

Cohomologie des sous-variétés α -obliques

Bang-Yen CHEN et Jean-Marie MORVAN

Résumé — Nous définissons une 1-forme différentielle sur toute sous-variété α -oblique d'une variété presque hermitienne M . Lorsque M est plate, cette forme est fermée et définit une classe de cohomologie. Cette classe n'est autre que la classe de Maslov lorsque la sous-variété est Lagrangienne. Nous détaillons le cas des surfaces de $\mathbb{C}^2$.

Cohomology of α -slant submanifolds

Abstract — We define a differential 1-form on α -slant submanifolds of an almost Hermitian manifold M . When M is flat, this form is closed and defines a cohomology class. This class is nothing but the Maslov class, when the submanifold is Lagrangian. We give details in the case of surfaces of $\mathbb{C}^2$.

1. INTRODUCTION. — 1.1. Soit $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle, J)$ une variété presque hermitienne, de métrique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de structure presque complexe J . Soit N une sous-variété de M . Un point $p \in N$ est appelé *point complexe* si $T_p N$ est un sous-espace vectoriel complexe de $T_p M$. Ces points sont donc caractérisés par la condition

$$JT_p N = T_p N.$$

Un point $p \in N$ est appelé *point totalement réel*, si $T_p N$ ne contient aucune droite complexe dans $T_p M$. Enfin, $p \in N$ est appelé *point isotrope* si $T_p N$ est un sous-espace vectoriel isotrope de $T_p M$, muni de la forme présymplectique

$$\Omega_p = \langle J \cdot, \cdot \rangle_p.$$

Les points p isotropes de N sont donc caractérisés par la condition

$$JT_p N \subseteq T_p^\perp N.$$

On a beaucoup étudié la géométrie des sous-variétés complexes et isotropes, et la topologie des sous-variétés totalement réelles. Récemment, le premier auteur a défini une nouvelle classe de sous-variétés : les *sous-variétés α -obliques* [1] qui donnent un cadre commun aux sous-variétés complexes et isotropes. Nous étudions ici leur cohomologie, en introduisant une *forme différentielle* Φ définie canoniquement sur toute sous-variété α -oblique. Nous énonçons ici simplement les résultats. Les preuves paraîtront ailleurs.

2. NOTATIONS. DÉFINITIONS. — 2.1. Soit N une variété riemannienne isométriquement immergée dans une variété presque hermitienne M , de structure presque complexe J , et de métrique (presque hermitienne) g . On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur N comme sur M . On note ∇ et $\tilde{\nabla}$ les connexions de Levi-Civita de N et M , R et $\tilde{R}$ leurs tenseurs de courbure respectifs.

2.2. Soit $p \in N$ et $X \in T_p N$. On pose

$$JX = PX + FX,$$

où PX et FX sont les composantes tangentielles et normales de JX . Un point $p \in N$ est donc *complexe* si $F_p \equiv 0$ *isotrope* si $P_p \equiv 0$. Nous dirons que N est une sous-variété *propre* de M si N ne contient aucun point complexe ou isotrope.

Supposons $X_p \neq 0$. L'angle $\alpha(X_p)$ formé par JX_p et $T_p N$ s'appelle l'*angle d'holomorphic* [8], ou de Wirtinger de X_p . Nous dirons que N est α -oblique dans M si la fonction α est

Note présentée par André LICHNEROWICZ.

constante (et donc indépendante du point $p \in N$ et du vecteur X_p de $T_p N$). Si N est complexe ou isotrope, alors N est α -oblique ($\alpha \equiv 0$ et $\alpha \equiv \pi/2$ respectivement). Une sous-variété α -oblique est dite *propre* si elle n'est ni complexe ni isotrope. On trouvera dans [1], [6], [7] de nombreux exemples de sous-variétés α -obliques.

2.3. Soit N une sous-variété α -oblique propre d'une variété presque hermitienne M . Sa dimension est paire : $n = 2k$ [5]. Suivant [1], on peut définir au voisinage de chaque point p de N , un repère local adapté $\{e_1, e_2, \dots, e_{2k-1}, e_{2k}, e_1^*, e_2^*, \dots, e_{(2k-1)}^*, e_{(2k)}^*\}$ qui engendre $(TN + JTN)$ vérifiant, pour tout $l \in \{1, \dots, k\}$,

$$\begin{aligned} J e_{2l-1} &= \cos \alpha e_{2l} + \sin \alpha e_{2l-1}^* ; & J e_{2l} &= -\cos \alpha e_{2l-1} + \sin \alpha e_{2l}^* , \\ J e_{2l-1}^* &= -\sin \alpha e_{2l} - \cos \alpha e_{2l}^* ; & J e_{2l}^* &= -\sin \alpha e_{2l-1} + \cos \alpha e_{2l-1}^* . \end{aligned}$$

Comme d'habitude, on notera $\omega_i^j, \omega_i^{\bar{j}}, \omega_i^{j*}$ les formes de connexion correspondantes.

3. FORME CANONIQUE DÉFINIE SUR UNE SOUS-VARIÉTÉ OBLIQUE.

3.1. DÉFINITION. — Soit $i: N \rightarrow M$ une immersion isométrique propre d'une variété riemannienne N de dimension n à valeurs dans une variété presque hermitienne M . La 1-forme Φ définie sur N par

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \omega_i^{i*} ,$$

(où $\{e_1, \dots, e_n, e_1^*, \dots, e_n^*\}$ est un repère adapté à N), s'appelle 1-forme canonique associée à l'immersion i .

3.2. Remarque. — (i) Il est facile de voir que cette forme est indépendante du repère choisi.

(ii) Si M est kählérienne, et N lagrangienne, on peut définir la forme

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \omega_i^{i*}$$

dans un repère $(e_1, \dots, e_n) \in TN$, $(J e_1 = e_1^*, \dots, J e_n = e_n^*) \in T^\perp N$. Dans ce cas on retrouve la 1-forme classique définie par

$$\Phi(X) = - \langle JH, X \rangle$$

où H est le vecteur de courbure moyenne de l'immersion. Si $M = \mathbb{C}^n$, Φ est fermée et la classe $[\Phi]$ est, à une constante près, la classe de Maslov de l'immersion lagrangienne [9].

4. ÉNONCÉ DES RÉSULTATS.

4.1. PROPOSITION. — Soit N une sous-variété α -oblique propre de dimension (réelle) n , immergée dans une variété kählérienne $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle, J)$, de dimension réelle $2n$. Alors la forme canonique Φ définie sur N vérifie l'égalité

$$d\Phi(X, Y) = \sum_{i=1}^n \langle \tilde{R}(X, Y) e_i, e_i^* \rangle$$

où $(e_1, \dots, e_n, e_1^*, \dots, e_n^*)$ est un repère adapté. (En particulier, cette forme est fermée si M est plate.)

4.2. THÉORÈME. — Soit N une surface α -oblique de $\mathbb{C}^2$, ($\alpha \neq 0$). Alors la classe de cohomologie de De Rham de la forme canonique $[\Phi]$ est entière (à une constante multiplicative près). Plus précisément,

$$\frac{1}{2\sqrt{2}\pi \sin \alpha} [\Phi] \in H^1(N, \mathbb{Z}).$$

4.3. COROLLAIRE. — Soit N une surface complète α -oblique propre de $\mathbb{C}^2$. Si la courbure moyenne de N est en tout point supérieure à une constante strictement positive, alors N est difféomorphe à un plan ou un cylindre.

On déduit facilement de 1.2.2 et 1.2.3 qu'on peut construire des sous-variétés α -obliques propres de $\mathbb{C}^n$, ayant une classe de cohomologie $[\Phi]$ non nulle : la construction la plus simple est celle d'un cylindre α -oblique (produit d'un cercle par une droite) $S^1 \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^2$, tel que

$$\int_{S^1} [\Phi] = 1.$$

5. ESQUISSE DE PREUVE. — 4.1 est une conséquence du

LEMME. — Soit N une sous-variété α -oblique propre de dimension $n=2k$, d'une variété kählérienne $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle, J)$ de dimension réelle $2n$. On a, relativement à un repère adapté,

$$\begin{aligned} \omega_{2i}^{(2j)*} + \omega_{2i-1}^{(2j-1)*} &= \omega_{2j}^{(2i)*} + \omega_{2j-1}^{(2i-1)*}, & \omega_{2i}^{(2j)*} + \omega_{2i-1}^{(2j-1)*} &= \omega_{2i}^{2j} - \omega_{2i-1}^{2j-1}, \\ \omega_{2j}^{2i-1} - \omega_{(2j-1)*}^{(2i-1)*} &= \omega_{2i}^{2j-1} - \omega_{(2i-1)*}^{(2j-1)*}, & \forall i, j \in \{1, \dots, k\}. \end{aligned}$$

Le paragraphe 6 est consacré à l'étude du théorème.

6. SURFACES α -OBLIQUES. — Nous étudions dans ce paragraphe, les surfaces α -obliques de $\mathbb{C}^2$ (cf. [1] à [5]).

6.1. La grassmannienne $G(2, 4)$ des 2-plans orientés de $\mathbb{E}^4$. — Soit $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ la base orthonormée canonique de $\mathbb{E}^4$. La forme $\psi_0 = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3 \wedge \varepsilon_4$ oriente canoniquement $\mathbb{E}^4$. Soit $\Lambda^2(\mathbb{E}^4)^*$ l'espace vectoriel de dimension 6 des 2-covecteurs de $\mathbb{E}^4$, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par

$$\langle X_1 \wedge X_2, Y_1 \wedge Y_2 \rangle = \det(\langle X_i, Y_j \rangle).$$

Identifions la grassmannienne $G(2, 4)$ avec l'ensemble $D_1(2, 4)$ des 2-vecteurs décomposables de $\Lambda^2 \mathbb{E}^4$. Soit $\star$ l'opérateur de Hodge. Puisque $\star^2 = 1$, et puisque $\star$ est autoadjoint, on a la décomposition orthogonale

$$\Lambda^2 \mathbb{E}^4 = \Lambda_+^2 \mathbb{E}^4 \oplus \Lambda_-^2 \mathbb{E}^4,$$

relative aux sous-espaces propres de $\star$ associés aux valeurs propres $+1$ et -1 . Soient π_+ et π_- les projections naturelles associées. Soient S_+^2 et S_-^2 les 2-sphères de $\Lambda_+^2 \mathbb{E}^4$ et $\Lambda_-^2 \mathbb{E}^4$, centrées à l'origine, et de rayon $1/\sqrt{2}$. On a :

$$\pi_+ : D_1(2, 4) \rightarrow S_+^2; \quad \pi_- : D_1(2, 4) \rightarrow S_-^2; \quad D_1(2, 4) = S_+^2 \times S_-^2.$$

6.2. L'application de Gauss d'une surface orientée α -oblique de $\mathbb{C}^2$. — Soit $f: N \rightarrow \mathbb{E}^4$ une immersion d'une surface orientée N dans $\mathbb{E}^4$. Soit

$$v: N \rightarrow G(2, 4)$$

l'application de Gauss associée à f . Soit

$$v_+ = \pi_+ \circ v; \quad v_- = \pi_- \circ v.$$

On a alors le

6.3. LEMME. — Si N est une surface proprement α -oblique, et si (e_1, e_2, e_3, e_4) est un repère local adapté, on a

$$(v_+)_* = \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi \eta, \quad \text{où } \eta = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3).$$

Si N est α -oblique, l'image de v_+ appartient à un cercle S_α^1 de S_+^2 , de rayon $1/\sqrt{2} \sin \alpha$. Soit ω la 1-forme volume de S_α^1 . On a

$$(v_+)^*(\omega)(X) = \omega((v_+)_*(X)) = \frac{1}{2} \Phi(X), \quad \forall X \in TN,$$

et

$$\int_\gamma \frac{1}{2} \Phi = \text{indice}(v_+) \text{vol}(S_\alpha^1) = \sqrt{2} \pi \sin \alpha (\text{indice}(v_+)),$$

pour tout lacet γ de N . Donc

$$\frac{1}{2\sqrt{2}\pi \sin \alpha} \int_\gamma \Phi$$

est un entier. (C'est le nombre de fois que la courbe $v_+(\gamma)$ « s'enroule autour du 2-vecteur $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \wedge \varepsilon_4$ »). Si la courbure moyenne de N est bornée inférieurement par une constante positive, on déduit du fait que

$$(v_+)_*(X) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_i h_{ii}^3 \omega^1 + \sum_i h_{ii}^4 \omega^2 \right) (X),$$

que le rang de $(v_+)_*$ est 1 en tout point. Le corollaire s'en déduit sans difficulté.

Note remise le 9 décembre 1991, acceptée après révision le 14 avril 1992.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] B.-Y. CHEN, Slant immersions, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 41, 1990, p. 135-147.
- [2] B.-Y. CHEN et J.-M. MORVAN, Propriétés riemanniennes des surfaces Lagrangiennes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 301, série I, 1985, p. 109-212.
- [3] B.-Y. CHEN et J.-M. MORVAN, Géométrie des surfaces Lagrangiennes de $\mathbb{C}^2$, *J. Math. Pures Appl.*, 66, 1987, p. 321-335.
- [4] B.-Y. CHEN et Y. TAZAWA, Slant surfaces of codimension two, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, 11, 1990, p. 29-43.
- [5] B.-Y. CHEN et Y. TAZAWA, Slant submanifolds in complex Euclidean spaces, *Tokyo J. Math.*, 14, 1991, p. 101-120.
- [6] J. EELLS et S. SALAMON, Twistorial construction of harmonic maps of surfaces, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 12, 1985.
- [7] P. GAUDUCHON, Pseudo-immersions superminimales, *Bull. Soc. Math. France*, 114, 1986.
- [8] A. LICHNEROWICZ, Applications harmoniques et variétés Kähleriennes, *Sympos. Math., Ist. Naz. Alt. Mat.*, III, 1970.
- [9] J.-M. MORVAN, Classe de Maslov d'une immersion Lagrangienne et minimalité, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 292, série I, 1981, p. 633-636.
- [10] I. VAISMAN, Symplectic Geometry and Secondary Characteristic Classes, *Progr. Math.*, 72, Birkhäuser.

B.-Y. C. : Department of Mathematics, Michigan State University,
East Lansing, Michigan, 48824-1027, U.S.A. ;

J.-M. M. : Institut de Mathématiques, Université Claude-Bernard-Lyon-I,
43, boulevard du 11-Novembre-1918, 69622 Villeurbanne Cedex.