

## Sur la stabilité des sous-variétés minimales isotropes d'une variété kählérienne

Bang-Yen CHEN et Jean-Marie MORVAN

**Résumé** — Nous étudions la stabilité des sous-variétés minimales isotropes compactes  $I$  d'une variété kählérienne de structure complexe  $J$ . Si l'on décompose orthogonalement  $T^\perp I$  en  $JTI \oplus v$ , nous montrons que la variation seconde du volume  $\mathcal{V}$  de  $I$  vérifie

$$\begin{aligned}\mathcal{V}''(\xi) &\geq 0, & \forall \xi \in JTI \\ \mathcal{V}''(\xi) + \mathcal{V}''(J\xi) &\geq 0, & \forall \xi \in v\end{aligned}$$

dès que la courbure bisectionnelle holomorphe de la variété ambiante est non positive. Nous obtenons également des résultats sur l'instabilité des hypersurfaces minimales d'une forme réelle d'une variété kählérienne à courbure non négative.

### Stability of isotropic minimal submanifolds of a Kähler manifold

**Abstract** — We study the stability of compact minimal isotropic submanifolds of a Kähler manifold with complex structure  $J$ . If we consider the orthogonal decomposition of  $T^\perp I$  by  $JTI \oplus v$ , we show that the second variation of the volume  $\mathcal{V}$  of  $I$  satisfies

$$\begin{aligned}\mathcal{V}''(\xi) &\geq 0, & \forall \xi \in JTI \\ \mathcal{V}''(\xi) + \mathcal{V}''(J\xi) &\geq 0, & \forall \xi \in v\end{aligned}$$

as soon as the holomorphic bisectional curvature of the ambient manifold is non positive. We obtain also unstability results for minimal hypersurfaces of a real form of a non-negatively curved Kählerian manifold.

1. INTRODUCTION. — Parmi les sous-variétés  $M$  d'une variété kählérienne  $\tilde{M}$ , on distingue les sous-variétés complexes (qui sont telles que la structure presque complexe  $J$  de  $\tilde{M}$  conserve chaque espace tangent de  $M$ :  $JTM = TM$ ), et les sous-variétés isotropes (qui sont telles que la structure presque complexe  $J$  de  $\tilde{M}$  envoie chaque espace tangent de  $M$  dans son orthogonal:  $JTM \subset T^\perp M$ ). On sait qu'une sous-variété complexe est toujours minimale et stable. Par contre, une sous-variété isotrope minimale n'est pas stable en général (considérer par exemple l'immersion totalement géodésique de  $\mathbb{R}P^n$  dans  $\mathbb{C}P^n$  [1]).

Dans cette Note, nous étudions la formule de la variation seconde d'une sous-variété isotrope minimale d'une variété kählérienne. (Nous énonçons simplement les résultats. Les preuves paraîtront ailleurs. Les notations sont données en 3.1 et 3.2.)

### 2. ÉNONCÉ DES RÉSULTATS.

2.1. THÉORÈME. — Soit  $I$  une sous-variété isotrope minimale compacte d'une variété kählérienne  $\tilde{M}$ , à courbure bisectionnelle holomorphe non positive. Alors :

- (i) indice  $(\mathcal{V}''|_{J(TI)}) = 0$ .
- (ii)  $\mathcal{V}''(\xi) + \mathcal{V}''(J\xi) \geq 0, \forall \xi \in v$ .

Ce théorème généralise directement les résultats de [2], [3] dans le cas lagrangien. On pourra aussi se référer à [4] et [5].

2.2. L'exemple suivant montre que ce résultat est le meilleur possible et que, même si la variété ambiante a une courbure non positive, on peut y construire des sous-variétés minimales isotropes instables. Considérons une hypersurface compacte  $I$  minimale, non totalement géodésique, du tore (réel) plat  $T^{n+1}$ , lui-même canoniquement plongé dans le

Note présentée par André LICHNEROWICZ.

tore complexe plat  $\mathbb{C}T^{n+1}$ . Soit  $\xi$  une normale unitaire de  $I$  dans  $T^{n+1}$ . On a

$$A\xi \neq 0, \quad \nabla^\perp \xi = 0, \quad A_{J\xi} = 0$$

et donc

$$\mathcal{V}''(\xi) < 0, \quad \mathcal{V}''(J\xi) > 0.$$

On peut généraliser cet exemple, et montrer le

2.3. THÉORÈME. — Soit  $M$  une sous-variété lagrangienne totalement géodésique d'une variété kählérienne  $\tilde{M}$ . Soit  $I$  une hypersurface minimale compacte de  $M$ .

(i) Si la courbure sectionnelle de  $\tilde{M}$  est non négative, et si  $I$  n'est pas totalement géodésique, alors  $I$  est instable dans  $\tilde{M}$ .

(ii) Si la courbure sectionnelle de  $\tilde{M}$  est positive,  $I$  est instable dans  $\tilde{M}$ .

Soit  $\tilde{M}$  une variété kählérienne. Une sous-variété  $M$  de  $\tilde{M}$  est appelée une forme réelle de  $\tilde{M}$  si  $M$  est l'ensemble des points fixes d'une isométrie involutive antiholomorphe de  $\tilde{M}$ . Les formes réelles d'une variété kählérienne sont totalement géodésiques et lagrangiennes (cf. [6]). On déduit de 2.3 les corollaires suivants :

2.4. COROLLAIRE. — Soient  $\tilde{M}$  un espace symétrique hermitien de type compact et  $M$  une forme réelle de  $\tilde{M}$ . Alors toute hypersurface compacte minimale et non totalement géodésique  $I$  de  $M$  est instable dans  $\tilde{M}$ .

2.5. COROLLAIRE. — Soit  $I$  une hypersurface compacte minimale de  $\mathbb{R}P^{n+1}$  isométriquement plongée dans  $\mathbb{C}P^{n+1}$  comme sous-variété lagrangienne totalement géodésique. Alors  $I$  est instable dans  $\mathbb{C}P^{n+1}$ .

2.6. COROLLAIRE. — Soient  $\tilde{M}^{n+1}$  un espace symétrique hermitien irréductible de type compact, de dimension complexe  $n+1$  et  $M$  une forme réelle de  $\tilde{M}^{n+1}$ . Si  $n > \text{rang } \tilde{M}$ , alors toute hypersurface  $I$  compacte, minimale de  $M$  est instable dans  $\tilde{M}^{n+1}$ .

3. LA FORMULE DE LA VARIATION SECONDE POUR UNE SOUS-VARIÉTÉ ISOTROPE. — 3.1. Soit  $i: I \rightarrow \tilde{M}$  une immersion isométrique d'une variété riemannienne compacte de dimension  $n$ , à valeurs dans une variété riemannienne  $\tilde{M}$ . Nous notons  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  la métrique définie sur  $I$  et sur  $\tilde{M}$ ,  $\nabla$  (resp.  $\tilde{\nabla}$ ) la connexion de Levi-Civita définie sur  $I$  (resp.  $\tilde{M}$ ),  $R$  (resp.  $\tilde{R}$ ) le tenseur de courbure définie sur  $I$  (resp.  $\tilde{M}$ ). Nous notons également

$$\sigma = TI \times TI \rightarrow T^\perp I$$

la seconde forme fondamentale de l'immersion (à valeurs dans le fibré normal). Soit

$$A: TI \times T^\perp I \rightarrow TI$$

l'adjoint de  $\sigma$ .  $A$  est défini par l'équation

$$(1) \quad \langle \sigma(X, Y), \xi \rangle = \langle A_\xi X, Y \rangle, \quad \forall X, Y \in TI, \quad \forall \xi \in T^\perp I.$$

$H = (1/n) \text{Trace } \sigma$  est le vecteur de courbure moyenne de  $I$ . Enfin, nous notons  $\nabla^\perp$  (resp.  $R^\perp$ ), la connexion normale (resp. le tenseur de courbure normale) définie sur le fibré normal  $T^\perp I$ .

3.2. Soit  $\{i_t\}$  une famille à un paramètre d'immersions de  $I$  dans  $\tilde{M}$ , telle que  $i_0 = i$ . Une déformation  $\{i_t\}$  de  $i$  induit un champ de vecteurs  $\xi$  dans  $\tilde{M}$  défini le long de  $I$  :

$$\xi = \frac{\partial i_t}{\partial t}.$$

Décomposons  $\xi$  en sa partie tangente  $\xi^T$  et sa partie normale  $\xi^N$ . Si  $\xi^T = 0$ , on dit que la déformation est normale. Soit  $\mathcal{V}(t)$  le volume de  $i_t(I)$ , calculé avec la métrique induite

sur  $I$  par  $i_t$ . Notons  $\mathcal{V}'(\xi)$  et  $\mathcal{V}''(\xi)$  les valeurs de la première et deuxième dérivée de  $\mathcal{V}(t)$  en  $t=0$ . On sait que

$$(2) \quad \mathcal{V}'(\xi) = -n \int_I \langle \xi, H \rangle dv.$$

Si  $I$  est minimale ( $H=0$ ), on a :

$$(3) \quad \mathcal{V}''(\xi) = \int_I \{ \|\nabla^\perp \xi\|^2 - \tilde{S}(\xi, \xi) - \|A_\xi\|^2 \} dv$$

où  $\tilde{S}$  est le tenseur défini par

$$\tilde{S}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \tilde{R}(\xi, e_i, e_i, \eta),$$

( $e_1, \dots, e_n$ ) étant un repère local orthonormé de  $TI$ .

En appliquant la formule de Stokes à (3), on a :

$$\mathcal{V}''(\xi) = \int_I \langle L\xi, \xi \rangle dv$$

où  $L$  est un opérateur différentiel linéaire du second ordre fortement elliptique, auto-adjoint, agissant sur l'espace des sections du fibré normal, défini par

$$L = -\Delta^\perp - \hat{A} - \hat{S},$$

où  $\Delta^\perp$  est le laplacien associé à la connexion normale,  $\langle \hat{A}\xi, \eta \rangle = \text{trace} \langle A_\xi, A_\eta \rangle$  et  $\langle \hat{S}\xi, \eta \rangle = \tilde{S}(\xi, \eta)$ . Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $L$ , on note  $E_\lambda$  l'espace propre associé :

$$E_\lambda = \{ \xi \in \Gamma(T^\perp I) : L(\xi) = \lambda \xi \}.$$

Le nombre  $\sum_{\lambda < 0} \dim(E_\lambda)$  est appelé *indice de  $I$  dans  $\tilde{M}$* .  $I$  est dite *stable* si  $\mathcal{V}''(\xi) \geq 0$  pour

tout champ de vecteurs normal  $\xi$ . Sinon,  $I$  est dite *instable*.

Définissons à présent l'opérateur  $\mathcal{J}$  par

$$\mathcal{J}(\xi, \eta) = \int_I \langle L\xi, \eta \rangle dv, \quad \forall \xi, \eta \in \Gamma(T^\perp I).$$

$\mathcal{J}$  induit un tenseur symétrique

$$\mathcal{J} : T^\perp I \times T^\perp I \rightarrow \mathbb{R}.$$

Si  $V$  est un sous-fibré du fibré normal  $T^\perp I$ , on note  $\mathcal{J}|_V$  la restriction de  $\mathcal{J}$  à  $V$ . On note alors *indice* ( $\mathcal{J}|_V$ ) le nombre de valeurs propres négatives de  $\mathcal{J}|_V$ .

3.3. Supposons maintenant que  $\tilde{M}$  soit kählérienne (de dimension réelle  $2n+2p$ ). Notons  $J$  la structure complexe de  $\tilde{M}$ . Si  $I$  est une sous-variété isotrope de  $\tilde{M}$ , son fibré normal se décompose comme suit :

$$T^\perp I = JTI \oplus v$$

où  $v$  est le supplémentaire orthogonal de  $JTI$  dans  $T^\perp I$ . On a alors la

3.4. PROPOSITION. — Soit  $I$  une sous-variété compacte isotrope minimale d'une variété kählérienne  $\tilde{M}$ .

(i) Soit  $\xi \in \text{JTI}$ . Notons  $\omega$  la 1-forme sur  $I$  duale de  $J\xi$ . On a

$$(4) \quad \mathcal{V}''(\xi) = \int_I \left\{ \frac{1}{2} \|d\omega\|^2 + \|\delta\omega\|^2 + 2 \|\text{pr}_v \sigma(J\xi, \cdot)\|^2 - \sum_{i=1}^n [\langle \tilde{R}(e_i, \xi)\xi, e_i \rangle + \langle \tilde{R}(Je_i, \xi)\xi, Je_i \rangle] \right\} dv$$

(ii) Soit  $\xi \in v$ . On a

$$(5) \quad \mathcal{V}''(\xi) = \int_I \left\{ \|A_{J\xi}\|^2 - \|A_\xi\|^2 + \|\text{pr}_v \nabla^\perp \xi\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle \tilde{R}(e_i, \xi)\xi, e_i \rangle \right\} dv$$

(où  $\{e_i\}$  est une base locale orthonormée de  $\text{TI}$ ).

Le théorème 2.1 est une conséquence immédiate de 3.4.

Note remise le 14 janvier 1991, acceptée le 15 janvier 1991.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] B. LAWSON et J. SIMONS, On stable currents and their applications to global problems in real and complex geometry, *Ann. Math.*, 98, 1973, p. 427-450.
- [2] B.-Y. CHEN, *Geometry of Submanifolds and Its Applications*, Science University of Tokyo, 1981.
- [3] B.-Y. CHEN, P. F. LEUNG et T. NAGANO, *Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces*, III, Michigan State University, 1980.
- [4] R. HARVEY et B. LAWSON, Calibrated Geometries, *Acta Mathematica*, 1982, p. 48-157.
- [5] Y. G. OH, *Second Variation and Stabilities of Minimal Lagrangian Submanifolds in Kaehler Manifolds* (à paraître).
- [6] M. TAKEUCHI, Stability of certain minimal submanifolds of compact Hermitian symmetric spaces, *Tohoku Math. J.*, 36, 1984, p. 293-314.

B.-Y. C. : *Department of Mathematics, Michigan State University, East Lansing, Michigan, 48104, U.S.A.*;

J.-M. M. : *Université Claude-Bernard - Lyon-I, U.R.A. n° 746, G.D.R. n° 144, Institut de Mathématique et Informatique, 43, boulevard du 11-Novembre-1918, 69622 Villeurbanne Cedex.*