

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Classes de Maslov d'ordres supérieurs*. Note de Jean-Marie Morvan et Louis Niglio, présentée par André Lichnerowicz.

On définit explicitement sur un fibré symplectique trivial muni de deux champs de plans lagrangiens, des classes de cohomologie réelles qui sont des obstructions à leur transversalité. On étudie ensuite le cas des sous-variétés lagrangiennes de $\mathbb{C}^n$.

DIFFERENTIAL GEOMETRY. — Maslov Classes of Higher Orders.

We define explicitly, on a trivial symplectic bundle endowed with two Lagrangian subbundles, real cohomology classes, which are an obstruction to their transversality. Then we study the case of Lagrangian submanifolds of $\mathbb{C}^n$.

INTRODUCTION. — La classe de Maslov, classe de cohomologie de degré 1, est la première obstruction à la transversalité de deux champs de plans lagrangiens définis sur un fibré vectoriel symplectique. Dans [1] et [2], le premier auteur a donné une expression riemannienne d'un représentant de cette classe, puis montré que l'on peut construire une classe de degré 5 possédant des propriétés analogues. L'objet de cette Note est de faire apparaître toutes les « classes d'ordres supérieurs » obtenues par un tel procédé, et d'en exhiber un représentant riemannien. Nous nous limiterons au cas des fibrés triviaux (le fibré somme direct des fibrés tangent et normal à une sous-variété lagrangienne de $\mathbb{C}^n$ étant le cas particulier le plus important de cette situation).

Nous ne ferons ici qu'énoncer les résultats. Les démonstrations paraîtront ailleurs.

2. COHOMOLOGIE RÉELLE DE $U(n)/O(n)$ ET $U(n)/SO(n)$. — La grassmannienne lagrangienne Λ_n (resp. lagrangienne orientée $\dot{\Lambda}_n$) de $\mathbb{C}^n$ s'identifie à $U(n)/O(n)$ [resp. $U(n)/SO(n)$]. L'espace tangent à l'origine de $U(n)/O(n)$ [resp. $U(n)/SO(n)$], noté $\mathcal{U}(n)/\mathcal{O}(n)$ [resp. $\mathcal{U}(n)/\mathcal{SO}(n)$], s'identifie à l'espace des matrices (n, n) symétriques imaginaires pures. L'algèbre de cohomologie $H^*(U(n)/SO(n), \mathbb{R})$ est isomorphe à $I(SO(n))/\mathcal{I} \otimes \mathcal{A}$, où $\mathcal{A}$ est la sous-algèbre de $H^*(U(n), \mathbb{R})$ engendrée par l'espace de Samelson de $U(n)/SO(n)$, et où $I(SO(n))/\mathcal{I}$ est le quotient de l'algèbre des polynômes invariants sur $SO(n)$ par le noyau de l'homomorphisme de Weil :

$$\chi: I(SO(n)) \rightarrow H^*(U(n)/SO(n), \mathbb{R}). \quad [3]$$

Enfin, $U(n)/SO(n)$ est un revêtement à deux feuillets de $U(n)/O(n)$. On déduit des considérations qui précèdent le :

THÉORÈME. — (i) Les formes différentielles invariantes à gauche sur $U(n)/SO(n)$, [resp. $U(n)/O(n)$] définies sur l'espace tangent à l'origine de $U(n)/SO(n)$ [resp. $U(n)/O(n)$] par :

$$C_{4q+1}(X_1, \dots, X_{4q+1}) = (-1)^q \frac{((2q)!)^2}{(4q+1)!} \frac{1}{(2\pi)^{2q+1}} \\ \times \sum_{\varepsilon \in \mathcal{S}_{4q+1}} (-1)^{\text{sign } \varepsilon} \text{Trace}(M_{\varepsilon_1} \circ \dots \circ M_{\varepsilon_{4q+1}}),$$

où :

$$X_j = i M_j \in \mathcal{U}(n)/\mathcal{O}(n) \quad [\text{resp. } \in \mathcal{U}(n)/\mathcal{SO}(n)], \quad \forall j \in [1, 4q+1]$$

est parfaitement déterminée par L , et est indépendante du choix de (g, J) et L_0 . On pourra donc poser $G_{L_0, L}^* = G_L^*$.

Définissons à présent les classes caractéristiques d'un couple (L, L') de champs de plans lagrangiens (généralisant la classe de Maslov).

3.2. Le cas non orienté.

DÉFINITION. — Soient L et L' deux champs de plans lagrangiens d'un fibré symplectique trivial (E, Π, B) . Soient :

$$G_L^*: H^*(U(n)/O(n), \mathbb{R}) \rightarrow H^*(B, \mathbb{R}),$$

$$G_{L'}^*: H^*(U(n)/O(n), \mathbb{R}) \rightarrow H^*(B, \mathbb{R}),$$

le pull-back des applications de Gauss de L et L' .

On appelle classes caractéristiques du couple (L, L') les classes :

$$m_{4q+1}(L, L') = G_L^*([C_{4q+1}]) - G_{L'}^*([C_{4q+1}]) \in H^{4q+1}(B, \mathbb{R})$$

$$0 \leq q \leq \left[\frac{n-1}{2} \right],$$

où $[C_{4q+1}] \in H^{4q+1}(U(n)/O(n), \mathbb{R})$ est la classe de cohomologie de degré $4q+1$ définie par la forme C_{4q+1} .

On a de façon claire les théorèmes suivants :

THÉORÈME. — Soient L et L' deux champs de plans lagrangiens d'un fibré symplectique trivial (E, Π, B) .

Si L et L' sont partout transverses, $m_{4q+1}(L, L') = 0$.

THÉORÈME. — Soient L, L', L'' , trois champs de plans lagrangiens d'un fibré symplectique trivial (E, Π, B) .

(i) On a :

$$m_{4q+1}(L, L'') = m_{4q+1}(L, L') + m_{4q+1}(L', L''), \quad 0 \leq q \leq \left[\frac{n-1}{2} \right];$$

$$(ii) \quad m_{4q+1}(L, L') = -m_{4q+1}(L', L), \quad 0 \leq q \leq \left[\frac{n-1}{2} \right].$$

3.3. Le cas orienté. — Supposons à présent L_0 et L orientés. Si n est pair ($n=2m$), on peut définir une nouvelle classe caractéristique de degré n $e_{2m}(L, L_0) = \tilde{G}_{L_0, L}^*(e_{2m})$, en notant e_{2m} la classe d'Euler du fibré canonique $U(n) \rightarrow U(n)/SO(n)$ et $\tilde{G}_{L_0, L}$ l'application rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & U(n)/SO(n) & \\ \tilde{G}_{L_0, L} \nearrow & \downarrow & \\ B & \xrightarrow{G_{L_0, L}} & U(n)/O(n) \end{array}$$

$e_{2m}(L_0, L)$ est également une obstruction à la transversalité de L et L_0 .

et :

$$0 \leq q < \left[\frac{n-1}{2} \right]$$

représentent un système de générateurs de la sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $H^*(U(n)/SO(n), \mathbb{R})$ [resp. un système de générateurs de $H^*(U(n)/O(n), \mathbb{R})$].

(ii) La classe d'Euler du fibré $U(n) \rightarrow U(n)/SO(n)$ est un générateur de la sous-algèbre $I(SO(n))$ de $H^*(U(n)/SO(n), \mathbb{R})$, (pour n pair).

(iii) Le polynôme de Poincaré $P(t)$ de $U(n)/SO(n)$ est :

Pour $n=2m+1$:

$$P(t) = \prod_{q=0}^m (1+t^{4q+1}).$$

Pour $n=2m$:

$$P(t) = (1+t^{2m}) \prod_{q=0}^{m-1} (1+t^{4q+1}).$$

(iv) Le polynôme de Poincaré $P(t)$ de $U(n)/O(n)$ est :

Pour $n=2m+1$:

$$P(t) = \prod_{q=0}^m (1+t^{4q+1}).$$

Pour $n=2m$:

$$P(t) = \prod_{q=0}^{m-1} (1+t^{4q+1}).$$

3. CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES COUPLES DE CHAMPS DE PLANS LAGRANGIENS. — Précisons le cadre géométrique de cette étude. Nous considérons (E, Π, B) un fibré symplectique trivial dont les fibres sont de dimension $2n$, et (L, L') un couple de champs de plans lagrangiens de (E, Π, B) .

3.1. *Application de Gauss.* — Soit (g, J) une structure presque complexe adaptée à la structure symplectique, soit L_0 un sous-fibré trivial de E . E s'identifie à $B \times (L_0 \oplus JL_0) = B \times (\mathbb{R}^n \oplus J\mathbb{R}^n) \simeq B \times \mathbb{C}^n$.

On peut donc associer à chaque champ de plans lagrangiens L une application de Gauss $G_{L_0, L}$ à valeur dans $\Lambda(n)$, la grassmannienne lagrangienne de $\mathbb{C}^n$:

$$G_{L_0, L}: B \rightarrow \Lambda(n) \simeq U(n)/O(n),$$

$$P \mapsto L_p$$

L_p étant considéré comme un plan lagrangien de $\mathbb{C}^n$.

Il est important de remarquer l'application :

$$G_{L_0, L}^*: H^*(U(n)/O(n), \mathbb{R}) \rightarrow H^*(B, \mathbb{R})$$

4. FORMES CARACTÉRISTIQUES D'UNE SOUS-VARIÉTÉ LAGRANGIENNE DE $\mathbb{C}^n$. — Si L est une sous-variété lagrangienne de $\mathbb{C}^n$, munie de la structure riemannienne induite, le procédé précédent permet de définir des formes différentielles fermées sur L .

Posons $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$; donnons la :

DÉFINITION. — Soit $L \subset \mathbb{C}^n$ une sous-variété lagrangienne de $\mathbb{C}^n$. On appelle formes caractéristiques de L les formes différentielles :

$$\alpha_{4q+1} = G_{\mathbb{R}^n}^* \tau_L(C_{4q+1}), \quad 0 \leq q \leq \left[\frac{n-1}{2} \right].$$

Si σ est la seconde forme fondamentale de l'immersion, et J la structure complexe sur $\mathbb{C}^n$, notons, pour tout X de TL , $\bar{\sigma}_X$ le tenseur de type $(1,1)$ défini sur L par $\bar{\sigma}_X(Y, Z) = \langle \sigma(X, Y), JZ \rangle$. On a le :

THÉORÈME. — Soit L une sous-variété lagrangienne de $\mathbb{C}^n$, de seconde forme fondamentale σ , les formes caractéristiques de L sont données par les formules :

$$0 \leq q \leq \left[\frac{n-1}{2} \right],$$

$$\alpha_{4q+1}(X_1, \dots, X_{4q+1})$$

$$= (-1)^q \frac{((2q)!)^2}{(4q+1)!} \frac{1}{(2\pi)^{2q+1}} \text{trace} \left(\sum_{\varepsilon \in \mathcal{S}_{4q+1}} (-1)^{\text{sgn } \varepsilon} \bar{\sigma}_{X_{\varepsilon_1}} \circ \dots \circ \bar{\sigma}_{X_{\varepsilon_{4q+1}}} \right),$$

$X_1, \dots, X_{4q+1}$ étant des vecteurs tangents en un point donné de L .

5. EXEMPLE. — 5.1. L'immersion du tore standard lagrangien $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ satisfait $m_1 \neq 0$, $m_5 = 0$, $m_9 = 0$, $\dots$, $\chi(T^n) = 0$.

5.2. L'immersion φ de $U(n)/O(n)$ dans $\mathbb{C}^{n(n+1)/2}$ défini par $\varphi(A) = A^t A$ est lagrangienne, et a toutes ses classes caractéristiques non nulles.

Remise le 17 décembre 1984.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] J.-M. MORVAN, Classes de Maslov d'une immersion lagrangienne et minimalité, *Comptes rendus*, 292, série I, 1981, p. 633-636; Quelques invariants topologiques en géométrie symplectique, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, série A, 38 (4), 1983, p. 349-370.
- [2] J.-M. MORVAN, Sur la transversalité de deux champs de plans lagrangiens. *Comptes rendus*, 296, série I, 1983, p. 997-1000; Obstruction à la transversalité de deux champs de plans lagrangiens, Collection Travaux en cours, *Feuilletages et quantification géométrique*, Séminaire sud-rhodanien de Géométrie II, p. 55-71.
- [3] W. GREUB, S. HALPERIN et R. VANSTONE, *Connexions, Curvature and Cohomology*, Academic Press, 1972.

Faculté des Sciences D'Avignon, Département de Mathématiques,
33, rue Louis-Pasteur, 84000 Avignon.