

GEOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Variétés riemanniennes spéciales et champs presque quasi concourants* ⁽¹⁾. Note (*) de **Jean-Marie Morvan**, présentée par M. André Lichnerowicz.

On étudie une classe de variétés Riemanniennes dites « spéciales » de type (E, X, λ, μ) définies par R. Rosca. On montre que de telles variétés sont feuilletées par des hypersurfaces quasi ombilicales. Certaines hypothèses supplémentaires sur la courbure de M , sur X et sur λ permettent de préciser la nature de ces hypersurfaces ou de définir un second feuilletage sur M de codimension 2. On est également amené à définir la presque quasi concourance d'un champ de vecteur, dans une direction (généralisant ainsi la quasi concourance définie par R. Rosca). Certaines propriétés de tels champs sont énoncées.

This paper deals with a class of Riemannian manifolds M foliated by quasi umbilical hypersurfaces (i. e. the second fundamental form is $L = \lambda g + \mu \alpha \otimes \alpha$). Next, imposing some properties on the dual field $X = j^{-1}(\alpha)$ (j canonical isomorphism with respect of g), we define on M other different foliations. Further, it is proved that M carries a field E which satisfies

$$\nabla E = +\lambda dp - \lambda \theta \otimes E + \mu \alpha \otimes X.$$

Such a field is called almost quasi concurrent (a. q. c.). Then,

- (i) *any parallel map of an oriented quasi umbilical hypersurface M on some direction (a. q. c.) leaves invariant the quasi umbilical character of M .*
- (ii) *if we consider on a Lorentzian manifold $\tilde{M}$, two null vectors ξ, ξ' , ($\langle \xi, \xi' \rangle = 1$), such that ξ' is a. q. c. in the direction of ξ , then $\tilde{M}$ is foliated by almost umbilical null hypersurfaces (in the sense of R. Rosca).*

Soit (M, g) une variété riemannienne (ou pseudoriemannienne), C^∞ , de dimension n . On note TM l'espace tangent à M et j l'isomorphisme canonique défini par g entre TM et l'espace cotangent T^*M .

Soit $\{e_A, A = 1 \dots n, n \geq 4\}$ un repère orthonormé de TM au voisinage d'un point m de M , et $\{\omega^A, A = 1, \dots, n, n \geq 4\}$ le repère dual. On note :

∇ , la connexion de Levi-Civita sur M ;

dp , la forme de soudure : $dp = \omega^A \otimes e_A$;

ω_B^A les formes de connexion associées au repère $\{e_A\}$,

$$\nabla e_A = \omega_B^A \otimes e_B.$$

DÉFINITION (R. Rosca). — Nous disons que (M, g) est une variété riemannienne spéciale de type (E, X, λ, μ) s'il existe sur M :

- un champ unitaire E ;
- un champ X orthogonal à E ;
- deux fonctions $\lambda, \mu \in C^\infty(M)$;

tels que, si $(e_1, \dots, e_{n-1}, E = e_n)$ est un repère orthonormé au voisinage d'un point m de M , et $(\omega^1 \dots \omega^{n-1}, \theta = j(E) = \omega^n)$ est le repère dual, et si $X = \sum_1^{n-1} a_i e_i$ sur ce voisinage, alors les formes de connexion ont pour expression :

$$(1) \quad \omega_i^n = \lambda \omega^i + \mu a_i \alpha, \quad \text{pour } i < n, \text{ avec } \alpha = j(X).$$

La distribution $E^\perp$ est dite horizontale. Le champ E est appelé champ vertical.

REMARQUE. — (i) La distribution $E^\perp$ est involutive.

(ii) Si $n = 2m + 1$, M peut être muni localement d'une structure presque cosymplectique telle que E est le champ de Reeb et dont la distribution horizontale est involutive : en effet, localement,

$$\begin{cases} \Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \dots \omega^{2m-1} \wedge \omega^{2m} \\ \theta \end{cases}$$

définit une structure presque cosymplectique. Nous disons que cette structure est spéciale.

(iii) La condition (1) s'exprime de façon intrinsèque par

$$(2) \quad \langle \nabla_Y Z, E \rangle = \lambda \langle Y, Z \rangle + \mu \langle Y, X \rangle \langle Z, X \rangle, \quad \forall Y \in TM, \quad \forall Z \in E^\perp$$

(iv) Le champ E vérifie :

$$(3) \quad \nabla E = -\lambda dp + \lambda \theta \otimes E - \mu \alpha \otimes X.$$

Généralisant la notion de quasi concourance définie par R. Rosca dans ⁽¹⁾ nous donnons la définition suivante :

DÉFINITION. — Soit (M, g) une variété riemannienne (ou pseudo riemannienne). Un champ de vecteurs Z sur M est dit presque quasi concourant dans la direction Y s'il vérifie :

$$\nabla Z = \lambda dp - \lambda \tau \otimes Z + \mu \alpha \otimes Y, \quad \text{où } \lambda, \mu \in C^\infty(M), \quad \tau = j(Z), \quad \alpha = j(Y).$$

1. ÉTUDE DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES SPÉCIALES.

THÉORÈME 1. — Une variété riemannienne (M, g) de dimension n , spéciale de type (E, X, λ, μ) est feuilletée par des hypersurfaces quasi ombilicales orthogonales à E .

- (i) Si M est de type $(E, X, 0, \mu)$ ces hypersurfaces sont cylindriques.
- (ii) Si M est de type $(E, X, \lambda, 0)$ ces hypersurfaces sont ombilicales.
- (iii) Si M est de type $(E, X, \mu \|X\|^2/1-n, \mu)$ ces hypersurfaces sont minimales.

Démonstration. — Soit M' une sous-variété intégrale maximale de $E^\perp$ au voisinage d'un point $p \in M$. De ⁽²⁾, on déduit que la seconde forme quadratique fondamentale L de M' a pour expression $L = \lambda g + \mu \alpha \otimes \alpha$ [ou $\alpha = j(X)$]. Le théorème en découle immédiatement.

THÉORÈME 2. — Soit (M, g) une variété riemannienne spéciale de dimension n , de type (E, X, λ, μ) .

1. Si X est partout non nul et parallèle dans le faisceau vertical (i. e. $\langle \nabla X, E \rangle = 0$) et si le tenseur de courbure R conserve la distribution $E^\perp$ (i. e. $R(y, z)u \in E^\perp, \forall y, z, u \in E^\perp$) :

(a) M est feuilletée par des sous-variétés orthogonales à $\{X, E\}$, de codimension 2, ombilicale dans la direction E .

(b) Si, de plus, $\lambda = Cte \neq 0$, M est feuilletée par des hypersurfaces orthogonales à E , qui sont localement de la forme $C \times M'$, ou C est une courbe de M et M' est totalement ombilicale.

2. Si $\|X\| = \text{Cte} \neq 0$ et X est parallèle dans le faisceau horizontal (i. e. $\langle \nabla X, Y \rangle = 0, \forall Y$ horizontal), alors M est feuilletée par des sous-variétés totalement ombilicales de codimension 2, orthogonales à $\{X, E\}$.

— Si, de plus, $\lambda = 0$ et M est connexe, simplement connexe, complète alors $M = M_1 \times M_2$, ou $\dim M_1 = 2$ et $\dim M_2 = n - 2$.

Démonstration. — Nous donnerons ici une idée de la démonstration.

1° On considère l'immersion $M_1 \rightarrow M$ d'une sous-variété intégrale maximale, de $E^\perp$. De $\langle \nabla_Y X, E \rangle = 0, \forall Y \in TM$, on déduit que $\lambda + \mu \|X\|^2 = 0$.

Ceci implique que les courbures principales de M_1 sont 0, dans la direction principale X , et λ sur l'orthogonal de X .

Utilisant le fait que R conserve $E^\perp$, on déduit du résultat précédent et des équations de Gauss-Codazzi que la distribution $X^\perp$ est involutive sur M_1 . Si M_2 est une sous-variété intégrale maximale de $X^\perp$, on a $\langle \nabla_Y Z, E \rangle = \lambda \langle Y, Z \rangle, \forall Y, Z \in TM_2$. M_2 est donc ombilicale dans la direction E . On en déduit le résultat 1 a—.

Si on suppose de plus $\lambda = \text{Cte} \neq 0$, on déduit des équations de Gauss-Codazzi que le champ Z est parallèle sur M_1 . Le résultat énoncé est alors une conséquence directe du théorème de décomposition de De Rham : tout point de M_1 admet un voisinage de la forme $C \times M'$, où C est une courbe. On vérifie facilement que M' est ombilicale dans M . 1 b— est donc démontré.

2° De $\langle \nabla X, Y \rangle = 0, \forall Y \perp E$, on déduit par un calcul sur les coefficients de la connexion que la distribution $\{X, E\}^\perp$ est involutive. Soit M_1 une sous-variété intégrale maximale de $\{X, E\}^\perp$.

On a $\langle \nabla_Z Y, X \rangle = 0, \forall Y, Z \in TM$, et $\langle \nabla_Z Y, E \rangle = \lambda \langle Y, Z \rangle, \forall Y, Z \in TM$, M_1 est donc totalement ombilicale. Si, de plus, $\lambda = 0$, on montre facilement que la distribution $\{X, E\}$ est parallèle. Le résultat 2 b est alors une conséquence du théorème de décomposition de De Rham.

2. ÉTUDE DES CHAMPS PRESQUE QUASI CONCOURANTS DANS UNE DIRECTION. — Conformément à la remarque iv, le champ E d'une variété riemannienne spéciale de type (E, X, λ, μ) est presque quasi concourant. Nous donnons ici trois propriétés propres à ces champs.

PROPOSITION 1. — Soit M une hypersurface orientée de l'espace euclidien E^N , quasi ombilicale (i. e. si N est une normale unitaire à M , la seconde forme fondamentale a pour expression $h = (\gamma g + \delta \omega \otimes \omega)$, où γ et δ sont des fonctions C^∞ et ω est une 1-forme scalaire).

On suppose que le champ N est presque quasi concourant dans la direction $Y = j^{-1}(\omega)$.

Alors toute application parallèle $(p \rightarrow \tilde{p} = p + cN, c \in \mathbb{R})$ de M est quasi conforme et conserve le caractère de quasi ombilicalité de M .

PROPOSITION 2. — Soit M une variété riemannienne de dimension n , immergée isométriquement dans l'espace euclidien E^N . On suppose que M possède un champ E presque quasi concourant dans la direction X , orthogonale à E , tel que

$$\nabla E = dp - \theta \otimes E + \mu \alpha \otimes X, \quad \text{où} \quad \mu \in C^\infty(M), \quad \theta = j(E), \quad \alpha = j(X).$$

Alors si θ est exacte ($\theta = df/f$), l'application $p \rightarrow \tilde{p} = p + fE$ de M à valeurs dans E^N est quasi conforme.

PROPOSITION 3. — Soit M une variété lorentzienne de dimension n . On suppose qu'il existe sur M deux vecteurs isotropes ξ et ξ' tels que :

$$- \langle \xi, \xi' \rangle = 1;$$

— ξ' est presque quasi conforme dans la direction ξ .

Alors M est feuilletée par des hypersurfaces isotropes presque ombilicales [au sens de R. Rosca ⁽²⁾], orthogonale à ξ .

(*) Séance du 6 juin 1977.

⁽¹⁾ Ce travail a été effectuée sous la direction du professeur R. Rosca.

⁽²⁾ R. ROSCA, *Comptes rendus*, 283, série A, 1976, p. 851.

⁽³⁾ B. Y. CHEN, *Geometry of Submanifolds*.

⁽⁴⁾ R. ROSCA, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, XX, n° 3, 1974, p. 237-243, section A.

Université Paul Sabatier,
Laboratoire d'Analyse et Géométrie,
U.E.R. de Mathématiques,
118, route de Narbonne,
31077 Toulouse Cedex.