

ENSEMBLE FOCAL ET QUASIOMBILICALITE

Jean-Marie MORVAN

Introduction

Ces dernières années, un nombre important de travaux a été consacré à l'étude des immersions isométriques des variétés conformément plates dans un espace euclidien (cf Bibliographie). Si l'on sait depuis longtemps que les seules hypersurfaces conformément plates compactes, simplement connexes, d'un espace euclidien sont les sphères, la classification des sous-variétés conformément plates est encore un problème ouvert, même en codimension 1. Les différentes approches du problème ont toutes un point commun : Elles sont basées sur l'étude du fibré normal de la sous-variété, de manière à faire apparaître une expression particulièrement simple de la seconde forme fondamentale, au moyen de l'équation de Gauss.

Ainsi est apparue une large classe de sous-variétés conformément plates, les sous-variétés dites (totalement) quasiombilicales, dont la seconde forme fondamentale généralise directement celle d'une hypersurface conformément plate : il existe en chaque point un repère du fibré normal, tel que la seconde forme fondamentale de l'immersion possède une valeur propre de multiplicité $\geq n - 1$, dans chaque direction du repère [1]. Notons que l'on a pu montrer que cette classe de sous-variété est exactement égale à celle des sous-variétés conformément plates lorsque la codimension est assez faible (≤ 4 si la dimension de la variété est ≥ 7), ou lorsque la courbure normale de l'immersion est nulle [5], [2].

L'objet de cette note répond à la question suivante (*):

"Peut-on donner une définition équivalente de la quasiombilicalité ne faisant pas appel à une base locale du fibré normal, ni à des vecteurs particuliers du fibré tangent ?"

Pour traiter cette question, il nous a semblé utile de nous placer dans un cadre plus général que celui des sous-variétés conformément plates, celui des sous-variétés de dimension n , feuilletées par des $(n - p)$ - sphères ou p est la codimension de l'immersion. Ceci est naturel, puisque J.D. Moore a constaté qu'une sous-variété de dimension n et de codimension p , conformément plate, est génériquement feuilletée par des $(n - p)$ sphères. (B.Y. Chen a montré que la réciproque n'est pas vraie, même en codimension 1).

(*) Cette question a été posée par les Pr. A. Lichnerowicz et J. Martinet.

Une étude élémentaire de telles sous-variétés montre qu'elles possèdent, dans certains cas, un ensemble focal particulièrement simple. C'est pourquoi nous donnons ici une interprétation de la quasiombilicalité par une propriété sur l'ensemble focal de la sous-variété. On est ainsi amené à introduire le champ canonique normal C , défini comme la projection sur le fibré normal des centres des sphères du feuilletage.

Remarquons que l'on peut également introduire la projection sur le fibré normal du vecteur de courbure moyenne des sphères du feuilletage. Ce champ A est évidemment parallèle à C . Dans le cas où la sous-variété est quasiombilicale, A correspond exactement au premier champ normal canonique défini localement en [6] au moyen d'un repère du fibré normal. Nous avons ici son interprétation globale. Utilisant le champ C , la propriété de quasiombilicalité se traduit alors de la façon suivante (en codimension 2) :

"L'ensemble focal $F \subset T^{\perp} M^n$ se compose du lieu d'une droite D et d'une conique Q au-dessus de chaque point, dont l'intersection contient deux sections a et b satisfaisant $aC \cdot bC = 2 \|C\|^{-2}$."

I. Notations

Soit $f : M^n \hookrightarrow E^{n+p}$ une immersion isométrique d'une variété Riemannienne de dimension $n > 3$ dans l'espace euclidien de dimension $n+p$. Dans toute la suite, on identifie M^n et $f(M^n)$. On note $\langle, \rangle$ la métrique sur E^{n+p} , TM^n le fibré tangent à M^n , ∇ la connexion de Levi-Civita sur M^n . $T^{\perp} M^n$ désigne le fibré normal à M^n et σ la seconde forme fondamentale :

$\sigma : TM^n \times TM^n \xrightarrow{\sim} T^{\perp} M^n$
défini par $\sigma(x, y) = \tilde{\nabla}_x y - \nabla_x y \quad \forall x, y \in TM^n$ ou $\tilde{\nabla}$ désigne la connexion triviale sur E^{n+p} .

On définit l'opérateur A_ξ , pour tout $\xi \in T^{\perp} M^n$ par $\langle A_\xi(x), y \rangle = \langle \sigma(x, y), \xi \rangle$

On appelle courbures principales de l'immersion dans la direction les valeurs propres de A_ξ .

II. Ensemble focal d'une sous-variété de l'espace euclidien

Considérons une immersion isométrique $f : M^n \hookrightarrow E^{n+p}$ soit $F : T^{\perp} M^n \rightarrow E^{n+p}$ l'application "point final" définie par $F(m, \xi_m) = f(m) + \xi_m$, si $m \in M^n, \xi_m \in T^{\perp} M^n$.

Rappelons la

Définition [3]

Un point $q \in E^{n+p}$ est un point focal de (M^n, m) de multiplicité ν si $q = F(m, \xi_m)$ et $dF(m, \xi_m) = 0$ (c.a.d si q est une valeur critique de F).

Les valeurs propres de la seconde forme fondamentale permettent de caractériser les points focaux. On a la

Proposition [3]

Soit $m \in M^n$. Chaque direction $\xi_m, \xi_m \in T_m^n$, possède exactement n points focaux, chacun compté avec sa multiplicité, situé à distance $\frac{1}{\lambda_i}, 1 \leq i \leq n$, de m , où $\{\lambda_i\}$ est l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur $\langle \sigma(\dots)_m, \xi_m \rangle$.

Nous utiliserons également par la suite la caractérisation suivante de l'ensemble focal au-dessus d'un point m :

Soit $m \in T_m^n$. Alors l'ensemble des points focaux au-dessus de m est l'ensemble F_m défini par

$$F_m = \left\{ \xi_m \in T_m^n / \det (\langle \sigma_m(\dots), \xi_m \rangle - I) = 0 \right\}.$$

III. Sous-variété feuilletée par des ouverts de sphères

a) Définition et propriétés de $\mathcal{F}_n^p$

Soit M^n une sous-variété de $\mathbb{E}^{n+p}$, $p < n$. Nous dirons que M^n est génériquement feuilletée par des ouverts de r - sphères s'il existe un ouvert dense de M^n feuilleté par des ouverts de r - sphères.

Nous noterons $\mathcal{F}_n^p$ la classe des sous-variétés génériquement feuilletées par des ouverts de r - sphères, $n - p \leq r \leq n$; (r pouvant varier lorsqu'on se déplace sur la sous-variété).

Remarques :

1. On peut considérer, au-dessus de chaque point générique $m \in M^n$, le centre de la sphère passant par m . Ceci permet de mettre en évidence une section du fibré $f_*(T\mathbb{E}^{n+p}) \rightarrow M^n$, définie presque partout, notée S .

Soit C la projection de S sur T_m^n . C est un champ normal défini presque partout, canoniquement associé à la sous-variété.

2. Soit m un point générique de M^n , et S^{n-p+r} l'ouvert de la sphère du feuilletage passant par m . ($r \leq p$).

Considérons $(e_1, \dots, e_{n-p+r}, \dots, e_n)$ un repère local de T_m^n , tel que $e_1, \dots, e_{n-p+r} \in T_m S$.

On a $\langle \sigma_m(e_i, e_j), \xi_m \rangle = \langle A, \xi_m \rangle S_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n-p+2\}, \forall \xi \in T_m S$, où A_m est le vecteur de courbure moyenne de la sphère S ($A_m = \frac{1}{C_m} \sum C_m$).

Par conséquent, la matrice de $\langle \sigma, \xi \rangle$ s'écrit, dans cette base

$$\langle \sigma, \xi \rangle_m = \begin{pmatrix} M & M_1 \\ \epsilon & \langle A, \xi \rangle \\ M_1 & \langle A, \xi \rangle_m \end{pmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} M & M_1 \\ \epsilon & \langle A, \xi \rangle \\ M_1 & \langle A, \xi \rangle_m \end{pmatrix}} \right\} p-2 \\ \left. \vphantom{\begin{pmatrix} M & M_1 \\ \epsilon & \langle A, \xi \rangle \\ M_1 & \langle A, \xi \rangle_m \end{pmatrix}} \right\} n-p+2 \end{matrix}$$

b) Définition et propriétés de $\mathcal{F}_n^p$

Soit M^n une sous-variété de $\mathbb{E}^{n+p}$. Nous dirons que M^n est génériquement fortement feuilletée par des ouverts de r - sphères s'il existe un ouvert O dense dans M^n , tel que :

- O est feuilletée par des ouverts de r - sphères
- la restriction du fibré $T^{\perp} M^n$ à tout ouvert S du feuilletage est parallèle dans $T^{\perp} S$.

Nous noterons $\mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{Y}_n^p$ la classe des sous-variétés génériquement fortement feuilletées par des ouverts de r - sphères, $n - p \leq r \leq n$ (r pouvant varier lorsqu'on se déplace sur la sous-variété).

Remarques

1. $\mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{Y}_n^p \subset \mathcal{F}\mathcal{Y}_n^p$
2. Soit $M^n \in \mathcal{F}\mathcal{Y}_n^p$. $M^n \in \mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{Y}_n^p$ si et seulement si la seconde forme fondamentale de M^n satisfait au-dessus d'un point générique.

$$(\langle \sigma(\cdot, \cdot), \xi \rangle)_m = \left(\begin{array}{c|c} M_\xi & \\ \hline & \langle A, \xi \rangle \\ & \langle A, \xi \rangle_m \end{array} \right) \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} M_\xi \\ \hline \end{pmatrix}} \right\} p-2 \\ \left. \vphantom{\begin{pmatrix} \langle A, \xi \rangle \\ \hline \end{pmatrix}} \right\} n-p+2 \end{array}$$

dans tout repère $(e_1, \dots, e_{n-p+2}, e_{n-p+3}, \dots, e_n)$ tel que $e_1, \dots, e_{n-p+2} \in S$
 $\forall \xi \in T^{\perp} M^n$.

3. Etudions l'ensemble des points focaux de M^n :

Si m est un point générique de M^n , $T^{\perp} M^n$ contient un ensemble de points focaux F défini par : $F_m = \{ \xi \in T_m M^n / \det(\langle \sigma(\cdot, \cdot), \xi \rangle - I) = 0 \}$

$$= \{ \xi \in T_m M^n / (\langle A, \xi \rangle - I)^{n-p+2} \det(M_\xi - I) = 0 \}$$

où $n - p + r$ est la dimension de la sphère du feuilletage.

Par conséquent F_m est composé d'un $(p - 1)$ - plan d'équation $\langle A_m, \xi \rangle - I = 0$ (et donc orthogonal à C_m) et d'une variété algébrique d'équation $\det(M_\xi - I) = 0$.

Faisant varier m sur M^n , on en déduit que l'ensemble focal de la sous-variété contient une feuille qui est le lieu de $(p - 1)$ - plans.

c) Sous-variétés conformément plates

Rappelons qu'une variété est conformément plate si, localement, son tenseur métrique est conforme à la métrique euclidienne.

Utilisant les résultats de J.D. Moore, nous énonçons ici la

Proposition [4]

Soit M^n une sous-variété conformément plate de $\mathbb{E}^{n+p}$

Alors $M^n \in \mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{Y}_n^p$

On notera $\mathcal{CP}_n^p$ la classe des sous-variétés conformément plates. On a donc

$$\mathcal{CP}_n^p \subset \mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{Y}_n^p \subset \mathcal{F}\mathcal{Y}_n^p$$

.../...

d) Sous-variétés quasiombilicales

Conformément à [1], nous donnons les définitions suivantes :

Définition

Une sous-variété M^n de E^{n+p} est dite quasiombilicale dans la direction normale ξ_m au point $m \in M^n$, si $(A\xi)_m$ a une courbure principale de multiplicité $\geq n-1$.

Définition [1]

Une sous-variété M^n de E^{n+p} est dite (totalement) quasiombilicale si, en chaque point $m \in M^n$, il existe un repère orthonormé $(e_1, \dots, e_p)$ de $T^\perp M^n$ tel que Ae_i , $1 \leq i \leq p$ ait une courbure principale de multiplicité $\geq n-1$.

On note QO_n^p la classe des sous-variétés quasiombilicales sur un ouvert dense. Remarquons que :

1. Toute sous-variété quasiombilicale est conformément plate ([1]).

On a donc $QO_n^p \subset \mathcal{CP}_n^p \subset \mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{S}_n^p \subset \mathcal{F}\mathcal{S}_n^p$

La première inclusion provient du fait que : M^n quasiombilicale sur un ouvert dense $\Rightarrow M^n$ conformément plate sur un ouvert dense $\Rightarrow M^n$ conformément plate.

2. En chaque point m d'une sous-variété quasiombilicale, la seconde forme fondamentale a l'expression suivante : $\sigma(x, y)_m = \sum_{i=1}^p \{ \alpha^i \langle x, y \rangle + \gamma^i \langle x, \tau_i \rangle \langle y, \tau_i \rangle \} \xi$, où $\alpha^i, \gamma^i \in \mathbb{R}$, $\tau_i \in T_m M^n$, $\|\tau_i\| = 1$.

En [6], nous avons défini le 1^{er} champ normal canoniquement associé à une immersion quasiombilicale : $\bar{A} = \sum_{i=1}^p \alpha^i \xi_i$.

Si ξ est une direction normale quelconque, on a, dans un repère adapté,

$$\langle \sigma(\cdot, \cdot), \xi \rangle_m = \begin{pmatrix} M & \\ & \langle \bar{A}, \xi \rangle \\ & \langle \bar{A}, \xi \rangle_m \end{pmatrix}$$

Par conséquent, $\bar{A}$ est la projection sur $T^\perp M^n$ du vecteur de courbure moyenne de la sphère du feuilletage au-dessus de m : $\bar{A} = A$. A est donc l'interprétation intrinsèque du premier champ normal canonique associé à une immersion quasiombilicale.

e) Remarque sur les inclusions $Q\theta_n^p \subset \mathcal{EP}_n^p \subset \mathcal{FF}\mathcal{Y}_n^p \subset \mathcal{F}\mathcal{Y}_n^p$

- D'après [5], si $p \leq 4$ et $p \leq n-3$, M^n est conformément plate si et seulement si elle est quasiombilicale. On a donc $Q\theta_n^p = \mathcal{EP}_n^p$ si $p \leq 4$ et $p \leq n-3$. De même, si $p \leq n-2$ et si l'on suppose que le fibré normal est plat, alors, d'après [2], M^n est conformément plate si et seulement si M^n est quasiombilicale.

- Utilisant ce qui précède, on voit que $\mathcal{EP}_n^1 = \mathcal{FF}\mathcal{Y}_n^1$, mais $\mathcal{EP}_n^p$ est strictement inclus dans $\mathcal{FF}\mathcal{Y}_n^p$, si $p > 1$ (par exemple, le produit d'une sphère par une variété quelconque n'est pas en général conformément plat, bien qu'il soit un élément de $\mathcal{FF}\mathcal{Y}_n^p$).

- De façon claire, $\mathcal{FF}\mathcal{Y}_n^p$ est strictement inclus dans $\mathcal{F}\mathcal{Y}_n^p$.

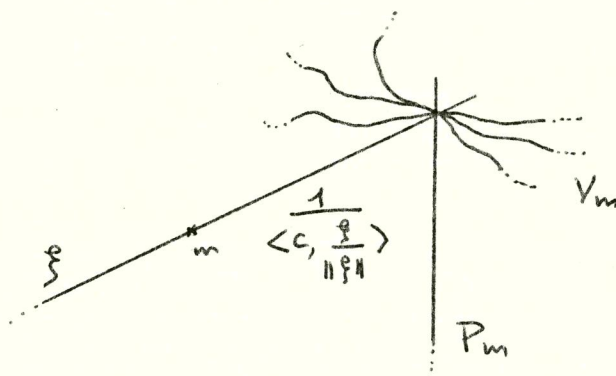
IV. Conditions nécessaire et suffisante pour qu'une sous-variété soit quasiombilicale

a) le cas général :

Rappelons que si $M^n \in \mathcal{FF}\mathcal{Y}_n^p$, M^n possède, au voisinage d'un point générique m , un ensemble focal F_m d'équation

$$F_m = \left\{ \xi / (\langle A, \xi \rangle - I)^{n-p+2} \det(H_\xi - I)^{p-2} \right\} = 0 \text{ où } n-p+2$$
 est la dimension de l'ouvert de la sphère du feuilletage ; F_m est composé d'un $(p-1)$ -plan P_m et d'une sous-variété algébrique V_m .

Si M^n est quasiombilicale dans la direction ξ , $(\langle \sigma(x, y), \frac{\xi}{\|\xi\|} \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \gamma \langle x, T \rangle \langle y, T \rangle, \gamma \in \mathbb{R}, T \in TH^n)$, cela signifie que $\alpha = \langle C, \frac{\xi}{\|\xi\|} \rangle$ est une valeur propre de multiplicité $n-1$ de l'équation $(\langle C, \xi \rangle - I)^{n-p+2} \det(H_\xi - I)^{p-2} = 0$. En d'autres termes, P_m et V_m ont un point d'intersection de multiplicité $(n-1)$ dans la direction ξ , à distance $\frac{1}{\langle C, \frac{\xi}{\|\xi\|} \rangle}$ de m .



Avec les notations précédentes, nous pouvons donc énoncer le

Théorème

Soit $M^n \in \mathcal{F}\mathcal{Y}_n^p$. Alors $M^n \in Q\theta_n^p$ si et seulement si :

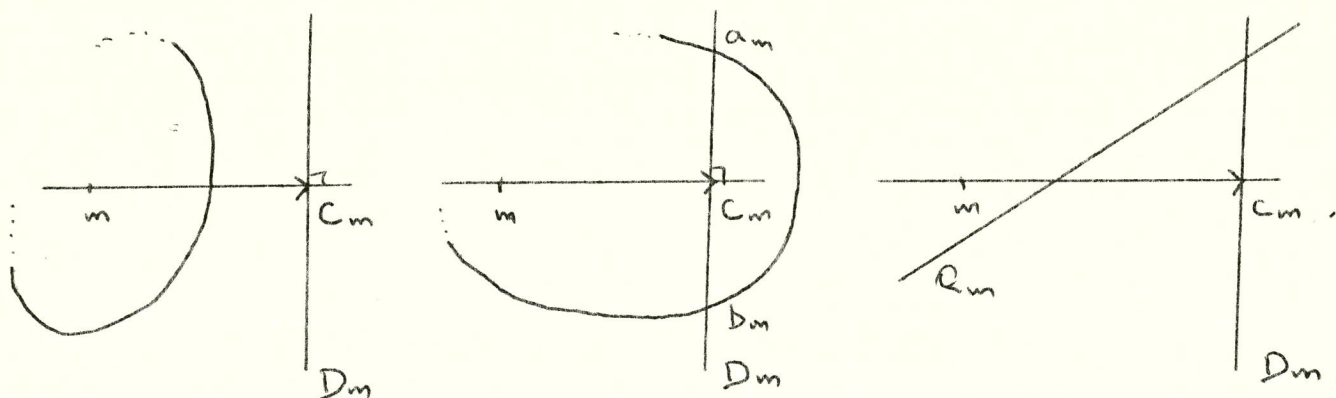
1. $M^n \in \mathcal{FF}\mathcal{Y}_n^p$
2. $V_m \in M^n$, générique, $V_m \cap P_m$ ont p points d'intersections $a_1 \dots a_p$

de multiplicité $p-1$, orthogonaux dans un repère centré en m .

b) Cas particulier : $p = 2$

Soit $M^n \in \mathcal{FF}\mathcal{Y}_n^2$, F_m se compose d'une droite D_m et d'une quadrique Q_m , en tout point générique m .

Remarquons que, seules les situations suivantes peuvent se présenter :



Le cas (1) correspond au cas où aucune direction n'est quasiombilicale, le cas (2) correspond au cas où deux directions sont quasiombilicales, le cas (3) correspond au cas où toutes les directions sont quasiombilicales.

(Chaque point de D_m étant de multiplicité $n - 1$, et Q_m étant réduit à deux droites Q_{m1}, Q_{m2} dont l'une se confond avec D_m) le point d'intersection de Q_m et D_m est ombilical.

Par conséquent, si M^n est (localement) de type (1), $M^n \notin Q\mathcal{O}_n^2$
 si M^n est (localement) de type (3), $M^n \in Q\mathcal{O}_n^2$
 si M^n est (localement) de type (2), $M^n \in Q\mathcal{O}_n^2$

si et seulement si en tout point générique, $a_m, b_m = 0$, ce qui revient à écrire $a_m C_m b_m C_m = 2 \|C_m\|^2$, où C est le champ canonique défini en III a 1. On a donc le

Théorème

Soit $M^n \in \mathcal{F}\mathcal{G}_n^2$. Alors $M^n \in Q\mathcal{O}_n^2$ si et seulement si $M^n \in \mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{G}_n^2$.

L'ensemble focal $F \subset T^\perp M^n$ se compose du lieu d'une droite D et d'une conique $\mathcal{Q}$ au-dessus de chaque point générique, dont l'intersection contient deux sections a et b satisfaisant $a C. b C = 2 \|C\|^2$.

Remarque

On peut se demander ce qui se passe lorsqu'il existe au-dessus de chaque point deux sections quasiombilicales, qui ne sont pas orthonormées. L'étude des schémas (1), (2), (3), permet de montrer que, dans ce cas, M^n est conformément plat si et seulement si toute direction est quasiombilicale.

En effet, si ces deux directions sont uniques, on se trouve dans la situation (2). Si de plus M^n est conformément plate, alors, d'après 5, il existe deux sections quasiombilicales orthonormées et donc $Q_m D_m$ a au moins trois points d'intersection, d'où la contradiction avec la situation (1). La seule situation possible est donc la (3).

Remerciements

Cet article a été conçu et rédigé à l'Université de Leeds, alors que l'auteur était invité par le département de Mathématique. L'auteur tient à remercier le Pr. A West pour son aide et ses fructueux conseils.

BIBLIOGRAPHIE

- 11 B.Y. CHEN : Geometry of Submanifolds - Marcel Dekker - New York
- 2 B.Y. CHEN - L. VERSTRAELEN : A survey of quasi-umbilical submanifolds.
Paleis der Academiers. Hertogsstraat I . Brussel
- 3 J. MILNOR : Morse theory - Princeton University Press
- 4 J.D. MOORE : Conformally Flat submanifolds of Euclidean space, Math Ann (1977) 225
- 5 J.D. MOORE ; J.M. MORVAN : Sous variétés conformément plates de codimension quatre
CRAS .287. (9 octobre 78) Série A. p 659
- 6 J.M. MORVAN : Some topological properties of totally quasi-umbilical submanifolds.
Simon Stevin - A paraître

Faculté des Sciences de Limoges
Département de Mathématiques
123 rue Albert Thomas
87100 LIMOGES