Géométrie différentielle/*Differential Geometry*

Une caractérisation géométrique de la sphère de Whitney

Vincent BORRELLI, BANG-YEN CHEN et Jean-Marie MORVAN

Résumé – Nous montrons que les invariants géométriques locaux d'une sous-variété lagrangienne de $\mathbf{C}^n$, (le carré de sa courbure moyenne H^2 et sa courbure scalaire τ), vérifient l'inégalité fondamentale suivante :

$$H^2 \geqq \frac{2(n+2)}{n^2(n-1)}\tau.$$

(Nous utilisons pour cela une propriété particulière de symétrie (des trois variables) de la seconde forme fondamentale des immersions lagrangiennes.) Le cas d'égalité permet de caractériser la sphère de Whitney.

A geometric characterisation of the Whitney sphere

Abstract – *We prove that the local geometrical invariants of a Lagrangian submanifold of* $\mathbf{C}^n$ *(the square of its mean curvature* H^2 *and its scalar curvature* τ*), satisfy the following fundamental inequality:*

$$H^2 \geqq \frac{2(n+2)}{n^2(n-1)}\tau.$$

(We use for this purpose a particular property of symmetry of the second fundamental form of Lagrangian immersions.) The equality case allows to characterise the Whitney immersion.

Abridged English Version – Let M be a n-dimensional submanifold of the Euclidean space E^{n+p}. Gauss equation implies immediately that the square of its mean curvature H^2 (extrinsic invariant), and its scalar curvature τ (intrinsic invariant), satisfy at each point the following inequality:

$$H^2 \geqq \frac{2}{n^2}\tau. \tag{1}$$

Equality holds if and only if M is an open set of a n-plane (totally geodesic in E^{n+p}). Here, our goal is to improve this result in the case where the submanifold is Lagrangian in $\mathbf{C}^n$. We obtain:

THEOREM 1. – *Let* M *be a Lagrangian submanifold of* $\mathbf{C}^n$. *Then, the square of its mean curvature* H^2 *and its scalar curvature* τ *satisfy at each point the following inequality*:

$$H^2 \geqq \frac{2(n+2)}{n^2(n-1)}\tau. \tag{2}$$

The equality holds if and only if M *is an open portion of a Lagrangian plane or an open portion of a Whitney sphere (immersed by a Whitney immersion). If* M *is complete,* M *is a Lagrangian plane or a Whitney sphere (immersed by a Whitney immersion).*

This result is a consequence of the following:

LEMMA 1. – *Let* M *be a Lagrangian submanifold of* $\mathbf{C}^n$. *Then*

$$H^2 \geqq \frac{2(n+2)}{n^2(n-1)}\tau.$$

Note présentée par André LICHNEROWICZ.

0764-4442/95/03211485 $ 2.00 © Académie des Sciences

The equality holds if and only if there exists a real function λ defined on M, such that the second fundamental form h of M satisfies:

$$h(e_1, e_1) = 3\lambda e_{1^*}, \qquad h(e_2, e_2) = \ldots = h(e_n, e_n) = \lambda e_{1^*},$$
$$h(e_1, e_j) = \lambda e_{j^*}, \qquad h(e_j, e_k) = 0, \qquad 2 \leqq j \neq k \leqq n,$$

where $(e_1, \ldots, e_n, e_{1^*}, \ldots, e_{n^*})$ is an adapted local frame such that e_{1^*} is in the direction of the mean curvature vector field $\mathcal{H}$.

PROPOSITION 1. – *On the open set where $H \neq 0$,*

1. *the mean curvature vector field $\mathcal{H}$ satisfies the following differential equation:*

$$\left(\frac{J\mathcal{H}}{H}\right) \cdot \left(\frac{J\mathcal{H}}{H}\right) \cdot H = -\frac{2n^2}{(2+n)^2} H^3. \tag{3}$$

In particular,

$$a^4 = \frac{n^4}{(2+n)^4} H^4 + \frac{n^2}{(2+n)^2} \frac{1}{H^2} (J\mathcal{H} \cdot (H))^2$$

is a positive constant on (each connected component of) U;

2. *the integral curves of the distribution $\mathcal{D}$ spanned by $J\mathcal{H}$ are geodesics of M, the distribution $\mathcal{D}^\perp$ is integrable, and its leaves are open sets of round spheres in $\mathbf{C}^n$, of radius $(n/a^2(2+n))|H|$;*

3. *the metric $\hat{g}$ defined on U is a warped product $g_1 \times_\rho g_0$, where g_1 is the metric defined on $\mathcal{D}$ induced by the immersion, g_0 the metric with constant curvature 1 on $\mathcal{D}^\perp$, and $\rho = (n/a^2(2+n))|H|$.*

---

1. INTRODUCTION ET NOTATIONS. – Soit M une sous-variété de dimension n de l'espace euclidien E^{n+p}. L'équation de Gauss implique immédiatement que le carré de sa courbure moyenne, H^2 (invariant extrinsèque), et sa courbure scalaire τ (invariant intrinsèque), vérifient en tout point l'inégalité suivante :

$$H^2 \geqq \frac{2}{n^2} \tau. \tag{1}$$

L'inégalité a lieu si et seulement si M est un ouvert d'un n-plan (totalement géodésique dans E^{n+p}).

(On pourra consulter [1] pour une étude fine de ce type de résultat.) Notre but est d'améliorer cette inégalité dans le cas où l'on impose à la sous-variété d'être lagrangienne dans $\mathbf{C}^n$. Nous obtenons le résultat suivant :

THÉORÈME 1. – *Soit M une sous-variété lagrangienne de $\mathbf{C}^n$. Alors le carré de sa courbure moyenne H^2 et sa courbure scalaire τ vérifient en tout point l'inégalité suivante* :

$$H^2 \geqq \frac{2(n+2)}{n^2(n-1)} \tau. \tag{2}$$

L'égalité a lieu si et seulement si M est un ouvert d'un plan lagrangien, ou un ouvert d'une sphère de Whitney (immergée par une immersion de Whitney). Si M est complète, M est un plan lagrangien, ou une sphère de Whitney (immergée par une immersion de Whitney).

Le paragraphe suivant donne une définition précise de ce que nous appelons ici *sphère de Whitney et immersion de Whitney*. Lorsque $n = 2$, ce résultat est dû à [2]. Leur preuve, basée sur l'analyse complexe, ne s'étend pas en grande dimension.

2. GÉOMÉTRIE LOCALE DES SOUS-VARIÉTÉS LAGRANGIENNES DE $\mathbf{C}^n$. LA SPHÈRE DE WHITNEY. – 2.1. *Généralités.* – Soit $i : M \to \mathbf{C}^n$ une immersion isométrique d'une sous-variété riemannienne de dimension n dans $\mathbf{C}^n$, identifié à l'espace euclidien E^{2n}. On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire sur M comme sur $\mathbf{C}^n$. TM désigne le fibré tangent de M, et $T^\perp M$ le fibré normal. On identifie systématiquement M et $i(M)$, TM et $i_* TM$. On note $\tilde{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita sur $\mathbf{C}^n$, ∇ celle sur M, R le tenseur de courbure de M. La seconde forme fondamentale h de l'immersion, est le tenseur symétrique à valeurs dans $T^\perp M$, défini par l'équation :

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y),$$

pour tous vecteurs X, Y, tangent à M.

Soit $(e_1, ..., e_n, e_{n+1}, ..., e_{2n})$ un repère orthonormé défini sur un voisinage (dans $\mathbf{C}^n$) d'un point m de M, tel que $(e_1, ..., e_n)$ soient tangents à M, et $(e_{n+1}, ..., e_{2n})$ soient normaux à M. Nous utiliserons la convention d'indices suivante :

$$1 \leqq A, B, ... \leqq 2n, \qquad 1 \leqq i, j, ... \leqq n, \qquad n+1 \leqq r, s, ... \leqq 2n.$$

Le champ de vecteurs de courbure moyenne $\mathcal{H}$ est le champ de vecteur normal défini en chaque point m de M par :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{n} \operatorname{trace}(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i).$$

Soit $(\omega^1, \omega^2, ..., \omega^n, \omega^{n+1}, ..., \omega^{2n})$ le repère dual de $(e_1, ..., e_n, e_{n+1}, ..., e_{2n})$.

Notons ω_B^A les formes de connexion : $\omega_B^A(X) = \langle \tilde{\nabla}_X e_B, e_A \rangle$. On a : $\omega_i^r = h_{ij}^r \omega^j$, $h_{ij}^r = h_{ji}^r$. L'équation de Gauss s'écrit alors : $R_{jkl}^i = \sum_r (h_{ik}^r h_{jl}^r - h_{il}^r h_{jk}^r)$. En prenant deux fois la trace, on déduit que $\|h\|^2$, le carré H^2 de la norme de $\mathcal{H}$, et la courbure scalaire de M sont reliés par l'égalité :

$$n^2 H^2 = 2\tau - \|h\|^2,$$

d'où l'on déduit (1).

2.2. *Sous-variétés lagrangiennes de* $\mathbf{C}^n$. – Supposons maintenant que M est lagrangienne dans $\mathbf{C}^n$. Ceci signifie qu'en tout point m de M, $JT_m M = T_m^\perp M$. Un repère local orthonormé au-dessus d'un point m de M $(e_1, ..., e_n, e_{1^*}, ..., e_{n^*})$ est dit *lagrangien adapté* si $(e_1, ..., e_n)$ sont des vecteurs tangents à M et $e_{1^*} = J e_1, ..., e_{n^*} = J e_n$. On a alors : $\omega_j^{i^*} = \omega_i^{j^*}$, $\omega_i^j = \omega_{i^*}^{j^*}$. Si l'on pose : $h_{jk}^i = \langle h(e_j, e_k), e_{i^*} \rangle$, on a $\omega_j^{i^*} = \sum_{k=1}^{n} h_{jk}^i \omega^k$. On déduit du parallélisme de J une propriété importante du tenseur h_{jk}^i : Celui-ci est symétrique en i, j, k.

2.3. *Géométrie de la sphère de Whitney.* – Soit

$$f : E^{n+1} \to \mathbf{C}^n$$

l'application définie par

$$f(x_0, x_1, ..., x_n) = \frac{1}{1 + x_0^2} (x_1, ..., x_n, x_0 x_1, ..., x_0 x_n).$$

Soit S^n la sphère unité de E^{n+1}, centrée à l'origine. Il est facile de constater que la restriction w de f à S^n est une immersion lagrangienne ayant un unique point d'auto-intersection : $f(-1, 0, ..., 0) = f(1, 0, ..., 0)$. C'est *l'immersion de Whitney*. Soit $\hat{g}$ la métrique définie sur S^n comme image réciproque de la métrique euclidienne de $\mathbf{C}^n$. Nous noterons $\hat{S}^n$ la sphère $(S^n, \hat{g})$ et nous appellerons *n-sphère de Whitney* toute sous-variété déduite de celle-ci par homothétie et déplacement. L'immersion correspondante s'appellera *immersion de Whitney*. (Ces définitions diffèrent légèrement de celles de [6].)

3. Élément de preuve du théorème.

Lemme 1. – *Soit M une sous-variété lagrangienne de* $\mathbf{C}^n$. *Alors,*

$$H^2 \geqq \frac{2(n+2)}{n^2(n-1)}\tau.$$

L'égalité a lieu si et seulement s'il existe une fonction λ *définie sur M, à valeurs réelles, telle que la seconde forme fondamentale de M vérifie*

$$h(e_1, e_1) = 3\lambda e_{1^*}, \qquad h(e_2, e_2) = ... = h(e_n, e_n) = \lambda e_{1^*},$$
$$h(e_1, e_j) = \lambda e_{j^*}, \qquad h(e_j, e_k) = 0, \qquad 2 \leqq j \neq k \leqq n,$$

relativement à toute base lagrangienne adaptée à M, telle que e_{1^*} *soit dans la direction du vecteur de courbure moyenne* $\mathcal{H}$.

Preuve. – Soit M une sous-variété lagrangienne de $\mathbf{C}^n$. Soit $(e_1, ..., e_n, e_{1^*}, ..., e_{n^*})$ un repère local lagrangien adapté sur M. Par définition,

$$n^2 H^2 = \sum_i \Big(\sum_j (h^i_{jj})^2 + 2\sum_{j<k} h^i_{jj} h^i_{kk}\Big).$$

Soit $m = (n+2)/(n-1)$. On déduit de l'équation de Gauss:

$$n^2 H^2 - 2m\tau = 6m \sum_{i<j<k} (h^i_{jk})^2 + (m-1) \sum_{i\neq j,\, k} \sum_{j<k} (h^i_{jj} - h^i_{kk})^2$$
$$+ \frac{1}{n-1} \sum_{j\neq i} (h^i_{ii} - 3h^i_{jj})^2 \geqq 0.$$

Ceci implique : $H^2 \geqq (2(n+2)/n^2(n-1))\tau$. L'égalité a lieu si et seulement si : $h^i_{ii} = 3h^i_{jj}$, $h^i_{jk} = 0$, pour i, j, k distincts. Plaçons-nous maintenant en un point m où cette égalité est satisfaite. Choisissons un repère local $e_1, ..., e_n$ tels que e_{1^*} soit parallèle au vecteur de courbure moyenne $\mathcal{H}$. Posons $\mathcal{H} = H e_{1^*}$. Au point m, $h^j_{kk} = 0$ si $j > 1$, $k = 1, ..., n$. Ainsi,

$$h(e_1, e_1) = 3\lambda e_{1^*}, \qquad h(e_2, e_2) = ... = h(e_n, e_n) = \lambda e_{1^*},$$
$$h(e_1, e_j) = \lambda e_{j^*}, \qquad h(e_j, e_k) = 0, \qquad 2 \leqq j \neq k \leqq n,$$

où $\lambda = n/(2+n)H$.

La proposition suivante précise la géométrie de la sous-variété lorsque cette égalité est satisfaite. Remarquons que si $H = 0$ sur M, alors M est un ouvert d'un n-plan lagrangien. On supposera donc dans la suite que l'ouvert $U = \{p \in M : H(p) \neq 0\}$ est non vide. Il est clair que sur U, H est différentiable.

PROPOSITION 1. – *Sur U,*

1. *H vérifie l'équation différentielle :*

$$\left(\frac{J\mathcal{H}}{H}\right)\cdot\left(\frac{J\mathcal{H}}{H}\right)\cdot H = -\frac{2n^2}{(2+n)^2}H^3. \tag{3}$$

En particulier, la quantité

$$a^4 = \frac{n^4}{(2+n)^4}H^4 + \frac{n^2}{(2+n)^2}\frac{1}{H^2}(J\mathcal{H}\cdot(H))^2$$

est une constante positive sur chaque composante connexe de U.

2. *Les courbes intégrales de la distribution $\mathcal{D}$ engendrée par $J\mathcal{H}$ sont des géodésiques de M, la distribution orthogonale $\mathcal{D}^\perp$ est intégrable, et ses feuilles sont des ouverts de sphères rondes dans $\mathbf{C}^n$, de rayon $(n/a^2(2+n))|H|$,*

3. *la métrique $\hat{g}$ définie sur U est un produit tordu $g_1 \times_\rho g_0$, où g_1 est la métrique définie sur $\mathcal{D}$ induite par l'immersion, g_0 la métrique à courbure constante 1 sur $\mathcal{D}^\perp$, et $\rho = (n/a^2(2+n))|H|$.*

Preuve. – Plaçons-nous dans un repère lagrangien adapté tel que e_{1^*} soit dans la direction du vecteur de courbure moyenne $\mathcal{H}$. Les équations de Gauss-Codazzi-Ricci impliquent :

$$\omega_1^j = \frac{1}{\lambda}e_1(\lambda)\omega^j, \qquad \forall j \in 2, ..., n, \tag{4}$$

$$\langle\nabla_X Y, e_1\rangle = \frac{1}{\lambda}e_1(\lambda)\langle X, Y\rangle, \qquad \forall X, Y \in \mathcal{D}^\perp, \tag{5}$$

$$\nabla_{e_1}e_1 = 0, \qquad d\omega^1 = 0, \tag{6}$$

avec $\lambda = (n/(2+n))|H|$.

1. On en déduit en particulier que λ vérifie l'équation différentielle :

$$e_1 e_1 \lambda = -2\lambda^3, \tag{7}$$

où e_1 est un vecteur unitaire porté par $\mathcal{D}$, c'est-à-dire (3).

2. On déduit également de (4), (5) et (6) que les feuilles du feuilletage défini par $\mathcal{D}$ sont des géodésiques, que $\mathcal{D}^\perp$ est complètement intégrable et que chaque feuille est ombilicale. Chaque feuille est donc un ouvert d'une sphère ronde de $\mathbf{C}^n$. Un simple calcul montre que son rayon est $(n/a^2(2+n))|H|$.

3. On applique maintenant un résultat de S. Hiepko [3]. Localement, la métrique $\hat{g}$ définie sur U est donc en chaque point de U le produit $g_1 \times g_{\lambda,a}$, où g_1 est la métrique définie sur $\mathcal{D}$ induite par l'immersion, et $g_{\lambda,a}$ la métrique (à courbure constante λ^2/a^4) définie sur $\mathcal{D}^\perp$. C'est donc un produit tordu $g_1 \times_\rho g_0$, où g_0 est la métrique à courbure constante 1, et $\rho = (n/a^2(2+n))|H|$.

PROPOSITION 2. – *Tout point m de M admet un voisinage ouvert isométrique à un ouvert d'une sphère de Whitney (immergée par l'immersion de Whitney correspondante), ou un ouvert d'un plan lagrangien.*

Preuve. – Soit m un point de M. Résolvons localement l'équation différentielle (7). Si $\{x_1, ..., x_n\}$ est un système de cordonnées sur un voisinage V de m tel que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}^\perp$

soient engendrées respectivement par $\partial/\partial x_1$ et $\partial/\partial x_2, ..., \partial/\partial x_n$, alors la fonction λ (qui dépend seulement de $x = x_1$), s'exprime en fonction de sa valeur en m comme suit :

$$\lambda(x) = -\frac{\sin(t(x)+b)}{a\sqrt{1+\cos^2(t(x)+b)}},$$

où $t(x)$ [fonction inverse de $x(t)$] est définie par :

$$x = \int^t \frac{a\,du}{\sqrt{1+\cos^2(u+b)}},$$

a et b étant des constantes telles que

$$a^4 = \lambda^4(m) + \lambda'^2(m), \qquad b = -\operatorname{sign}(\lambda(m))\operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{1-c^2}{1+c^2}}\right),$$

où $c = -\lambda(m)(\lambda^4(m) + \lambda'^2(m))^{-1/4}$.

Un calcul simple montre alors que a est constant sur V, et que V est isométrique à un homothétique de rapport $1/a$ d'un ouvert W de la sphère de Whitney standard (immergée par l'immersion de Whitney correspondante). On conclut en remarquant que la seconde forme fondamentale de V coïncide avec celle de W [5].

Supposons maintenant que M soit complète. Une étude plus fine de l'équation différentielle (6) montre que, si U n'est pas dense, M est un plan lagrangien. Supposons U dense. Si $n \geqq 4$, en utilisant la platitude conforme de M, on déduit directement d'un résultat classique de R. S. Kulkarni [4], que M est globalement isométrique à une n-sphère de Whitney (immergée par l'immersion de Whitney correspondante).

Si $n = 2$ ou $n = 3$, une étude de la fonction H montre d'une part que chaque feuille intégrale de la distribution $\mathcal{D}^\perp$ est complète (c'est donc une sphère ronde), et d'autre part qu'on peut étendre l'intervalle I et l'identifier à $(0, \pi)$ (la fonction H tendant vers 0 aux extrémités de l'intervalle). On en déduit que M est isométrique à une sphère de Whitney $\hat{S}^n$ (immergée par l'immersion de Whitney w). Le théorème est donc démontré.

Note remise le 11 avril 1995, acceptée après révision le 18 septembre 1995.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] B. Y. CHEN, Some pinching and classification theorems for minimal submanifolds, *Arch. Math.*, 60, 1993, p. 568-578.

[2] I. CASTRO et F. URBANO, Lagrangian surfaces in the complex euclidean plane with conformal maslov form, *Tôhoku Math. J.*, 45, 1993, p. 565-582.

[3] HIEPKO, Eine innere kennzeichung der verzerrten produkte, *Math. Ann.*, 241, 1979, p. 209-215.

[4] R. S. KULKARNI, Curvature and metric, *Ann. of Math.*, 91, 1970, p. 311-331.

[5] H. RECKZIEGEL, On the problem whether the image of a given differentiable map into a riemannian manifold is contained in a submanifold with parallel second fundamental form, *J. Reine Angew. Math.*, 325, 1981, p. 87-104.

[6] A. WEINSTEIN, *Lectures on symplectic geometry*, CBMS Conf. Ser. Math., 29, 1977.

B.-Y. Ch.: Department of Mathematics, Michigan State University, East Lansing, Michigan 48824-1027, USA;
V. B. et J.-M. M. : Université Claude-Bernard, Lyon-I,
Institut de Mathématiques, URA 746,
43, boulevard du 11-Novembre-1918, 69622 Villeurbanne Cedex France.
borrelli@jonas.univ-lyon1.fr
bychen@math.msu.edu
morvan@jonas.univ-lyon1.fr