GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Sur les sous-variétés à torsion interne et externe constante.* Note (*) de **Joseph Grifone** et **Jean-Marie Morvan**, présentée par M. André Lichnerowicz.

On applique les définitions et les résultats d'une note précédente (²) pour obtenir une description des sous-variétés dont l'une des courbures externes et la torsion interne sont constantes, dans le cas où le premier espace normal est de dimension 2.

We apply the definitions and the results of a previous note (2) to obtain a description of submanifolds of which one of the external curvatures and the internal torsion are constant, when the first normal space is of dimension 2.

Les notations sont celles de (¹) et (²).

PROPOSITION 1. — *Soit* M′ *une variété riemannienne à courbure constante de dimension* $n+p$ ($n \geqq 3$) *et* M *une sous-variété isométrique de dimension* n, *telle que :*

(i) $\dim E_1 = 2$ *en tout point;*

(ii) *tout point est s-régulier* ($s \geqq 2$)*;*

(iii) $\theta^{(M)} \neq -\infty$ *en tout point.*

Soit (ξ, η) *la base de* E_1 [*définie dans le théorème de* (²)] *et* $H = h \otimes \xi + k \otimes \eta$ *la seconde forme fondamentale. Alors :*

(1) *Il existe* s 1-*formes scalaires* $\tau_2 \ldots \tau_s$, θ *sur* M, *partout non nulles, globales au signe près, proportionnelles entre elles telles que*

$$d\tau_i = 0, \qquad \|\tau_i\| = k_i^{(M)} \quad (i \geqq 2) \qquad \text{et} \qquad \|\theta\| = \theta^{(M)}.$$

(2) *Il existe* $s-1$ *sections normales, orthonormées, globales au signe près* $A_2 \ldots A_s$ *telles que*

$$E_2 = [A_2] \ldots E_s = [A_s],$$

$$\nabla_X^\perp \xi = -\theta(X)\eta + \tau_2(X) A_2, \qquad \nabla_X^\perp \eta = \theta(X)\xi,$$

$$\nabla_X^\perp A_2 = -\tau_2(X)\xi + \tau_3(X) A_3,$$

$$\nabla_X^\perp A_3 = -\tau_3(X) A_2 + \tau_4(X) A_4,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\nabla_X^\perp A_{s-1} = -\tau_{s-1}(X) A_{s-2} + \tau_s(X) A_s.$$

(3) $h(X, Y) = \beta \langle X, T \rangle \langle Y, T \rangle$ *où* $\beta = h(T, T)$ *et* T *est le champ de vecteurs sur* M *associé, par la métrique, à* $\tau_2/\|\tau_2\|$.

(4) $d\theta = \beta(k(X, T)\langle Y, T \rangle - k(Y, T)\langle X, T \rangle)$.

(5) *La distribution sur* M *définie par l'orthogonal de* T *est involutive.*

Toutes ces propriétés sont conséquences des équations de Gauss-Codazzi et se démontrent d'une manière analogue à celle de ([1]).

PROPOSITION 2. — *Sous les mêmes hypothèses que la proposition* 1, *si de plus il existe* $i \in \{2 \dots s\}$ *tel que* $k_i^{(M)} = \mathrm{Cte} \neq 0$ *et* $\theta^{(M)} = \mathrm{Cte}$, *alors* ;

(1) $d\theta = 0$;

(2) $k(X, T) = k(T, T) \langle X, T \rangle$;

(3) $\theta^{(M)} k(X, Y) = \theta^{(M)} k(T, T) \langle X, T \rangle \langle Y, T \rangle + \beta \langle \nabla_X T, Y \rangle$;

(4) $\nabla_T T = 0$.

Démonstration. — (1) et (2) sont immédiats.

(3) A l'aide des équations de Gauss-Codazzi on montre d'abord que

$$(\bigstar) \qquad d(\beta\pi)(X, Y)\langle Z, T\rangle + m(X, Z)\langle Y, T\rangle - m(Y, Z)\langle X, T\rangle = 0,$$

où

$$\pi = \frac{\tau_i}{\|\tau_i\|} \quad \text{et} \quad m(X, Z) = -\theta^{(M)} k(X, Z) + \beta\langle \nabla_X T, Z\rangle.$$

En faisant $Z = T$, on trouve, compte tenu du fait que $k(X, T) = k(T, T) \langle X, T \rangle$: $d\beta\pi = 0$. En reportant dans ($\bigstar$) on obtient facilement

$$m(X, Y) = m(T, T)\langle X, T\rangle\langle Y, T\rangle,$$

c'est-à-dire (3).

(4) s'obtient de (3) en faisant $X = T$.

THÉORÈME. — *Soit* M' *une variété riemannienne à courbure constante* c, *de dimension* $n+p$ ($n \geqq 3$) *et* M *une sous-variété isométrique de dimension* n, *telle que :*

(i) $\dim E_1 = 2$ *en tout point;*

(ii) *Tout point de* M *est bi-régulier;*

(iii) *La torsion interne* $\theta^{(M)}$ *de* M *est constante.*

(A) *Si* $\theta^{(M)} = 0$ *et :*

— *il existe* $i \in \{2 \dots p\}$ *tel que* $k_i^{(M)} = \mathrm{Cte} \neq 0$;

— M *est complète, connexe, simplement connexe.*

Alors $M = C \times M_1$ *où* C *est une courbe et* M_1 *une sous-variété de distorsion* 1.

De plus :

— *si* $M' = R^{n+p}(0) = \mathbf{R}^{n+p}$, *les courbures* $k_i^{(M)}$ *coïncident avec les courbures de Frenet de* C *pour* $i \geqq 2$;

— *si* $M' = R^{n+p}(c)$ *avec* $c \neq 0$, *la sous-variété* M_1 *est contenue dans une hypersphère* [*au sens de* ([3])].

(B) *Si* $\theta^{(M)} = \mathrm{Cte} \neq 0$ *et il existe* $i \in \{2 \dots p\}$ *tel que* $k_i^{(M)} = \mathrm{Cte} \neq 0$ *alors* M *est feuilletée par des sous-variétés* M_2 *de dimension* $n-1$, *de distorsion* 1.

En particulier si $M' = R^{n+p}(c)$ *avec* $c \neq 0$ *les sous-variétés* M_2 *sont contenues dans des hypersphères.*

(C) *Si* $\theta^{(M)} = -\infty$ M *est feuilletée par des sous-variétés de dimension* $n-2$ *totalement géodésiques dans* M'.

Indications sur la démonstration. — (A) De la proposition 2, (3) en faisant $\theta^{(M)} = 0$ on obtient $\beta \langle \nabla_X T, Y \rangle = 0$. Puisque $\dim E_1 = 2$ on a $\beta \neq 0$ et par conséquent T est parallèle. Donc $M = C \times M_1$ où C et M_1 sont les sous-variétés intégrales maximales de T et $T^\perp$ passant par un certain point de M.

Un calcul direct permet de voir que la distorsion de M_1 est 1.

Puisque T est parallèle on a $R(X, T)T = 0$, $\forall X \in TM$. En écrivant les équations de Gauss-Codazzi on obtient :

$$c(\langle X, Y \rangle - \langle X, T \rangle \langle Y, T \rangle) = k(T, T)[k(X, Y) - k(T, T) \langle X, T \rangle \langle Y, T \rangle].$$

Si $c \neq 0$ on a en tout point

$$k(T, T) \neq 0 \qquad \text{d'ou} \quad k(X, Y) = \frac{c}{k(T, T)} \langle X, Y \rangle$$

pour $X, Y \perp T$. Donc si $c \neq 0$, M_1 est totalement ombilicale et par conséquent contenue dans une hypersphère.

Si $c = 0$ on a $k(T, T) = 0$ en tout point, car s'il existait $x \in M$ tel que $k(T, T)_x \neq 0$ on aurait $k(X, Y) = k(T, T) \langle X, T \rangle \langle Y, T \rangle$ en x et donc $\dim (E_1)_x = 1$ [*cf.* proposition 1 et 3].

Enfin un calcul direct montre que $k_i^{(M)} = k_i^{(C)}$ pour $i \geqq 2$.

(B) En utilisant (3) de la proposition (2) et (5) de la proposition (1), on voit que si M_2 est une sous-variété intégrale de la distribution définie par $T^\perp$ on a

$$H^{(M_2)}(X, Y) = \langle \nabla_X T, Y \rangle \left(\frac{\beta}{\theta^{(M)}} \eta - T \right) \qquad (\text{pour } X, Y \perp T)$$

et

$$\nabla_X^\perp \left(\frac{\beta}{\theta^{(M)}} \eta - T \right) = 0 \qquad \text{car} \quad X.\beta = 0, \qquad \forall X \perp T.$$

Donc la distorsion de M_2 est 1.

Si $M' = R^{n+p}(c)$ avec $c \neq 0$ on vérifie à l'aide des équations de Gauss-Codazzi que

$$c(\langle X, T \rangle - X) = \lambda \nabla_X T \qquad \text{ou} \quad \lambda = -\frac{\theta^{(M)}}{\beta} k(T, T) + \frac{T.\beta}{\beta} + k(T, T) \frac{\beta}{\theta^{(M)}}.$$

Puisque $c \neq 0$ en $\lambda \neq 0$ en tout point. En remplaçant $\nabla_X T$ obtenu de cette expression dans (2) de la proposition 2, on trouve

$$k(X, Y) = \lambda_1 \langle X, T \rangle \langle Y, T \rangle + \lambda_2 \langle X, Y \rangle,$$

où λ_1 et λ_2 sont des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur M. Compte tenu de (3) de la proposition 1, on voit que η est une section quasi ombilicale et donc les sous-variétés M_2 sont contenues dans des hypersphères.

(C) Résulte du théorème de (2) et du fait bien connu suivant (4) :

Soit M′ *une sous-variété isométrique de* M′ *et* U *un ouvert de* M *sur lequel l'indice de nullité relative est égal à p. Alors pour tout point* $x \in$ M *il passe une sous-variété totalement géodésique de dimension p.*

(*) Séance du 23 mai 1977.

(1) J. Grifone et J. M. Morvan, *Comptes rendus*, t. 283, série A, 1976, p. 207.
(2) J. Grifone et J. M. Morvan, *Comptes rendus*, t. 284, série A, 1977, p. 67.
(3) B. Y. Chen, *Geometry of Submanifolds*, New York, Marcel Dekker 1973.
(4) S. Alexander, *J. Diff. Geom.* 3, 1969, p. 69-82.

Laboratoire d'Analyse et Géométrie,
U.E.R. de Mathématiques,
118, *route de Narbonne,*
31077 *Toulouse Cedex.*