

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Sur la transversalité de deux champs de plans lagrangiens.* Note (*) de **Jean-Marie Morvan**, présentée par André Lichnerowicz.

Nous définissons une classe de cohomologie réelle d'ordre 5 sur la base d'un fibré symplectique muni de deux champs de plans lagrangiens. Cette classe est nulle si les champs sont transverses. Nous donnons une interprétation riemannienne de cette classe et montrons qu'elle est, en général, non nulle.

DIFFERENTIAL GEOMETRY. — On Transversality of Two Lagrangian Plane Fields.

We define a 5-cohomology class on the base of a symplectic bundle endowed with two Lagrangian plane fields. This class is zero if the two fields are transverse. We give a Riemannian interpretation of this class and prove that, in general, the class is not trivial.

La classe de Maslov, définie sur un fibré symplectique muni de deux champs de plans lagrangiens, est une obstruction à leur transversalité. Cette classe peut cependant être nulle bien que les champs de plans ne soient pas transverses (il suffit, par exemple, que la base du fibré soit simplement connexe). Le présent travail consiste à définir une famille de classes qui sont une obstruction à la transversalité de deux champs de plans lagrangiens. Nous étudions en détail la « plus simple », en termes riemanniens, comme nous l'avons déjà fait pour la classe de Maslov [3]. (Comparer avec [4]).

Une lettre du Pr. Nagano à l'auteur a été décisive pour l'élaboration de cette Note.

1. GÉNÉRALITÉS. — (i) Soit E un espace vectoriel symplectique (c'est-à-dire muni d'une deux-forme non dégénérée Ω), de dimension $2n$. Un plan L est lagrangien s'il est de dimension n et s'il vérifie $\Omega(X, Y) = 0, \forall X, Y \in L$. On appelle grassmannienne lagrangienne (resp. grassmannienne lagrangienne orientée), l'espace des n plans lagrangiens (resp. lagrangiens orientés) de E . On note $\mathcal{L}(E)$ [resp. $\mathcal{L}_0(E)$] cet espace. La donnée d'un plan lagrangien (resp. lagrangien orienté) L , et d'une structure complexe de métrique g et de tenseur de structure complexe J ($J^2 = -\text{Id}$) adaptée à Ω (c'est-à-dire telle que $\Omega(X, Y) = g(X, JY), \forall X, Y \in L$), permet de définir un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E)$ et l'espace symétrique $U(n)/O(n)$ quotient du groupe des matrices unitaires par le groupe des matrices orthogonales et entre $\mathcal{L}_0(E)$ et $U(n)/SO(n)$, où $SO(n)$ désigne le groupe spécial orthogonal. D'autre part, puisque deux structures hermitiennes compatibles avec Ω se déduisent l'une de l'autre par déformation, l'isomorphisme précédent induit un isomorphisme canonique entre l'homologie et la cohomologie de $\mathcal{L}(E)$ [resp. $\mathcal{L}_0(E)$] et celles de $U(n)/O(n)$ [resp. $U(n)/SO(n)$] [2].

(ii) Rappelons également que l'ensemble des plans lagrangiens (orientés) transverses à un plan lagrangien fixe est contractile dans $\mathcal{L}(E)$ ($\mathcal{L}_0(E)$) [2].

Un fibré vectoriel (E, Π, B) de base B est dit symplectique s'il est muni d'un deux-tenseur Ω tel que, en tout point $p \in B$, Ω_p soit une forme symplectique sur la fibre E_p . Une variété est dite symplectique si elle est munie d'une deux-forme fermée non dégénérée. On appelle fibré des n -plans lagrangiens (resp. orientés), associé à (E, Π, B) , le fibré de base B dont la fibre au point $p \in B$ est la grassmannienne lagrangienne (resp. orientée) $\mathcal{L}(E_p)$ [resp. $\mathcal{L}_0(E_p)$]. On note $(\mathcal{L}(E), \bar{\Pi}, B)$ [resp. $(\mathcal{L}_0(E), \bar{\Pi}, B)$] ce fibré.

On a de façon claire une application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \xrightarrow{i} & U(n)/O(n) \\ \bar{\Pi} \downarrow & & \bar{\Pi} \downarrow \\ B & & B \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{L}_0(E) & \xrightarrow{i} & U(n)/SO(n) \\ \bar{\Pi} \downarrow & & \bar{\Pi} \downarrow \\ B & & B \end{array}$$

dès que l'on s'est donné un champ de plans lagrangiens (orientés) et une structure presque complexe adaptée.

2. L'ESPACE SYMÉTRIQUE $U(n)/SO(n)$. — (i) L'espace homogène $U(n)/SO(n)$ a une structure canonique d'espace symétrique de dimension réelle $n(n+1)/2$.

(ii) L'application « déterminant » définit une fibration de $U(n)/SO(n)$ sur S^1 . La fibre type est $SU(n)/SO(n)$, simplement connexe. On en déduit que le premier groupe de cohomologie entière de $U(n)/SO(n)$, $H^1(U(n)/SO(n), \mathbb{Z})$ est $\mathbb{Z}$.

(iii) Plus généralement, en cohomologie réelle, le polynôme de Poincaré $P(U(n)/SO(n), t)$ de $U(n)/SO(n)$ satisfait :

$$P(U(2n)/SO(2n), t) = (1+t^{2n})[(1+t)(1+t^5) \dots (1+t^{4n-3})]$$

$$P(U(2n+1)/SO(2n+1), t) = (1+t)(1+t^5) \dots (1+t^{4n-1}).$$

Ceci montre que dès que $n \geq 3$, le second espace de cohomologie réelle non nul est $H^5(U(n)/SO(n), \mathbb{R})$, qui est de dimension 1 [1].

3. ÉTUDE DU $H^5(U(n)/SO(n), \mathbb{R})$. — Notons $\mathcal{U}(n)/\mathcal{SO}(n)$ l'espace tangent à l'origine de $U(n)/SO(n)$. C'est le quotient de l'espace des matrices antihermitiennes de trace nulle par l'espace des matrices antisymétriques. On peut montrer le :

THÉORÈME. — Soit θ_5 la 5-forme invariante à gauche définie sur $U(n)/SO(n)$, $n \geq 3$, par :

$$\theta_5(X_1, \dots, X_5) = \frac{1}{i} \sum_{\varepsilon \in \mathcal{S}_5} \text{Sign}(\varepsilon) \text{Trace}(X_{\varepsilon_1} \dots X_{\varepsilon_5}),$$

$$\forall X_1, \dots, X_5 \in \mathcal{U}(n)/\mathcal{SO}(n).$$

Cette 5-forme est harmonique et non nulle. Sa classe de cohomologie réelle ω_5 engendre $H^5(U(n)/SO(n), \mathbb{R})$.

Esquisse de démonstration. — Elle se fait par étapes. Il est facile de voir que θ_5 est $U(n)$ -invariante et donc harmonique. D'autre part, si $E_1, \dots, E_5$ est la base canonique de $\mathcal{SU}(3)/\mathcal{SO}(3)$, plongée dans $\mathcal{U}(3)/\mathcal{SO}(3)$, un long calcul matriciel montre que $\theta_5(E_1, \dots, E_5) \neq 0$. L'auteur a utilisé les résultats d'un programme informatique rédigé par Y. Kergall.

4. TRANSVERSALITÉ DE DEUX CHAMPS DE PLANS LAGRANGIENS. LA CLASSE m_5 .

(i) DÉFINITION. — Tous les champs de plans lagrangiens considérés ici sont orientés. Considérons un fibré symplectique (E, Π, B) muni d'un champ de plans lagrangiens fixé L_0 . Soit L un autre champ de plans lagrangiens [c'est-à-dire une section s_L de $\mathcal{L}_0(E)$]. On a le diagramme.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_0(E) & \xrightarrow{i} & U(n)/SO(n) \\ \bar{\Pi} \downarrow \nearrow \gamma & & \\ B & \xrightarrow{G} & \end{array}$$

où $G = i \circ s$ désigne l'« application de Gauss » de L .

Rappelons que la classe de Maslov de L , $m_1(L) \in H^1(B, \mathbb{Z})$ est définie comme l'image réciproque par G d'un générateur du premier espace de cohomologie entière, de $U(n)/O(n)$. C'est une obstruction à la transversalité de L et L_0 d'après [1(ii)].

De la même façon, toute classe de cohomologie image réciproque par G d'une classe de cohomologie non nulle de $U(n)/SO(n)$ est une obstruction à la transversalité de L et L_0 . De plus, ces classes ne dépendront pas de la structure presque complexe qu'il a fallu introduire

pour les définir. On est donc naturellement conduit à définir la plus simple d'entre elles, de dimension supérieure à 1. D'où la :

DÉFINITION. — Soit (E, Π, B) un fibré vectoriel symplectique muni d'un champ de plans lagrangiens L_0 fixé. Soit s une section du fibré $(\mathcal{L}(E), \overline{\Pi}, B)$, c'est-à-dire un autre champ de plans lagrangiens L . On appelle classe fondamentale d'ordre 5 du champ de plans L relativement à L_0 , la classe de cohomologie $m_5(L_0, L) \in H^5(B, \mathbb{R})$ définie sur B par :

$$m_5(L_0, L) = G^*(\omega_5)$$

où G^* est l'application de Gauss définie par L et ω_5 est la classe canonique de $H^5(U(n)/SO(n), \mathbb{R})$.

[Quand aucune confusion n'est possible, on note $m_5(L_0, L) = m_5(L)$.]

(ii) *Interprétation topologique de $m_5(L_0, L)$.* — On déduit immédiatement de [1(ii)] le :

THÉORÈME. — Soit (E, Π, B) un fibré vectoriel symplectique muni d'un champ de plans lagrangiens L_0 fixé. Soit s une section du fibré $(\mathcal{L}(E), \overline{\Pi}, B)$, c'est-à-dire un autre champ de plans lagrangiens L de classe fondamentale, d'ordre 5, $m_5(L_0, L)$. Si L_0 et L sont transverses, alors $m_5(L_0, L) = 0$.

(iii) *Interprétation riemannienne de m_5 .* — Pour plus de clarté, nous nous plaçons ici dans le cas d'une immersion isométrique lagrangienne d'une variété L dans $\mathbb{C}^n$:

$$f: L \rightarrow \mathbb{C}^n.$$

On peut alors considérer le fibré symplectique $T\mathbb{C}^n|_L$, de champ de plans canonique $L_0 = \mathbb{R}^n$ (en identifiant $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$) et calculer $m_5(L_0, TL)$, que nous noterons $m_5(L)$. Notons σ la seconde forme fondamentale de l'immersion :

$$\sigma: TL \times TL \rightarrow T^\perp L.$$

Définissons le tenseur $(3,0)$ $\bar{\sigma}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}: TL \times TL \times TL &\rightarrow C^\infty(L), \\ (X, Y, Z) &\mapsto \langle \sigma(X, Y), JZ \rangle. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que $\bar{\sigma}$ est symétrique.

Z étant un champ de vecteurs fixé, on peut alors définir σ_Z par :

$$\begin{aligned} \sigma_Z: TL \times TL &\rightarrow C^\infty(L) \\ (X, Y) &\mapsto \sigma_Z(X, Y) = \bar{\sigma}(X, Y, Z). \end{aligned}$$

On déduit essentiellement de [3(ii)] le :

THÉORÈME. — Soit L une sous-variété lagrangienne de $\mathbb{C}^n$, de seconde forme fondamentale σ . Alors la 5-forme α_5 définie par :

$$\alpha_5(X_1, \dots, X_5) = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{S}_5} \text{Sign}(\varepsilon) \text{Tr}(\sigma_{X_{\varepsilon_1}} \dots \sigma_{X_{\varepsilon_5}}), \quad \forall X_1, \dots, X_5 \in TL,$$

satisfait : $\alpha_5 = G^*(\theta_5)$. C'est donc un représentant de la classe fondamentale $m_5(L)$.

5. EXEMPLES. — Cette classe m_5 est en général non nulle; elle est aussi indépendante de la classe de Maslov m_1 , comme le montrent les exemples suivants :

(i) Considérons le fibré trivial :

$$\begin{array}{c} \mathrm{SU}(3)/\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{C}^3 \\ \downarrow \\ \mathrm{SU}(3)/\mathrm{SO}(3) \end{array}$$

muni du champ de plans canonique horizontal L_0 .

Considérons L , le champ de plans défini par :

$$s(p) = p(L_{0_p}),$$

où p représente à la fois le point de base et la matrice que l'on applique à L_{0_p} . On a $m_1(L_0, L) = 0$ et $m_5(L_0, L) \neq 0$.

(ii) L'immersion standard du tore $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ dans $\mathbb{C}^n$ satisfait :

$$m_1(T^n) \neq 0 \quad \text{et} \quad m_5(T^n) = 0.$$

(*) Remise le 13 juin 1983.

[1] A. BOREL, *Annals of Math.*, 57, n° 1, 1953, p. 115-207.

[2] V. GUILLEMIN et S. STERNBERG, *Amer. Math. Soc.*, 1977, Providence R.I.

[3] J. M. MORVAN, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 38, n° 4, 1983, p. 349-370.

[4] D. B. FUKS, *Soviet Math. Dokl.*, 9, 1968, n° 1.

Centre Universitaire d'Avignon, Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques, 33, rue Louis-Pasteur, 84000 Avignon.