

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Sous-variétés conformément plates de codimension quatre*. Note (*) de **John Douglas Moore** ⁽¹⁾ et **Jean-Marie Morvan**, présentée par M. André Lichnerowicz.

On démontre le théorème suivant : Si M est une variété riemannienne de dimension $n \geq 4$ isométriquement immergée dans l'espace euclidien de dimension $n+p$, où $p \leq 4$ et $p \leq n-3$, alors M est (totalement) quasi-ombilicale si et seulement si M est conformément plate.

The following theorem is proven: If M is a Riemannian manifold of dimension $n \geq 4$ isometrically immersed in Euclidean space of dimension $n+p$, where $p \leq 4$ and $p \leq n-3$, then M is (totally) quasi-umbilic if and only if M is conformally flat.

1. INTRODUCTION. — Il est bien connu que les seules variétés (localement) conformément plates, simplement connexes, et compactes sont les sphères ⁽²⁾. Cependant, il existe de nombreuses variétés conformément plates et compactes qui ne sont pas simplement connexes et qui peuvent être isométriquement immergées dans un espace euclidien de faible codimension. En effet, d'après Kulkarni ⁽³⁾ et Nishikawa ⁽⁴⁾, on peut construire des hypersurfaces M^n conformément plates dans E^{n+1} , $n \geq 4$, qui sont homéomorphes au bord d'un voisinage tubulaire de rayon ε (avec ε suffisamment petit) d'un 1-sous-complexe arbitraire de E^{n+1} . Au voisinage d'un sommet, une telle sous-variété est obtenue par recollement d'une sphère centrée à ce sommet avec des hypersurfaces de révolution et des tubes autour des 1-simplexes qui aboutissent au sommet.

De la même manière, on peut construire une sous-variété conformément plate de codimension deux homéomorphe au bord d'un 1-sous-complexe arbitraire d'une hypersurface conformément plate. Itérant cette construction, on obtient des sous-variétés conformément plates de codimension arbitraire ayant des topologies plus compliquées. On peut montrer que les sous-variétés obtenues par cette construction sont quasi-ombilicales au sens suivant :

DÉFINITION. — Une sous-variété M^n d'une variété riemannienne N^{n+p} est dite *quasi-ombilicale* si, en chaque point m de M^n , il existe un repère orthonormé $(\xi_1, \dots, \xi_p)$ de l'espace normal $T_m^\perp M$ tel que la seconde forme fondamentale

$$\alpha : T_m M \times T_m M \rightarrow T_m^\perp M,$$

satisfasse la condition : $\langle \alpha, \xi_j \rangle$ a une valeur propre de multiplicité supérieure ou égale à $n-1$, pour tout j , $1 \leq j \leq p$.

Remarques. — (i) Certains auteurs utilisent le terme « totalement quasi-ombilicale » à la place de « quasi-ombilicale ».

(ii) En utilisant le tenseur de Weyl, on montre sans difficulté que toute sous-variété quasi-ombilicale M^n , $n \geq 4$, d'un espace euclidien est conformément plate [cf. chapitre 5 de ⁽⁵⁾].

(iii) Il est clair que la composition de deux immersions isométriques quasi-ombilicales est quasi-ombilicale.

D'après un théorème de Cartan ⁽⁶⁾, toute hypersurface conformément plate d'un espace euclidien est quasi-ombilicale. Nous nous proposons de généraliser ce théorème.

2. THÉORÈME. — Soit M^n une variété riemannienne de dimension $n \geq 4$ isométriquement immergée dans l'espace euclidien E^{n+p} de dimension $n+p$, où $p \leq 4$ et $p \leq n-3$. Alors M^n est quasi-ombilicale si et seulement si M^n est conformément plate.

Plusieurs auteurs ont étudié la quasi-ombilicalité, et ce théorème montre l'importance de leurs travaux. On peut regarder ce théorème comme une étape vers la classification des sous-variétés conformément plates de faible codimension.

3. *ESQUISSE DE DÉMONSTRATION.* — Grâce à la remarque (ii) il nous suffit de montrer que : M^n conformément plate $\Rightarrow M^n$ quasi-ombilicale. Supposons donc que M^n est conformément plate. Le tenseur de courbure R de M^n a pour expression

$$R(X, Y, Z, W) = \psi(X, Z)\langle Y, W \rangle - \psi(X, W)\langle Y, Z \rangle \\ + \psi(Y, W)\langle X, Z \rangle - \psi(Y, Z)\langle X, W \rangle,$$

avec

$$\psi(X, Y) = \frac{1}{n-2} \text{Ric}(X, Y) - \frac{r}{2(n-1)(n-2)} \langle X, Y \rangle,$$

où Ric désigne le tenseur de Ricci et r la courbure scalaire. On en déduit immédiatement que si X et Y sont deux vecteurs orthonormés, la courbure sectionnelle $K(X, Y)$ du plan engendré par X et Y vérifie la relation

$$(1) \quad K(X, Y) = \psi(X, X) + \psi(Y, Y).$$

Nous utiliserons le résultat suivant de (7) (p. 96) :

PROPOSITION. — Soit M^n une sous-variété conformément plate de E^{n+p} , $p \leq n-3$. Alors, en tout point m de M^n il existe un repère orthonormé $(e_1, \dots, e_n)$ de l'espace tangent $T_m M$ tel que la matrice de la seconde forme fondamentale dans cette base ait pour expression

$$(\alpha(e_i, e_j)) = \left[\begin{array}{c|ccc} A & & & 0 \\ \hline & \lambda \xi & \dots & 0 \\ & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \xi \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c|ccc} A & & & 0 \\ \hline & \lambda \xi & \dots & 0 \\ & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \xi \end{array}} \right\} \begin{array}{l} p \\ n-p \end{array}$$

où A est une matrice $p \times p$ de vecteurs normaux, ξ un vecteur normal unitaire particulier, et λ un réel.

Considérons alors la forme bilinéaire symétrique

$$\beta : T_m M \times T_m M \rightarrow T_m^\perp M \text{ définie par } \beta(X, Y) = \alpha(X, Y) - \lambda \langle X, Y \rangle \xi.$$

LEMME. — β est plate, c'est-à-dire

$$\langle \beta(X, Z), \beta(Y, W) \rangle - \langle \beta(X, W), \beta(Y, Z) \rangle = 0, \quad \forall X, Y, Z, W \in T_m M.$$

Démonstration du lemme. — Soit $V \subset T_m M$ le sous-espace engendré par $e_1, \dots, e_p$ et $V^\perp$ le sous-espace engendré par $e_{p+1}, \dots, e_n$. On déduit de la proposition précédente, des équations de Gauss, et de (1) que

$$\psi(X, Y) = \frac{1}{2} \lambda^2 \langle X, Y \rangle, \quad \forall X \in T_m M, \quad Y \in V^\perp.$$

Par conséquent, la relation

$$(2) \quad \psi(X, Y) - \lambda \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle + \frac{1}{2} \lambda^2 \langle X, Y \rangle = 0,$$

est vraie pour tous vecteurs $X \in T_m M$, $Y \in V^\perp$. Donc pour tous vecteurs unitaires $X \in V$, $Y \in V^\perp$, on a

$$K(X, Y) = \begin{cases} \langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle = \lambda \langle \alpha(X, X), \xi \rangle, \\ \psi(X, X) + \psi(Y, Y) = \psi(X, X) + \frac{1}{2} \lambda^2, \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$\psi(X, X) - \lambda \langle \alpha(X, X), \xi \rangle + \frac{1}{2} \lambda^2 \langle X, X \rangle = 0, \quad \forall X \in V.$$

Ainsi la relation (2) reste vraie pour tous $X, Y \in T_m M$. Par conséquent, si X, Y sont orthonormés, on a

$$\begin{aligned} \langle \beta(X, X), \beta(Y, Y) \rangle - \langle \beta(X, Y), \beta(X, Y) \rangle \\ = \psi(X, X) + \psi(Y, Y) - \lambda \langle \alpha(X, X), \xi \rangle - \lambda \langle \alpha(Y, Y), \xi \rangle + \lambda^2 = 0, \end{aligned}$$

et le lemme en découle immédiatement.

Ce lemme nous permet d'utiliser la théorie des formes extérieurement orthogonales de Cartan ⁽⁸⁾. Soit

$$N_m(\beta) = \{ X \in T_m M : \beta(X, Y) = 0, \forall Y \in T_m M \}.$$

Si $\dim N_m(\beta) = n - p$, en appliquant le théorème de la section 20 de ⁽⁸⁾, on déduit qu'il existe un repère orthonormé $(\xi_1, \dots, \xi_p)$ de l'espace normal tel que $\langle \beta, \xi_j \rangle$ ait rang 1, $1 \leq j \leq p$. Si $\dim N_m(\beta) > n - p$, alors β dépend au plus de trois variables, et donc on peut appliquer le théorème de la section 21 de ⁽⁸⁾; on obtient la même conclusion. Dans les deux cas, il est clair que $\langle \alpha, \xi_j \rangle$ a une valeur propre de multiplicité $\geq n - 1$, $1 \leq j \leq p$, et donc M^n est quasi-ombilicale. Le théorème est démontré.

(*) Séance du 11 septembre 1978.

⁽¹⁾ Soutenu par NSF MCS 77-01843.

⁽²⁾ N. H. KUIPER, *Ann. Math.*, 50, 1949, p. 916-924.

⁽³⁾ R. S. KULKARNI, *Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A.*, 69, 1972, p. 2675-2676.

⁽⁴⁾ S. NISHIKAWA, *Tôhoku Math. J.*, 26, 1974, p. 563-572.

⁽⁵⁾ B. Y. CHEN, *Geometry of Submanifolds*, Marcel Dekker, New York, 1973.

⁽⁶⁾ É. CARTAN, *Bull. Soc. math. Fr.*, 45, 1917, p. 57-121.

⁽⁷⁾ J. D. MOORE, *Math. Ann.*, 225, 1977, p. 89-97.

⁽⁸⁾ É. CARTAN, *Bull. Soc. math. Fr.*, 47, 1919, p. 125-160.

J. D. M. : *Department of Mathematics,*
University of California, Santa Barbara, California, 93106, U.S.A.

J.-M. M. : *U.E.R. de Mathématiques, Faculté des Sciences,*
Université de Limoges, 123, rue Albert-Thomas, 81700 Limoges.