus la composée d'une application conforme entre surfaces et d'une application harmonique est encore harmonique. On déduit de ceci et de la proposition 1 le résultat suivant :

THÉORÈME 4. — Soit $\bar{x} : (M, g) \rightarrow S_0^{m-1}(1)$ une application non constante d'une surface M dans $S_0^{m-1}(1)$. Si $\bar{x}$ a une densité d'énergie positive, e , alors $\bar{x}$ est harmonique si et seulement si l'application composée $(M, eg) \xrightarrow{i} (M, g) \xrightarrow{\bar{x}} S_0^{m-1}(1) \hookrightarrow \mathbb{E}^m$ est « masse symétrique » et de type 1.

On déduit également de la proposition 1, le corollaire suivant :

COROLLAIRE 5. — Soit (M, g) une variété riemannienne compacte. (M, g) admet une application harmonique non constante dans une $(m-1)$ -sphère, à densité d'énergie constante positive, si et seulement si il existe un espace propre V_p , $p > 1$, de Δ sur (M, g) qui contienne k -fonction $f_1, \dots, f_k \in V_p$, telles que $f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_k^2 = 1$ ($k \leq m$).

Un tenseur T symétrique de type $(0, 2)$ sur une variété riemannienne (M, g) est appelé un tenseur harmonique (relativement à g) si :

$$d(\text{Trace } T) = -2 \delta T,$$

où δ est la codifférentielle sur (M, g) [7]. Le résultat suivant peut être considéré comme une généralisation du théorème de Takahashi sur les sous-variétés minimales de sphères.

THÉORÈME 5. — Soit $x : (M, g) \mapsto \mathbb{E}^m$ une application non constante. x est une application à valeurs dans une hypersphère S^{m-1} de $\mathbb{E}^m$, harmonique, à densité d'énergie constante, si et seulement si x est de type 1 et $x^*(g_0)$ est un tenseur harmonique sur (M, g) , où g_0 est la métrique euclidienne de $\mathbb{E}^m$.

Remise le 22 avril 1985.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] B. Y. CHEN, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 7, 1979, p. 301-311; *Ibid*, II, 1983, p. 309-328; Total mean curvature and submanifolds of finite type, *World Scientific*, 1984.
- [2] J. FELS et L. LEMAIER, *Bull London Math. Soc.*, 10, 1978, p. 1-68.
- [3] J. FELS et J. H. SAMPSON, *Amer. J. Math.*, 86, 1964, p. 109-160.
- [4] M. BERGER, P. GAUDUCHON et E. MAZET, *Le spectre d'une variété Riemannienne*, *Lecture Notes in Math.*, n° 194, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [5] R. C. REILLY, *Com. Math. Helv.*, 52, 1977, p. 525-533.
- [6] T. TAKAHASHI, *J. Math. Soc. Japan*, 18, 1966, p. 380-385.
- [7] B. Y. CHEN et T. NAGANO, *J. Math. Soc. Japan*, 36, 1984, p. 295-313.

B. Y. C. : Department of Mathematics,
Michigan State University, East Lansing, 48824 Michigan U.S.A.;
J.-M. M. : Faculté des Sciences, 33, rue Louis-Pasteur, 84000 Avignon;
T. N. : Faculté des Sciences, 123, rue A.-Thomas, 87100 Limoges.