

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Classe de Maslov d'une immersion lagrangienne et minimalité.* Note (*) de **Jean-Marie Morvan**, présentée par André Lichnerowicz.

Nous montrons que la classe de Maslov m d'une sous-variété lagrangienne M^n de l'espace euclidien $\mathbb{E}^{2n}$, muni de sa structure symplectique canonique Ω , est reliée au vecteur de courbure moyenne H par la relation :

$$m = \frac{1}{\Pi} [i(H)\Omega]_{|M^n}$$

où i désigne ici le produit intérieur.

En particulier, si la sous-variété est minimale, m est nulle.

We prove that the Maslov class m of a Lagrangian submanifold M^n of the euclidian space $\mathbb{E}^{2n}$, endowed with the canonical symplectic structure Ω , is related to the mean curvature vector field H . More precisely, we have:

$$m = \frac{1}{\Pi} [i(H)\Omega]_{|M^n},$$

(i denotes the interior product).

Particularly, if the submanifold is minimal, m is null.

0. INTRODUCTION. — L'un des moyens essentiels de l'étude des équations aux dérivées partielles est la classe de Maslov, invariant cohomologique attaché aux sous-variétés lagrangiennes d'un espace vectoriel muni d'une structure symplectique. Nous donnons ici une interprétation riemannienne de cette classe. Dans toute la suite, $\mathbb{E}^{2n}$ désigne l'espace euclidien de dimension $2n$, muni de son produit scalaire habituel $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$, et de la 2-forme symplectique canonique :

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^{n+1} + \dots + \omega^n \wedge \omega^{2n}$$

(si $\omega^1 \dots \omega^{2n}$ est une base orthonormée de $T^*\mathbb{E}^{2n}$). Une immersion f d'une variété M^n dans $\mathbb{E}^{2n}$ est dite *lagrangienne* si $f^*(\Omega) = 0$ en tout point de M^n , [1]. On peut munir M^n de la métrique $f^*(g)$; f est ainsi une immersion isométrique, et l'on peut identifier M et $f(M)$, g et $f^*(g)$. La seconde forme fondamentale associée à l'immersion f est notée $\sigma : TM^n \times TM^n \rightarrow T^\perp M^n$ [où TM^n (resp. $T^\perp M^n$) désigne l'espace tangent (resp. l'espace normal pour g) à M^n].

Il est bien connu que σ est un tenseur symétrique défini par :

$$\sigma(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, \quad \forall X, Y \in TM,$$

où $\tilde{\nabla}$ est la connexion triviale sur $\mathbb{E}^{2n}$ et ∇ la connexion de Levi-Civita associée à la métrique sur M^n . On note H la trace de σ . H est un champ de vecteur normal appelé « champ de vecteur de courbure moyenne ». Si H est identiquement nul, f est dite *minimale*.

1. LA CLASSE DE MASLOV. — (i) *L'espace* $L(\mathbb{E}^{2n})$ [2]. — Désignons par $L(\mathbb{E}^{2n})$ l'espace des n -plans lagrangiens de $(\mathbb{E}^{2n}, \Omega)$. Il est bien connu que $L(\mathbb{E}^{2n})$ peut être muni d'une structure d'espace homogène isomorphe à $U(n)/O(n)$, où $U(n)$ désigne le groupe des matrices unitaires et $O(n)$ celui des matrices orthogonales. Son espace tangent en un point est donc isomorphe à $\mathcal{U}(n)/\theta(n)$, où $\mathcal{U}(n)$ désigne l'espace des matrices antihermitiennes et $\theta(n)$ l'espace des matrices antisymétriques.

Remarquons enfin que l'application $(\det)^2$ détermine une fibration canonique de $U(n)/O(n)$ sur S^1 . Les fibres sont isomorphes à $SU(n)/SO(n)$ et, par suite, $H^1(L(\mathbb{E}^{2n}), \mathbb{Z})$, le premier groupe de cohomologie de $L(\mathbb{E}^{2n})$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$, est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

(ii) *La classe de Maslov d'une immersion lagrangienne* [2]. — Si $f: M^n \rightarrow \mathbb{E}^{2n}$ est une immersion lagrangienne, désignons par G_f l'application de Gauss :

$$G_f: M^n \rightarrow L(\mathbb{E}^{2n})$$

associée à f . (L'image d'un point m de M^n par G_f est son espace tangent ramené à l'origine.)

Si $\alpha = (1/2 i \pi)(dz/z)$ désigne la forme volume de S^1 , notons β la 1-forme fermée sur $L(\mathbb{E}^{2n})$ définie par $\beta = (\det^2)^*(\alpha)$. La classe de Maslov m est définie comme étant la classe de cohomologie représentée par $G_f^*(\beta)$. Ainsi :

$$m = [G_f^*(\det^2)^*(\alpha)] \in H^1(M^n, \mathbb{Z}).$$

Pour une étude détaillée de la classe de Maslov, on pourra consulter [3].

(iii) *Exemples.* — Le cercle S^1 dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ est une sous-variété lagrangienne dont la classe de Maslov est $2[\alpha] = [(1/i\pi)(dz/z)]$.

K. Yano, M. Kon ont montré que, si M^n est une sous-variété complète lagrangienne de $(\mathbb{E}^{2n}, g, \Omega)$ telle que le vecteur de courbure moyenne soit parallèle et tel que le fibré normal soit plat, alors M^n est, soit un n -plan, dont la classe de Maslov est évidemment nulle, soit un produit de n cercles $S^1(r_1) \times \dots \times S^1(r_n)$, soit un produit de p cercles et d'un $n-p$ -plan $S^1(r_1) \times \dots \times S^1(r_p) \times \mathbb{E}^{n-p}$ [1]. Dans le deuxième (resp. troisième) cas, le théorème que nous montrons permet de construire un représentant de la classe de Maslov : si $\xi_1, \dots, \xi_n$ (resp. $\xi_1, \dots, \xi_p$) sont les vecteurs normaux unitaires à $S^1(r_1), \dots, S^1(r_n)$ [resp. $S^1(r_1), \dots, S^1(r_p)$], la forme duale du champ de vecteurs $(1/\pi)(r_1 \xi_1 + \dots + r_n \xi_n)$ [resp. $(1/\pi)(r_1 \xi_1 + \dots + r_p \xi_p)$] dans la dualité définie par Ω est un représentant de la classe de Maslov de $S^1(r_1) \times \dots \times S^1(r_n)$ [resp. $S^1(r_1) \times \dots \times S^1(r_p) \times \mathbb{E}^{n-p}$].

2. LE THÉORÈME. — Nous nous proposons de montrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — Soit $f: (M^n, g) \rightarrow (\mathbb{E}^{2n}, g, \Omega)$ une immersion isométrique lagrangienne d'une variété M^n dans l'espace euclidien $\mathbb{E}^{2n}$, muni de sa structure symplectique canonique. Alors la classe de Maslov m de l'immersion f est représentée par la 1-forme fermée $1/\pi i(H)\Omega$, où H désigne le champ de vecteur de courbure moyenne de l'immersion et i le produit intérieur.

Nous en déduisons immédiatement les corollaires suivants :

COROLLAIRE 1. — La classe de Maslov d'une immersion lagrangienne minimale dans l'espace euclidien est nulle.

COROLLAIRE 2. — Si (M^n, g) est une sous-variété lagrangienne de $(\mathbb{E}^{2n}, \Omega)$ de vecteur de courbure moyenne H , alors $1/\pi \int_{\gamma} i(H)\Omega$ est entier pour tout lacet γ de M^n .

3. ESQUISSE DE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. — Introduisons d'abord la structure complexe canonique J sur $(\mathbb{E}^{2n}, g, \Omega)$ (ce qui revient à identifier $\mathbb{E}^{2n}$ avec $\mathbb{C}^n$ en posant $J\tilde{X} = i\tilde{X}$, $\forall \tilde{X} \in T\mathbb{E}^{2n}$).

Nous avons :

$$g(\tilde{X}, J\tilde{Y}) = \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}), \quad \forall \tilde{X}, \tilde{Y} \in T\mathbb{E}^{2n}.$$

Nous allons utiliser les lemmes suivants (comparer avec [4]) :

LEMME 1. — L'espace tangent $T_P(L(\mathbb{E}^{2n}))$ au-dessus d'un n -plan P s'identifie à l'espace des endomorphismes L de P dans $P^\perp$, tels que :

$$\langle L(X), J(Y) \rangle = \langle L(Y), J(X) \rangle, \quad \forall X, Y \in P.$$

Démonstration du lemme 1. — $T_P(L(\mathbb{E}^{2n}))$ s'identifie, nous l'avons vu à $\mathcal{U}(n)/\theta(n)$. Soit $e_1, \dots, e_n$ une base orthonormée réelle de P , et $\theta^1, \dots, \theta^n$ sa base duale. Une base complexe de $\mathcal{U}(n)/\theta(n)$ est constituée par l'ensemble $\{\theta^k \otimes e_k, i\theta^l \otimes e_m - i\theta^m \otimes e_l\}$. L'application φ définie par :

$$\begin{aligned}\varphi(\theta^k \otimes e_k) &= \theta^k \otimes J e_k, \\ \varphi(i\theta^l \otimes e_m - i\theta^m \otimes e_l) &= \theta^l \otimes J e_k - \theta^m \otimes J e_l.\end{aligned}$$

permet de construire, par linéarité, un homomorphisme injectif de $T_P(L(\mathbb{E}^{2n}))$ dans $\text{End}(P, P^\perp)$.

Remarquons à présent que J peut être lui-même considéré comme un vecteur tangent invariant de $(L(\mathbb{E}^{2n}))$. Notons $\tilde{J}$ la 1-forme sur $L(\mathbb{E}^{2n})$ associé à J dans la dualité définie par la métrique. Nous avons le :

LEMME 2. — $\tilde{J} \in T^*(L(\mathbb{E}^{2n}))$ est fermée. Avec les notations de 1, nous avons :

$$[(\det^2)^*(\alpha)] = \frac{1}{\Pi} [\tilde{J}].$$

Démonstration du lemme 2. — Au-dessus d'un n -plan P de $L(\mathbb{E}^{2n})$, l'espace tangent $T_P L(\mathbb{E}^{2n})$ s'identifie à la somme directe orthogonale $\mathcal{A} \oplus \mathbb{R}J$, où $\mathcal{A}$ désigne l'espace des matrices antihermitiennes de trace nulle [noyau de $d(\det^2)$], et J est la matrice identité dans une base $(e_1, \dots, e_n)$ de P et $(J e_1, \dots, J e_n)$ de $P^\perp$. D'autre part, l'application tangente à $\det^2$ est donnée par $d(\det^2)(Z) = 2 \text{Trace}(Z)$, $\forall Z \in \mathcal{U}(n)/\theta(n)$.

Donc, si :

$$X \in \mathcal{A}, \quad (\det^2)^*(\alpha)(X) = 2 \alpha(\text{Trace}(X)) = 0 = \langle J, X \rangle = \tilde{J}(X),$$

si :

$$X = J, \quad (\det^2)^*(\alpha)(J) = 2 \alpha(\text{Trace}(J)) = \frac{1}{\Pi} = \frac{1}{\Pi} \langle \tilde{J}, J \rangle = \frac{1}{\Pi} \tilde{J}(J).$$

Par suite $(\det^2)^*(\alpha) = 1/\Pi \tilde{J}$ et $\tilde{J}$ est fermée comme image réciproque d'une forme fermée.

Soit maintenant $f: (M^n, g) \mapsto (\mathbb{E}^{2n}, g, \Omega)$ une immersion isométrique lagrangienne. Avec les notations de 1, on peut montrer les deux lemmes suivants :

LEMME 3. — Le fibré $G_f^{-1}(T(L(\mathbb{E}^{2n})))$ est isométrique au sous-espace du produit tensoriel $T^*M^n \otimes T^\perp M^n$, constitué par les tenseurs vérifiant :

$$\langle L(X), J(Y) \rangle = \langle L(Y), J(X) \rangle, \quad \forall X, Y \in TM^n.$$

Considérons à présent le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} T M^n & \xrightarrow{(d G_f)} & \overline{T^* M^n \otimes T^\perp M^n} & \hookrightarrow & T(L(\mathbb{E}^{2n})) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ M^n & \xrightarrow{G_f} & G_f(M^n) & \hookrightarrow & L(\mathbb{E}^{2n}) \end{array}$$

où $\overline{T^* M^n \otimes T^\perp M^n}$ est le sous-espace défini par le lemme 3.

LEMME 4. — L'application $(d G_f)_m$ tangente à G_f , s'identifie à la seconde forme fondamentale de f en m , σ_m , considérée comme application à valeur dans $T_m^* M^n \otimes T_m^\perp M^n$.

Notons également $\tilde{J}$ la restriction de l'élément $\tilde{J}$ de $T^*(L(\mathbb{E}^{2n}))$ à $T^*(G_f(M^n))$. Nous avons le :

LEMME 5. — $(G_f)^*(\tilde{J}) = (i(H)\Omega)|_{TM}$ où i désigne ici le produit intérieur.

Démonstration du lemme 5. — Soit $X \in TM^n$. D'après le lemme 4 :

$$(G_f)^*(\tilde{J})(X) = J(\sigma_X)$$

[où $\sigma_X(Y) = \sigma(X, Y)$, $\forall Y \in TM^n$].

Soit $(e_1, \dots, e_n, J e_1, \dots, J e_n)$ une base locale orthonormée telle que $e_1, \dots, e_n \in TM^n$, $J e_1, \dots, J e_n \in T^\perp M^n$, et soit $\theta^1, \dots, \theta^n, J\theta^1, \dots, -J\theta^n$ la base duale. Nous avons, localement :

$$\tilde{J} = e_i \otimes (-J\theta^i), \quad \sigma_X = \sigma_X^k \theta^i \otimes J e_k.$$

Par suite :

$$\tilde{J}(\sigma_X) = \sum_i \sigma_X^i(X) = \sum_i \langle \sigma(X, e_i), J e_i \rangle = \sum_i \langle \sigma(e_i, e_i), JX \rangle = \Omega(H, X).$$

Donc $(G_f)^*(\tilde{J}) = i(H)\Omega|_{M^n}$.

Le théorème est une conséquence immédiate des lemmes 2 et 4.

Les professeurs P. Dazord, J. Grifone et C. M. Marle nous ont donné de fructueux conseils.

(*) Remise le 26 janvier 1981.

[1] De telles sous-variétés sont aussi appelées « anti-invariantes » ou « totalement réelles », lorsqu'on étudie les sous-variétés d'une variété kächlerienne [cf. K. YANO et M. KON, *Anti-invariant Submanifolds (Lecture Notes*, n° 21)].

[2] V. GUILLEMIN et S. STERNBERG, *Geometric Asymptotics Mathematical Surveys*, n° 14, Amer. Math. Soc.

[3] P. DAZORD, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 29, n° 2, 1979, p. 25-78.

[4] E. A. RUH et J. VILMS, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 149, 1970.

U.E.R. des Sciences de Limoges,

Département de Mathématiques, 123, rue Albert-Thomas, 87060 Limoges Cedex.

et Laboratoire d'Analyse globale et Physique mathématique, U.E.R. de Mathématiques,
Université Paul-Sabatier, 118, route de Narbonne, 31400 Toulouse.