GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Quelques relations entre la topologie d'une sous-variété et ses courbures externes.* Note (*) de **Jean-Marie Morvan,** présentée par M. André Lichnerowicz.

On se propose d'étudier certaines relations entre les classes caractéristiques d'une sous-variété d'un espace euclidien, ses espaces normaux principaux et ses courbures externes.

One studies some relations between the characteristic classes of a submanifold M^n *of the Euclidean space* $\mathbf{E}^{n+k}$, *its principal normal spaces and its external curvatures.*

NOTATIONS. — Soit (M^n, g) une variété riemannienne de dimension n. TM^n désigne l'espace tangent à M^n, ∇ la connexion de Levi-Civita associée à la métrique g.

Soit $i: M^n \mapsto \mathbf{E}^{n+k}$ une immersion isométrique de M^n dans l'espace euclidien de dimension $n+k$, On note ∇' la connexion triviale sur $\mathbf{E}^{n+k}$ et $\langle\, ,\rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbf{E}^{n+k}$.

$T^\perp M^n$ désigne le fibré normal de M^n et $\nabla^\perp$ la connexion riemannienne induite par ∇' sur $T^\perp M^n$. On note H la seconde forme fondamentale définie par l'équation

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + H(X, Y), \qquad \forall X, Y \in TM^n.$$

Conformément aux définitions données dans [(1), (2) et (3)] on note E_{j_p} le j-ième espace normal principal associé à l'immersion i au-dessus du point p, et $k^{(i)}_{j_p}$ la j-ième courbure externe de M^n au point p, associée à l'immersion i (rappelons que $E_{1_p} = [\operatorname{Im} H_p]$ = (l'espace vectoriel engendré par $\operatorname{Im} H_p$), et $k^{(i)}_{1_p} = \sup\limits_{\substack{\|X\|=1\\ \|Y\|=1}} \|H(X, Y)_p\|$).

D'autre part en vue d'étudier certaines classes caractéristiques de TM^n et $T^\perp M^n$, on note $H^j(\xi, G)$ le j-ième groupe de cohomologie singulière d'un fibré vectoriel ξ de base M^n, à coefficient dans G, et $H^j(M^n, G)$ le j-ième groupe de cohomologie singulière de M^n à coefficient dans G.

$\omega_j(\xi) \in H^j(M^n, \mathbf{Z}/2)$ $(j = 0, 1 \ldots n)$ désignent les classes de Stiefel-Whitney de ξ. Si $\omega(\xi) = 1 + \omega_1 + \ldots + \omega_n(\xi)$, est la classe totale de Stiefel-Whitney, on note $\bar\omega(\xi) = 1 + \bar\omega_1(\xi) + \ldots + \bar\omega_n(\xi)$ l'inverse de $\omega(\xi)$. Enfin, si ξ est orienté et si ses fibres sont de dimension $2k$, $e(\xi) \in H^{2k}(M^n, \mathbf{Z})$ désigne la classe d'Euler de ξ.

1. Relation entre la classe d'Euler d'une sous-variété riemannienne de l'espace euclidien et le 1er espace normal principal.

THÉORÈME 1. — *Soit* $i: M^n \to \mathbf{E}^{n+2k}$ *une immersion isométrique d'une variété riemannienne orientée* M^n *dans l'espace euclidien* $\mathbf{E}^{n+2k}$, *qui vérifie la condition*

$$\text{« } \forall p \in M^n,\ E_{1_p} \neq T^\perp M^n_p \text{ »}$$

(*cette condition est en particulier vérifiée si* $k^{(i)}_{2_p} \neq 0$).

Alors $\bar\omega_{2k}(TM^n) = 0$.

Comparer avec [(5), p. 120].

Exemple d'application de ce théorème :

Soit $\mathbf{P}^{2p}$ l'espace projectif réel de dimension $2p$, et S^{2q+1} la sphère de dimension $2q+1$.

Puisque $\omega(S^{2q+1})=1$, $\omega(\mathbf{P}^{2p}\times S^{2q+1})=\omega(\mathbf{P}^{2p})$. Par conséquent, si $\bar{\omega}_{2k}(\mathbf{P}^{2p})\neq 0$, alors toute immersion de $\mathbf{P}^{2p}\times S^{2q+1}$ dans $\mathbf{E}^{2(p+q+k)+1}$ est telle que $E_1=T^{\perp}(\mathbf{P}^{2p}\times S^{2q+1})$ sur un ouvert.

Esquisse de la démonstration du théorème 1. — Soit $\Pi : T^{\perp} M^n \to M^n$ la projection canonique du fibré normal et $\Pi^* : H^{2k}(M^n, \mathbf{Z}) \to H^{2k}(TM^n, \mathbf{Z})$ l'isomorphisme canonique induit par Π sur les $2k$-ième groupe de cohomologie.

Si $(a_1 \ldots a_{n+2k})$ est un repère local au-dessus de M, tel que

$$a_1 \ldots a_n \in TM^n, \qquad a_{n+1} \ldots a_{n+2k} \in T^{\perp} M^n,$$

on note $\alpha_i^s = \langle \nabla' a_s, a_i \rangle$, et $\Omega_t^s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^s \wedge \alpha_t^i$ ou $i \in \{1 \ldots n\}$, s, $t \in \{n+1 \ldots n+2k\}$ respectivement, les formes de connexions sur le fibré normal et les deux formes de courbures du fibré normal.

Alors la classe d'Euler du fibré normal, $e(T^{\perp} M^n)$, est représentée par la $2k$-forme fermée sur M, γ, définie par [*cf.* ([3])] :

$$\Pi^*(\gamma) = \frac{(-1)^k}{2^{2k} \pi^k k\,!} \sum \varepsilon_{s_1 \ldots s_{2k}} \Omega_{s_2}^{s_1} \wedge \ldots \wedge \Omega_{s_{2k}}^{s_{2k-1}}.$$

Si E_1 ($=\operatorname{Im} H$) est différent de $T^{\perp} M^n$ en tout point, on peut choisir a_{n+2k} dans $E_1^{\perp}$.

De cette façon, on voit facilement que chaque terme $\Omega_{s_2}^{s_1} \wedge \ldots \wedge \Omega_{s_{2k}}^{s_{2k-1}}=0$ puisque $\alpha_i^{n+2k}(X) = \langle H(X, a_i), a_{n+2k} \rangle = 0$.

Par suite $\Pi^*(\gamma)=0$. Π^* étant un isomorphisme, on en déduit $\gamma=0$. Il s'en suit $e(T^{\perp} M^n)=0$. Utilisons alors l'homomorphisme canonique $h : H^{2k}(M^n, \mathbf{Z}) \to H^{2k}(M^n, \mathbf{Z}/2)$. On sait [*cf.* ([5]) par exemple] que h envoie $e(T^{\perp} M^n)$ sur $\omega_{2k}(T^{\perp} M^n)$. On en déduit $\omega_{2k}(T^{\perp} M^n)=0$. Le théorème de dualité de Whitney [*cf.* ([5]) par exemple] permet alors de conclure $\omega_{2k}(T^{\perp} M^n) = \bar{\omega}_{2k}(TM^n) = 0$.

2. Relation entre la caractéristique normale d'une immersion et la première courbure externe.

Théorème 2. — *Soit $i : M^n \to \mathbf{E}^{2n}$ une immersion isométrique d'une variété riemannienne compacte orientée de dimension paire n, dans l'espace Euclidien $\mathbf{E}^{2n}$. Alors la caractéristique normale de l'immersion i (c'est-à-dire la caractéristique d'Euler du fibré normal), $\chi(T^{\perp} M^n)$ satisfait la relation*

$$|\chi(T^{\perp} M^n)| < \frac{n^{n/2}\, n\,!}{2^n \pi^{n/2}\, n/2\,!} \int_{M^n} k_1^{(i)^n}\, dv.$$

De plus, si $E_1 \neq T^{\perp} M^n$ en tout point (en particulier si $k_2^{(i)} \neq 0$ en tout point), alors $\chi(T^{\perp} M^n)=0$.

Esquisse de démonstration du théorème 2. — Considérons $(a_1 \ldots a_{2n})$ un repère local au-dessus de M^n, tel que $(a_1 \ldots a_n)$ soit tangent à M^n, et $(a_{n+1} \ldots a_{2n})$ soit normal à M^n. Avec les mêmes notations qu'au paragraphe précédent, on a

$$\chi(T^{\perp} M^n) = \frac{(-1)^{n/2}}{2^n \pi^{n/2} (n/2)\,!} \int_{M^n} \varepsilon_{s_1 \ldots s_n} \Omega_{s_2}^{s_1} \wedge \ldots \wedge \Omega_{s_n}^{s_{n-1}}.$$

Donnons une majoration de $\chi(T^{\perp} M^n)$:

$$\alpha_i^s(X) = \langle \nabla'_X a_i, a_s \rangle = \langle H(X, a_i), a_s \rangle, \qquad \forall a_s \in T^{\perp} M^n, \quad \forall a_i \in TM^n.$$

Par conséquent, $\|\alpha_i^s\| \leqq k_1^{(i)}$. Par suite, $\|\Omega_t^s\| \leqq n k_1^{(i)2}$ et

$$(*) \qquad |\chi(\mathrm{T}^\perp \mathrm{M}^n)| \leqq \frac{n^{n/2}\, n!}{2^n \pi^{n/2} (n/2)\,!} \int_{\mathrm{M}^n} k_1^{(i)^n}\, dv.$$

L'inégalité précédente est stricte. En effet, si $\chi(\mathrm{T}^\perp \mathrm{M}^n)$ est nulle (*) est une égalité si et seulement si $k_1^{(i)} \equiv 0$ ce qui est impossible puisque M^n est compacte. Si $\chi(\mathrm{T}^\perp \mathrm{M}^n) \neq 0$, l'égalité a lieu si chaque terme de la forme $\Omega_{s_2}^{s_1} \wedge \ldots \wedge \Omega_{s_n}^{s_{n-1}}$ a une norme maximale, quelle que soit la base locale $(a_1 \ldots a_{2n})$ choisie. On va montrer que ceci est impossible.

Soit $p \in \mathrm{M}$ un point quelconque. Soit $(a_{n+1} \ldots a_{2n})$ une base locale, au voisinage de p, du fibré normal, et $(a_1 \ldots a_n)$ une base locale du fibré tangent qui diagonalise $\langle \mathrm{H}(.,..), a_{2n} \rangle$ (*) est une égalité si chaque terme $\Omega_{s_2}^{s_1} \wedge \ldots \wedge \Omega_{s_n}^{s_{n-1}}$ a une norme maximale. Ceci implique que

$$\|\alpha_i^s\| = k_1^{(i)}, \quad \forall i \in \{1 \ldots n\} \qquad \text{et} \qquad s \in \{n+1, \ldots 2n\},$$

et que chaque n-uplet $\{\alpha_{i_1}^{s_1}, \alpha_{s_2}^{i_1}, \ldots, \alpha_{i_{n-1}}^{s_{n-1}}, \alpha_{s_n}^{i_{n-1}}\}$ est formé de formes deux à deux orthogonales, $\forall i_1 \ldots i_n \in \{1 \ldots n\}$ et $s_1 \ldots s_n \in \{n+1 \ldots 2n\}$. On en déduit aisément $\alpha_{2n}^j(a_j) = \pm k_1^{(i)}$ et $\alpha_{n+i}^j(a_j) = 0$, $\forall i \in \{1 \ldots n-1\}$. Le vecteur de courbure moyenne h associé à i a donc pour expression $h = q k_1^{(i)} a_{2n}$ ou $q \in \mathbf{Z}$. a_{2n} étant quelconque, on en déduit que q est nul, et par conséquent, M^n est minimale ce qui est impossible puisque M^n est compacte.

Application : nombre de Self-Intersections d'une sous-variété. — Soit $\mathrm{I}(i, i) = \{(m, m'),\ m \neq m' \in \mathrm{M}^n$, tels que $i(m) = i(m')\}$ l'ensemble des points d'intersection non triviales de $i(\mathrm{M}^n)$ avec lui-même. On peut supposer que $\mathrm{I}(i, i)$ est fini [*cf.* par exemple ([4])].

D'après un théorème de Whitney, Lashof et Smale ([4]) et un théorème de Whitney ([6]), on en déduit les deux corollaires suivants ([7]) :

COROLLAIRE 1. — *Soit M^n une variété riemannienne compacte orientée de dimension paire n, et $i : \mathrm{M}^n \to \mathbf{E}^{2n}$ une immersion isométrique. On a*

$$[\mathrm{I}(i, i)] < \frac{n^{n/2}\, n\,!}{2^{n+1} \pi^{n/2} (n/2)\,!} \int_{\mathrm{M}^n} k_1^{(i)^n}\, dv.$$

De plus, si $\mathrm{E}_1 \neq \mathrm{T}^\perp \mathrm{M}^n$ en tout point, (en particulier si $k_2^{(i)} \neq 0$ en tout point), $[\mathrm{I}(i, i)] = 0$.

COROLLAIRE 2. — *Soit M^n une variété compacte orientée paire $\forall \mathrm{A} \in \mathbf{N}$, il existe une immersion $f : \mathrm{M}^n \to \mathbf{E}^{2n}$ telle que $\int_{\mathrm{M}^n} k_1^{(f)^n}\, dv > \mathrm{A}$, où $k_1^{(f)}$ est la première courbure externe associée à la connexion induite par la connexion triviale sur $\mathbf{E}^{2n}$.*

(*) Séance du 2 mai 1978.

([1]) J. GRIFONE et J. M. MORVAN, *Comptes rendus*, 284, série A, 1977, p. 67.

([2]) J. GRIFONE et J. M. MORVAN, *Comptes rendus*, 285, série A, 1977, p. 132.

([3]) KOBAYASKI et NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry* (*Interscience Tracts in Pure and applied Mathematics*, 2).

([4]) R. H. LASHOF et S. SMALE, *Ann. Math.*, 68, 1958, p. 562-583.

([5]) J. W. MILNOR et J. D. STASHEFF, *Characterist Classes-Annals of Mathematics studies*, Princeton University Press.

([6]) H. WHITNEY, *Ann. Math.*, 45, 1944, p. 220-246.

([7]) On note $[\mathrm{I}(i, i)]$ la valeur absolue de la somme des indices de $\mathrm{I}(i, i)$.

Laboratoire d'Analyse et Géométrie, U.E.R. de Mathématiques, Université Paul-Sabatier, 118, *route de Narbonne*, 31077 *Toulouse Cedex*.