J. Math. pures et appl.,
66, 1987, *p.* 321 *à* 335

GÉOMÉTRIE DES SURFACES LAGRANGIENNES DE C^2

Par Bang-Yen CHEN et Jean-Marie MORVAN

Dédié au Pr. André Lichnerowicz, à l'occasion de son 70^e anniversaire.

Introduction

Soit C^2 le plan complexe, muni de sa structure complexe canonique J et de sa structure symplectique canonique Ω. Une surface M de C^2 est dite lagrangienne si $\Omega(x, y)=0$ pour tous vecteurs x et y tangents à M. Dans ce cas, le complexifié $TM \otimes C$ du fibré tangent TM est trivial. Réciproquement, un résultat de Gromov [Gr] implique que si le complexifié du fibré tangent à une surface est trivial, alors cette surface admet une immersion lagrangienne dans C^2. Par suite, la nature topologique des surfaces lagrangiennes de C^2 est parfaitement déterminée. On connait cependant peu de choses des propriétés riemanniennes des surfaces lagrangiennes de C^2. Dans cette direction, un résultat bien connu est que la courbure de Gauss G d'une telle surface égale sa courbure bormale G^D, (puisque le fibré tangent et le fibré normal à la surface sont isomorphes). Dans cet article, nous étudions la réciproque de cette propriété et introduisons un tenseur $\mathscr{H}$, défini à partir de la seconde forme fondamentale de la surface. Nous obtenons alors le résultat suivant : *si une surface analytique* M *de l'espace euclidien* E^4 *est telle que* $G=G^D$ *et* $\mathscr{H}=0$, *alors il existe une structure complexe* J *sur* E^4 *telle que* M *soit lagrangienne relativement à la forme symplectique* Ω *associée à* J. L'idée principale de la démonstration est la suivante : La grassmannienne $G(2,4)$ des deux plans orientés de E^4 a une décomposition bien connue $G(2,4) \simeq S^2 \times S^2$ comme produit de deux sphères. Nous remarquons d'abord que cette décomposition à une connotation symplectique, puisque la première composante S^2 du produit $S^2 \times S^2$ peut être considérée comme l'espace des structures symplectiques positives sur E^4. De cette façon nous pouvons montrer que M est lagrangienne relativement à une structure complexe quelconque J sur E^4 si et seulement si l'image de ν_1 appartient à un grand cercle de S^2, (où ν_1 désigne la première composante de l'application de Gauss $\nu=(\nu_1, \nu_2)$ de M dans $S^2 \times S^2$). Dans ce cas, le rang de ν_1 est évidemment inférieur ou égal à 1. Comme l'ont remarqué D. Hoffman et R. Osserman, cette condition équivaut à $G=G^D$ [7]. La nullité du tenseur $\mathscr{H}$ implique alors que l'application ν_1 est totalement géodésique. Ainsi, l'image de ν_1 appartient à un grand cercle. Comme application de notre résultat, nous obtenons qu'*une immersion isométrique lagrangienne d'une surface simplement connexe et plate de* C^2 *est homotope à l'immersion standard (totalement géodésique) de cette surface, à travers des immersions isométriques lagrangiennes à un déplacement près.* Nous montrons également *qu'une surface minimale de* E^4 *est lagrangienne relativement à une structure complexe de* E^4 *si et seulement si c'est une courbe complexe relativement à une autre structure complexe.* Remarquons enfin que l'image $\nu_1(M)$ d'une surface M appartient à un hémisphère ouvert de S^2 si et seulement si il existe une structure complexe sur E^4 telle que la surface ne possède aucun plan tangent lagrangien relativement à cette structure. Nous en déduisons des restrictions topologiques et géométriques sur une telle surface.

Une partie de ce travail a été effectuée alors que le second auteur était invité à Michigan State University. Il profite de cette occasion pour remercier ses collègues du Département de Mathématiques pour leur hospitalité.

1. Géométrie de $\Lambda^2 E^4$

Soit $(E^4, \langle\ ,\ \rangle)$ l'espace euclidien de dimension 4. Soit $\Lambda^2 E^4$ l'espace des 2-vecteurs de E^4. $\Lambda^2 E^4$ est un espace vectoriel de dimension 6, muni d'un produit scalaire défini par

$$\langle x \wedge y, z \wedge w \rangle = \langle x, z \rangle \langle y, w \rangle - \langle x, w \rangle \langle y, z \rangle.$$

Soit $V = x \wedge y$ un 2-vecteur unitaire décomposable. V définit un plan orienté de E^4, noté également V. Réciproquement, si V est un plan orienté de E^4, et (x, y) est une base orthonormée de V, alors $x \wedge y$ est un 2-vecteur unitaire décomposable. De cette façon, on peut identifier $x \wedge y$ avec le plan orienté associé dans E^4. Supposons E^4 muni d'une orientation $\omega \in \Lambda^4 (E^4)^*$. Si V est un plan orienté de E^4, nous notons $V^\perp$ le plan supplémentaire orthogonal à V, dont l'orientation est déterminée naturellement par celle de V et celle de E^4. Si P est un 2-vecteur unitaire décomposable, nous notons $P^\perp$ le 2-vecteur unitaire décomposable correspondant au supplémentaire orthogonal de P dans E^4.

1.1. Géométrie de G (2,4).

Définition 1. — Soit $(E^4, \langle\ ,\ \rangle)$ l'espace euclidien muni d'une orientation $\omega \in \Lambda^4 (E^4)^*$. Soit V un 2-vecteur unitaire de $\Lambda^2 E^4$.

(i) V est un 2-vecteur *symplectique positif* s'il existe un 2-vecteur P décomposable, de longueur 1/2, tel que $V = P + P^\perp$.

(ii) V est un 2-vecteur *symplectique négatif* s'il existe un 2-vecteur P décomposable, de longueur 1/2, tel que $V = P - P^\perp$.

Notons S^2_+ (resp. S^2_-) l'espace des 2-vecteurs symplectiques positifs (resp. négatifs), dans $\Lambda^2 E^4$. Notons $G(2,4)$ l'espace des deux plans orientés de E^4. Nous aurons besoin, dans ce qui suit, de préciser la décomposition bien connue de $G(2,4)$ (*cf.* [5], [7], [8]) en termes de 2-vecteurs symplectiques.

PROPOSITION 1. — *Soit* (e_1, e_2, e_3, e_4) *une base orthonormée et orientée de* E^4. *Notons* P *le sous-espace vectoriel de* $\Lambda^2 E^4$ *engendré par les 2-vecteurs symplectiques positifs* $\{1/2(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4),\ 1/2(e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4),\ 1/2(e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3)\}$. *Notons* N *le sous-espace vectoriel engendré par les 2-vecteurs symplectiques négatifs* $\{1/2(e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4),\ 1/2(e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4),\ 1/2(e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3)\}$. *On a*

(i) $\Lambda^2 E^4 = P \oplus N$, *la somme directe étant orthogonale.*

(ii) *Si* $Q = Q_1 + Q_2$ *est un 2-vecteur unitaire décomposable, tel que* $Q_1 \in P$ *et* $Q_2 \in N$, *alors* $Q^\perp = Q_1 - Q_2$.

(iii) S^2_+ *est une 2-sphère de rayon* $1/\sqrt{2}$ *dans* P, *et* S^2 *est une 2-sphère de rayon* $1/\sqrt{2}$ *dans* N.

(iv) *L'application* $j : G(2,4) \to \Lambda^2 E^4 = P \oplus N$, *définie par*

$$j(P) = 1/2\,[(P + P^\perp) \oplus (P - P^\perp)],$$

induit une isométrie de $G(2,4)$ *sur* $S^2_+ \times S^2_-$.

Démonstration de la Proposition 1 :

(i) est trivial.

(ii) Soit $Q = Q_1 + Q_2$, avec $Q_1 \in P$, $Q_2 \in N$. On peut décomposer Q de la façon suivante :

Écrivons

$$Q_1 = a(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4) + b(e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4) + c(e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3),$$
$$Q_2 = \alpha(e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) + \beta(e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4) + \gamma(e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3),$$

où a, b, c, α, β, γ sont des réels.

On a alors

$$Q = (a+\alpha)\,e_1 \wedge e_2 + (b+\beta)\,e_1 \wedge e_3 + (c+\gamma)\,e_1 \wedge e_4 + (a-\alpha)\,e_3 \wedge e_4 + (b-\beta)\,e_2 \wedge e_4 + (c-\gamma)\,e_2 \wedge e_3,$$

avec

$$(1)\qquad \begin{cases} (a+\alpha)(a-\alpha) + (b+\beta)(b-\beta) + (c+\gamma)(c-\gamma) = 0 \\ (a+\alpha)^2 + (b+\beta)^2 + (c+\gamma)^2 + (a-\alpha)^2 + (b-\beta)^2 + (c-\gamma)^2 = 1. \end{cases}$$

Remarquons que les coefficients de la décomposition de $(Q_1 - Q_2)$ dans le repère $(e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4)$ satisfont exactement la même condition (1). Ainsi, $Q_1 - Q_2$ est décomposable et $|Q_1| = |Q_2|$. Ceci implique que $(Q_1 + Q_2)$ et $(Q_1 - Q_2)$ sont orthogonaux dans $\Lambda^2 E^4$. D'autre part,

$$(Q_1+Q_2)\wedge(Q_1-Q_2)=a^2+\alpha^2+b^2+\beta^2+c^2+\gamma^2=\|Q\|^2\neq 0.$$

Par conséquent, $Q_1-Q_2=Q^\perp$.

(iii) Soit V un vecteur symplectique positif. Écrivons $V=Q+Q^\perp$, où Q est associé à un plan orienté de E^4. Utilisons la décomposition (i) et (ii). Nous avons :

$$Q=Q_1+Q_2, \qquad Q^\perp=Q_1-Q_2,$$

avec $Q_1\in P$, $Q_2\in N$. Ainsi $V=Q+Q^\perp=2Q_1\in P$. Inversement, si V est un vecteur de longueur $1\sqrt{2}$ dans $\Lambda^2 E^4$, qui appartient à P, nous pouvons écrire :

$$V=a(e_1\wedge e_2+e_3\wedge e_4)+b(e_1\wedge e_3-e_2\wedge e_4)+c(e_1\wedge e_4+e_2\wedge e_3),$$

où a, b, c sont des réels tels que $a^2+b^2+c^2=1/2$.

Soit $V'=a\,(e_1\wedge e_2-e_3\wedge e_4)+b\,(e_1\wedge e_3+e_2\wedge e_4)+c\,(e_1\wedge e_4-e_2\wedge e_3)$.

Nous avons

$$V+V'=e_1\wedge(ae_2+be_3+ce_4).$$

Ainsi, $V+V'$ est décomposable, et, en utilisant (ii), $(V+V')^\perp=V-V'$. Par suite, $V=1/2\,[(V+V')+(V+V')^\perp]$.

Ceci prouve que V est un vecteur symplectique positif, d'où nous déduisons que S^2_+ est la sphère de rayon $1/\sqrt{2}$ dans P.

(iv) Est une conséquence directe de (i), (ii) et (iii).

Remarque. — Dans la suite, lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, nous identifierons $G(2,4)$ et $j(G(2,4))$.

1.2. LES GRASSMANNIENNES LAGRANGIENNES ET COMPLEXES $\mathscr{L}(C^2)$ ET $\mathscr{C}(C^2)$. — Soit C^2 le plan complexe muni de sa structure complexe J, de son produit scalaire habituel $\langle\ ,\ \rangle$, et de sa forme symplectique Ω définie par

$$\Omega(x,y)=\langle x, Jy\rangle$$

pour tous vecteurs x, y de C^2. Un sous-espace vectoriel de C^2, de dimension réelle 2 est dit J-*invariant* s'il est stable par J (i. e. $x\in P\Rightarrow Jx\in P$). Un sous-espace vectoriel P de C^2, de dimension réelle 2, est dit *Lagrangien*, si JP est orthogonal à P (i. e. $x\in P\Rightarrow Jx\in P^\perp$). Notons $\mathscr{C}(C^2)$ [ou $\mathscr{C}(E^4, J)$], l'espace des plans J-invariants (orientés) de C^2. Notons $\mathscr{L}(C^2)$ [ou $\mathscr{L}(E^4, J)$], l'espace des plans lagrangiens de C^2. De façon claire, on a $\mathscr{C}(C^2)\subset G(2,4)$ et $\mathscr{L}(C^2)\subset G(2,4)$. La proposition suivante décrit les inclusions précédentes, en utilisant la décomposition canonique de $G(2,4)$ comme produit de deux sphères (*cf.* § 1).

PROPOSITION 2. — 1. (i) *L'espace* $\mathscr{L}(C^2)$ *des plans lagrangiens orientés s'identifie à* $S^1\times S^2$, *où* S^1 *est un grand cercle de* S^2.

(ii) *L'espace* $\mathscr{C}(C^2)$ *des plans* J-*invariants munis de l'orientation induite par celle de* C^2, *s'identifie à* $\{pt\}\times S^2$, *où* $\{pt\}$ *est un point de* S^2.

2. *Réciproquement :*

(i) *Soit* S^1 *un grand cercle de* S^2. *Alors il existe sur* E^4 *une structure complexe* J *telle que* $S^1 \times S^2$ *s'identifie à* $\mathscr{L}^2(E^4, J)$.

(ii) *Soit* $\{pt\}$ *un point de* S^2. *Alors il existe sur* E^4 *une structure complexe* J *telle que* $\{pt\} \times S^2$ *s'identifie à* $\mathscr{C}(E^4, J)$.

Démonstration de la proposition 2. — 1. (i) Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, J\varepsilon_1, J\varepsilon_2)$ le repère standard unitaire de C^2, et $(\theta^1, \theta^2, J\theta^1, J\theta^2)$ le repère dual, dans la dualité définie par le produit scalaire canonique de C^2. La forme symplectique s'écrit alors

$$\Omega = \theta^1 \wedge J\theta^1 + \theta^2 \wedge J\theta^2.$$

Soit ζ_Ω le vecteur dual de Ω dans la dualité définie par le produit scalaire. Ce vecteur s'écrit

$$\zeta_\Omega = \varepsilon_1 \wedge J\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \wedge J\varepsilon_2.$$

Un plan L défini par le 2-vecteur $e_1 \wedge e_2$ est lagrangien si et seulement si $\Omega(e_1, e_2) = 0$, c'est-à-dire $\langle \zeta_\Omega, L \rangle = 0$. De plus, si L est lagrangien, $L^\perp$ est aussi lagrangien. Par suite $\langle \zeta_\Omega, L + L^\perp \rangle = 0$. Donc, $1/2(L + L^\perp)$ est dans le 2-plan de $\Lambda^2 E^4$ orthogonal à ζ_Ω dans P. Par conséquent, $1/2(L + L^\perp)$ appartient à un grand cercle S^1_L de L et L appartient à $S^1 \times S^2_-$. Réciproquement, si P est un plan orienté, représenté par un 2-vecteur appartenant à $S^1 \times S^2_-$, alors ce 2-vecteur est orthogonal à ζ_Ω et P est lagrangien.

1. (ii) Un plan C défini par le 2-vecteur $e_1 \wedge e_2$ (où $\{e_1, e_2\}$ est une base orthonormée directe), est J-invariant si et seulement si $\Omega(e_1, e_2) = 1$. Ceci signifie que $\langle \zeta_\Omega, C \rangle = 1$. Dans ce cas, $C^\perp$ est également J-invariant. Par suite, $\langle \zeta_\Omega, C^\perp \rangle = 1$. Par conséquent, $C + C^\perp$ appartient à l'intersection de la droite engendrée par ζ_Ω et S^2_+. C'est donc un point $\{pt\}$. La réciproque est également vraie.

2. (i) Soit S^1 un grand cercle de S^2_-. Soit $\zeta \in S^2_+$ l'un des deux 2-vecteurs symplectiques positifs normaux à S^1. On peut écrire $\zeta = Q + Q^\perp$, où Q est un 2-vecteur décomposable. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une base orthonormée directe de E^4 telle que $Q = e_1 \wedge e_2$, $Q^\perp = e_3 \wedge e_4$. Considérons la structure complexe J définie sur E^4 par $J(e_1) = e_3$, $J(e_2) = e_4$. Il est clair que

$$\begin{cases} \zeta = e_1 \wedge e_2 + J e_1 \wedge J e_2 \\ \langle \zeta, V \rangle = 0, \qquad \forall V \in S^1 \times S^2_-. \end{cases}$$

Ceci signifie que tous les éléments de $S^1 \times S^2_-$ représentent des plans lagrangiens orientés.

2. (ii) se démontre de la même façon.

2. L'application de Gauss d'une surface de E^4

2.1. LES ÉQUATIONS FONDAMENTALES (*cf.* [1]). — Soit $x : M \to (E^4, \langle\ ,\ \rangle)$ une immersion isométrique d'une surface riemannienne M à valeurs dans l'espace euclidien de dimension quatre E^4. Soit ∇ la connexion de Levi-Civita définie sur M, et ∇' la connexion de Levi-Civita définie sur E^4. Le second tenseur fondamental h associé à x est le tenseur symétrique à valeurs dans le fibré normal $T^\perp M$, défini par l'équation

$$\nabla'_x y = \nabla_x y + h(x, y), \tag{2}$$

pour tous vecteurs x, y de l'espace tangent TM de M. Si ζ est un champ de vecteurs normal à M, on a

$$\nabla'_x \zeta = -A_\zeta(x) + D_x \zeta, \qquad \forall x \in TM, \tag{3}$$

où $-A_\zeta(x)$ et $D_x\zeta$ sont les composantes tangentes et normales de $\nabla'_x\zeta$. D est la connexion normale définie sur le fibré normal $T^\perp M$. On a

$$\langle A_\zeta(x), y \rangle = \langle h(x, y), \zeta \rangle. \tag{4}$$

$H = \mathrm{Trace}(h)$ est le vecteur de courbure moyenne de l'immersion x. Si $H=0$, l'immersion est dite minimale. Soit R et R^D les tenseurs de courbure respectifs de ∇ et D. Écrivons l'équation de Gauss et l'équation de Ricci.

$$\langle R(x, y)z, w \rangle = \langle h(y, z), h(x, w) \rangle - \langle h(x, w), h(y, z) \rangle \tag{4}$$

$$\langle R^D(x, y)\zeta, \eta \rangle = \langle A_\zeta(x), A_\eta(y) \rangle - \langle A_\zeta(y), A_\eta(x) \rangle \tag{5}$$

$\forall\, x, y, z, w \in TM$, $\forall \zeta, \eta \in T^\perp M$.

On définit la dérivée covariante du tenseur h par la formule

$$(\bar\nabla_x h)(y, z) = D_x(h(y, z)) - h(\nabla_x y, z) - h(y, \nabla_x z). \tag{6}$$

L'équation de Codazzi s'écrit alors

$$(\bar\nabla_x h)(y, z) = (\bar\nabla_y h)(x, z), \qquad \forall x, y, z \in TM. \tag{7}$$

On définit la courbure de Gauss G de M par

$$G = \langle R(e_1, e_2)e_2, e_1 \rangle, \tag{8}$$

où (e_1, e_2) est un repère orthonormé local de TM. Si M et E^4 sont orientés, on définit la courbure normale G^D de $T^\perp M$ par

$$G^D = \langle R^D(e_1, e_2)e_3, e_4 \rangle \tag{9}$$

où (e_1, e_2, e_3, e_4) est un repère orthonormé local direct de $TM \oplus T^\perp M$, tel que (e_1, e_2) soit un repère direct de TM.

Nous aurons besoin, dans la suite du tenseur suivant : Définissons le crochet $\ll \bar\nabla h, h \gg$ par

$$\begin{aligned} \ll \bar\nabla h, h \gg (x, y, z) = {} & (\bar\nabla_z h^3)(x, e_2)\, h^3(y, e_1) \\ & + (\bar\nabla_z h^4)(x, e_2)\, h^4(y, e_1) - (\bar\nabla_z h^3)(x, e_1)\, h^3(y, e_2) \\ & - (\bar\nabla_z h^4)(x, e_1)\, h^4(y, e_2), \qquad \forall x, y, z \in TM. \end{aligned}$$

Définissons de même $(\bar{\nabla} h, h)$ par

$$(\bar{\nabla} h, h)(x, y, z)=(\bar{\nabla}_z h^3)(x, e_1) h^4(y, e_1) \\ +(\bar{\nabla}_z h^3)(x, e_2) h^4(y, e_2)-(\bar{\nabla}_z h^4)(x, e_1) h^3(y, e_1) \\ -(\bar{\nabla}_z h^4)(x, e_2) h^3(y, e_2), \qquad \forall x, y, z \in \mathrm{TM}.$$

Posons à présent

$$\mathscr{H}(x, y, z)=(\ll \bar{\nabla} h, h \gg -(\bar{\nabla} h, h))(x, y, z). \tag{10}$$

Il est clair que $\mathscr{H}$ est un tenseur de type (0,3), indépendant du repère orthonormé direct e_1, e_2, e_3, e_4.

2.2. Immersion lagrangienne. — Soit $x : \mathrm{M} \to \mathrm{C}^2$ une immersion isométrique d'une surface riemannienne M à valeurs dans C^2. x est lagrangienne si, pour tout point p de M, $\mathrm{T}_p \mathrm{M}$ est un plan lagrangien de C^2. Ceci est équivalent au fait que $\mathrm{J}(\mathrm{T}_p \mathrm{M})=\mathrm{T}_p^{\perp} \mathrm{M}$ pour tout point p de M, où J est la structure complexe canonique de C^2. Puisque J est parallèle, il est facile de vérifier que l'on a [3] :

$$\langle h(x, y), \mathrm{J} z \rangle=\langle h(x, z), \mathrm{J} y \rangle \tag{11}$$

$$\mathrm{D}_x(\mathrm{J} y)=\mathrm{J} \nabla_x y \tag{12}$$

$$\mathrm{J} h(x, y)=-\mathrm{A}_{\mathrm{J} x} y \tag{13}$$

$\forall x, y, z \in \mathrm{TM}$

2.3. L'application de Gauss. — Soit $x : \mathrm{M} \to \mathrm{E}^4$ une immersion isométrique d'une surface riemannienne orientée M à valeurs dans E^4. L'application de Gauss ν associée à x est l'application qui associe à tout point p de M le plan vectoriel orienté défini par le plan tangent $\mathrm{T}_p \mathrm{M}$ ramené à l'origine. Considérons maintenant l'identification de G(2,4) avec $\mathrm{S}_+^2 \times \mathrm{S}_-^2$ et son inclusion dans $\Lambda^2 \mathrm{E}^4=\mathscr{P} \oplus \mathscr{N}$ (*cf.* § 1). On obtient ainsi une suite

$$\mathrm{M} \xrightarrow{\nu} \mathrm{G}(2,4) \simeq \mathrm{S}_+^2 \times \mathrm{S}_-^2 \to \mathscr{P} \oplus \mathscr{N}=\Lambda^2 \mathrm{E}^4.$$

Notons ν_1 (resp. ν_2) la première (resp. la seconde) projection de ν sur S_+^2 (resp. S_-^2), et posons $\nu=(\nu_1, \nu_2)$. On a la

Proposition 3. — *Soit $x : \mathrm{M} \to \mathrm{E}^4$ une immersion isométrique d'une surface riemannienne orientée à valeurs dans E^4. Soit $\nu=(\nu_1, \nu_2)$ l'application de Gauss de x. Alors, si (e_1, e_2) est un repère local orthonormé direct de* TM, *et (e_3, e_4) est un repère orthonormé direct de $\mathrm{T}^{\perp} \mathrm{M}$, on a :*

(i) $$\nu_{1*}(x)=1/2[-h^3(x, e_1)+h^4(x, e_2)](e_1 \wedge e_4+e_2 \wedge e_3) \\ +1/2[h^3(x, e_2)+h^4(x, e_1)](e_1 \wedge e_3-e_2 \wedge e_4).$$

(ii) *Le rang de ν_{1*} est égal à 2 en tout point où $\mathrm{G}-\mathrm{G}^{\mathrm{D}}$ est non nul.*

(iii) *La seconde forme fondamentale* σ_1 *de* $\nu_1 : M \to S^2_+$ *est donnée par la formule*

$$\sigma_1(x, y) = 1/2[-(\bar{\nabla}_y h^3)(x, e_1) + (\bar{\nabla}_y h^4)(x, e_2)](e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3) + 1/2[(\bar{\nabla}_y h^3)(x, e_2) + (\bar{\nabla}_y h^4)(x, e_1)](e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4).$$

(iv) *Si* $G \equiv G^D$ *et* $\mathcal{H} = 0$, *alors* ν_1 *est une application totalement géodésique. (En particulier, si* ν_1 *est de rang constant sur un ouvert* U, $\nu_1(U)$ *appartient à un grand cercle de* S^2).

Démonstration de la proposition 3 :

(i) $$2\nu_{1*}(x) = \bar{\nabla}x(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4)$$
$$= h(x, e_1) \wedge e_2 + e_1 \wedge h(x, e_2) - A_{e_3}(x) \wedge e_4 - e_3 \wedge A_{e_4}(x)$$
$$= [-h^3(x, e_1) + h^4(x, e_2)](e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3) + [h^3(x, e_2) + h^4(x, e_1)](e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4).$$

(ii) Calculons det ν_{1*} dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4).

$$\det \nu_{1*} = \begin{vmatrix} -h^3_{11} + h^4_{12} & -h^3_{12} + h^4_{22} \\ h^3_{12} + h^4_{11} & h^3_{22} + h^4_{12} \end{vmatrix} = (-h^3_{11} + h^4_{12})(h^3_{22} + h^4_{12}) - (h^3_{12} + h^4_{11})(-h^3_{12} + h^4_{22}).$$

Utilisant les équations de Gauss et Ricci, on obtient immédiatement det $\nu_{1*} = G - G^D$. (Ce résultat est déjà dans [7].)

(iii) On peut considérer ν_1 comme une application à valeurs dans S^2 ou comme une application à valeurs dans $\mathcal{P}$. Notons σ_1 la seconde forme fondamentale de $\nu_1 : M \to S^2$, et h_1 la seconde forme fondamentale de $\nu_1 : M \to \mathcal{P}$. On a alors

$$h_1(x, y) = \bar{\nabla}_y(\nu_{1*}(x)) - \nu_{1*}(\nabla_y x). \tag{14}$$

D'autre part,

$$2\bar{\nabla}_y(\nu_{1*}(x)) = y(-h^3(x, e_1) + h^4(x, e_2))(e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3)$$
$$+ (-h^3(x, e_1) + h^4(x, e_2))\bar{\nabla}_y(e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3)$$
$$+ y(h^3(x, e_2) + h^4(x, e_1))(e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4)$$
$$+ (h^3(x, e_2) + h^4(x, e_1))\bar{\nabla}_y(e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4).$$

De plus,

$$\bar{\nabla}_y(e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3) = \nabla_y e_1 \wedge e_4 + h(y, e_1) \wedge e_4 + e_1 \wedge D_y e_4 - e_1 \wedge A_{e_4}(y)$$
$$+ \nabla_y e_2 \wedge e_3 + h(y, e_2) \wedge e_3 + e_2 \wedge D_y e_3 - e_2 \wedge A_{e_4}(y),$$

et

$$\bar{\nabla}_y(e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4) = \nabla_y e_1 \wedge e_3 + h(y, e_1) \wedge e_3 + e_1 \wedge D_y e_3 - e_1 \wedge A_{e_3}(y)$$
$$- \nabla_y e_2 \wedge e_4 - h(y, e_2) \wedge e_4 - e_2 \wedge D_y e_4 + e_2 \wedge A_{e_4}(y).$$

Or,

$$(\bar{\nabla}_y h^\alpha)(x, e_i) = \langle D_y(h(x, e_i)), e_\alpha \rangle - h^\alpha(\nabla_y x, e_i) - h^\alpha(x, \nabla_y e_i)$$

$\forall \alpha \in \{3, 4\}$, $\forall i \in \{1, 2\}$.

On conclut alors, par un calcul facile, que

$$\begin{aligned} h_1(x, y) = {} & [(-h^3(x, e_1) + h^4(x, e_2)(h^3(y, e_1) - h^4(y, e_2)) \\ & -(h^3(x, e_2) + h^4(x, e_1))(h^3(y, e_2) + h^4(y, e_1))]\, \nu_1 \\ & + [-(\bar{\nabla}_y h^3)(x, e_1) + (\bar{\nabla}_y h^4)(x, e_2)]\left[\frac{1}{2}(e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3)\right] \\ & + [(\bar{\nabla}_y h^3)(x, e_2) + (\bar{\nabla}_y h^4)(x, e_1)]\left[\frac{1}{2}(e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4)\right]. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit (iii).

(iv) Supposons que $G \equiv G^D$ sur M. (ii) implique alors que le rang de ν_1 est $\leqq 1$. L'image de ν_1 est donc une courbe de S^2. Soit $U = \{p \in M \mid rg\, \nu_1 = 1\}$. U est un ouvert de M. L'image de U est un grand cercle de S^2 si et seulement si ν_1 est totalement géodésique, c'est-à-dire si et seulement si l'image de σ_1 est tangent à $\nu_1(U)$, ou encore

(15) $$\sigma_1(x, y) \wedge \nu_{1*}(z) = 0, \qquad \forall x, y, z \in TU.$$

Utilisons la proposition 3 (i), (iii). (15) est équivalent à

(16) $$\mathscr{H} = 0 \quad \text{sur } U.$$

Sur l'intérieur de $M - U$, ν_1 est constant et le résultat est trivial. Par conséquent, on en déduit immédiatement (iii).

3. Le théorème principal

Dans ce paragraphe, nous montrons le principal résultat de ce travail. Il est de nature globale dans le cas analytique, et de nature locale dans le cas C^∞.

THÉORÈME 1. — *Soit $x: M \to E^4$ une immersion isométrique analytique d'une surface de Riemann* M *à valeur dans* E^4. *Alors il existe une structure complexe sur* E^4 *telle que* M *soit lagrangienne si et seulement si* $G = G^D$ *et* $\mathscr{H} = 0$.

THÉORÈME 2. — *Soit $x: M \to E^4$ une immersion isométrique d'une surface* M *à valeur dans* E^4. *Alors il existe une famille* $(O_i)_{i \in I}$ *d'ouverts disjoints tels que :*

(i) $\bigcup_{i \in I} O_i = M$;

(ii) $\forall i \in I$, *Il existe une structure complexe* J_i *sur* E^4 *telle que* O_i *soit Lagrangienne dans* (E^4, J_i) *si et seulement si* $G = G^D$ *et* $\mathscr{H} = 0$.

L'exemple suivant montre qu'on ne peut pas espérer un résultat global dans le cas C^∞ : Soit C la courbe C^∞ de E^4 définie par

$$\forall t \in \left]0, \frac{1}{3}\right[, \quad c(t) = \left(1 - \exp\left(\frac{1}{9} - t^2\right), t, 0\right),$$

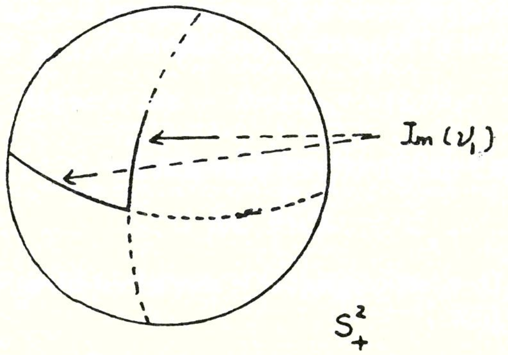
$$\forall t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \quad c(t) = (0, t, 0),$$

$$\forall t \in \left]\frac{2}{3}, 1\right[, \quad c(t) = \left(0, t, 1 - \exp\left(\frac{4}{9} - t^2\right)\right).$$

Considérons la surface $C \times \mathbb{R}$ de $E^3 \times \mathbb{R} \simeq E^4$. Il est clair que

$$c\left(\left]0, \frac{1}{3}\right[\right) \times \mathbb{R}, \qquad c\left(\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[\right) \times \mathbb{R}, \qquad c\left(\left]\frac{2}{3}, 1\right[\right) \times \mathbb{R}$$

sont lagrangiennes pour des structures complexes différentes de E^4. Ce n'est cependant pas le cas globalement. En effet, l'image de ν_1 à l'allure suivante :



Démonstration des deux théorèmes. — Si $G = G^D$ et $\mathscr{H} = 0$, le rang de ν_1 est inférieur ou égal à 1. (*cf.* proposition 2). Soit $U = \{p \in M / \mathrm{Rang}(\nu_1)_p = 0\}$. Si U contient un ouvert, ν_1 est constant sur un ouvert. Dans le cas analytique, ν_1 est donc constant. Si Int $U = \varnothing$, le rang de ν_1 est nul en des points isolés. Par conséquent, le rang de ν_1 égale 1 presque partout. Appliquons la Proposition 2 à $M \setminus \mathrm{Int}(U)$. On conclut que $\nu_1(M \setminus \mathrm{Int}(U))$ appartient à un grand cercle. Donc $M \setminus \mathrm{Int}((U)$ est Lagrangien pour une structure complexe J sur E^4, et, par continuité, il en est de même pour M. La réciproque est évidente. Dans le cas C^∞, on a simplement un résultat local.

4. Problème d'existence d'immersions isométriques lagrangiennes

Nous allons montrer, dans ce paragraphe, que localement, une surface de Riemann peut toujours être isométriquement et analytiquement immergée dans E^4 telle que $G = G^D$. Globalement, nous montrons qu'il existe des surfaces riemanniennes qui peuvent être isométriquement immergées dans E^3, ou E^4, mais qui ne peuvent pas être isométriquement immergées comme surface lagrangienne de C^2.

THÉORÈME 3. — *Localement, toute surface de Riemann admet une immersion analytique, isométrique dans* E^4 *telle que* $G = G^D$.

THÉORÈME 4. — *Si la courbure de Gauss d'une surface riemannienne compacte est strictement positive en tout point, il n'existe pas d'immersion isométrique lagrangienne de cette surface dans* C^2.

En particulier, il n'existe pas d'immersion *isométrique* lagrangienne de la sphère à courbure constante dans C^2, bien que l'immersion de Whitney (cf. [Wh] par exemple)

$$f : E^3 \to C^2$$
$$(x_1, x_2, x_3) \to f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 2x_1x_3, 2x_2x_3)$$

soit telle que $f|_{S^2}$ soit lagrangienne de S^2 dans C^2.

Démonstration du théorème 3. — Soit M une surface de Riemann et p un point de M. Soit U un voisinage de p de coordonnées isothermes (x, y) sur U. Le tenseur métrique g sur U s'écrit

$$g = E(dx^2 + dy^2); \qquad x(p) = y(p) = 0. \tag{17}$$

où E est une fonction analytique positive. On déduit de (1)

$$g^{ij} = \frac{\delta_{ij}}{E},$$

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = -\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial x}, \tag{18}$$

$$\Gamma^2_{22} = \Gamma^1_{12} = -\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial y},$$

où l'on a posé

$$\nabla_{\partial/\partial x}\frac{\partial}{\partial x} = \Gamma^1_{11}\frac{\partial}{\partial x} + \Gamma^2_{11}\frac{\partial}{\partial y},$$

$$\nabla_{\partial/\partial x}\frac{\partial}{\partial y} = \Gamma^1_{12}\frac{\partial}{\partial x} + \Gamma^2_{12}\frac{\partial}{\partial y},$$

$$\nabla_{\partial/\partial y}\frac{\partial}{\partial y} = \Gamma^1_{22}\frac{\partial}{\partial x} + \Gamma^2_{22}\frac{\partial}{\partial y}.$$

On déduit de (2) que

$$G = -\frac{\Delta \log E}{2E}. \tag{19}$$

Considérons le système d'équations suivant :

$$\text{(20)} \qquad \mathrm{EG}=\alpha\gamma-\beta^2+\beta\delta-\gamma^2,$$

$$\text{(21)} \qquad \frac{\partial\gamma}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}=(\alpha-\gamma)\,\Gamma_{11}^1+(\beta-\delta)\,\Gamma_{22}^2,$$

$$\text{(22)} \qquad \frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}=-2\,\beta\,\Gamma_{11}^1-2\,\gamma\,\Gamma_{22}^2,$$

$$\text{(23)} \qquad \frac{\partial\delta}{\partial x}-\frac{\partial\gamma}{\partial y}=2\,\beta\,\Gamma_{11}^1+2\,\gamma\,\Gamma_{22}^2.$$

Utilisons le théorème d'existence de Cauchy-Kovalewski : Le système admet une solution (α, β, γ, δ) sur un voisinage simplement connexe W de p. Soit $\mathrm{N}=\mathrm{W}\times\mathrm{E}^2$. Considérons N comme l'espace total d'un fibré trivial au dessus de W. C'est un fibré vectoriel riemannien, si l'on munit chaque fibré du produit scalaire usuel. Soit (e_3, e_4) le repère canonique (orthonormé) de E^2. Définissons une connexion métrique D sur E^2 par

$$\text{(24)} \qquad \begin{aligned} \mathrm{D}_{\partial/\partial x}(\sqrt{\mathrm{E}}\,e_3)&=\Gamma_{11}^1\sqrt{\mathrm{E}}\,e_3+\Gamma_{11}^2\sqrt{\mathrm{E}}\,e_4,\\ \mathrm{D}_{\partial/\partial x}(\sqrt{\mathrm{E}}\,e_4)&=\Gamma_{12}^1\sqrt{\mathrm{E}}\,e_3+\Gamma_{12}^2\sqrt{\mathrm{E}}\,e_4,\\ \mathrm{D}_{\partial/\partial y}(\sqrt{\mathrm{E}}\,e_4)&=\Gamma_{22}^1\sqrt{\mathrm{E}}\,e_3+\Gamma_{22}^2\sqrt{\mathrm{E}}\,e_4. \end{aligned}$$

Définissons également un tenseur bilinéaire symétrique

$$h:\quad \mathrm{TW}\times\mathrm{TW}\to\mathrm{N}$$

par

$$\text{(25)} \qquad \begin{aligned} h\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right)&=\alpha\sqrt{\mathrm{E}}\,e_3+\beta\sqrt{\mathrm{E}}\,e_4,\\ h\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)&=\beta\sqrt{\mathrm{E}}\,e_3+\gamma\sqrt{\mathrm{E}}\,e_4,\\ h\left(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right)&=\gamma\sqrt{\mathrm{E}}\,e_3+\delta\sqrt{\mathrm{E}}\,e_4. \end{aligned}$$

(20), (21), (22), (23), (24) montrent que, sur le fibré riemannien $\mathrm{N}=\mathrm{W}\times\mathrm{E}^2$, de base W, le tenseur h et la connexion D vérifient les équations de Gauss, Codazzi, Ricci. Le théorème fondamental d'existence des sous-variétés (*cf.* [1] par exemple) implique que W peut être isométriquement immergé dans E^4, de façon telle que sa seconde forme fondamentale soit h et sa connexion normale soit D. On déduit de (25) que $\mathrm{G}=\mathrm{G}^{\mathrm{D}}$ pour une telle immersion.

Démonstration du théorème 4. — Soit M une surface Lagrangienne compacte de C^2. D'après le théorème 2, on a, en tout point, $\dim\mathrm{Ker}(\nu_1)_*\geqq 1$. Si $\dim\mathrm{Ker}(\nu_1)_*=1$ partout, alors TM admet une section partout non nulle et $\chi(\mathrm{M})=0$ ce qui est impossible d'après le théorème de Gauss-Bonnet puisque G est strictement positif. Par suite, il existe un point p tel que $((\nu_1)_*)_p=0$. Avec les notations de la Proposition 3, ceci implique

$$h_{11}^3=h_{12}^4, \qquad h_{22}^4=h_{12}^3, \qquad h_{11}^4=-h_{12}^3, \qquad h_{22}^3=-h_{12}^4.$$

Au point p, la courbure de Gauss G_p vérifie

$$G_p=2(-(h_{11}^3)_p^2-(h_{12}^3)_p^2) \leqq 0.$$

(En particulier, p et un point minimal.)

5. D'autres résultats

5.1. Courbes complexes et surfaces lagrangiennes minimales. — Une des conséquences de la proposition 2 est le résultat suivant :

Théorème 5. — *Soit x : $M \to E^4$ une immersion isométrique minimale d'une surface dans E^4. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe sur E^4 une structure complexe telle que M soit lagrangienne.*

(ii) *Il existe sur E^4 une structure complexe telle que M soit une courbe complexe.*

Démonstration du théorème 5. — Soit $\nu=(\nu_1, \nu_2)$: $M \to S_+^2 \times S_-^2$ l'application de Gauss associée à x. Il est bien connu que x est minimal si et seulement si ν_1 et ν_2 sont holomorphes (*cf.* [9] par exemple). Soit U un ouvert de M. $\nu_1(U)$ est un ouvert ou un point. Puisque x est Lagrangien, $\nu_1(U)$ est une courbe. C'est donc un point. On applique alors la Proposition 2.2 (i). La réciproque est également une conséquence directe de la Proposition 2.2 (ii).

5.2. Déformation des sous variétés lagrangiennes plates. — En appliquant un résultat de Witt [12], on montre facilement le théorème suivant :

Théorème 6. — *Si x : $U \to C^2$ une immersion isométrique lagrangienne analytique d'un ouvert simplement connexe U du plan Euclidien E^2, à valeur dans C^2. Alors x est homotope à l'immersion lagrangienne standard (totalement géodésique) de U dans C^2, à travers des immersions isométriques analytiques lagrangiennes à un déplacement près.*

Démonstration du théorème. — On applique le théorème fondamental d'existence d'immersion, en construisant une famille de fibres $TU \times N_t$, une famille de connexions D_t et de tenseurs h_t, $t \in [0, 1]$, tels que

$$N_t=T^{\perp}U, \qquad \forall t \in [0, 1],$$
$$D_t=D, \qquad \forall t \in [0, 1],$$
$$h_t=th, \qquad \forall t \in [0, 1].$$

Puisque $G=G^D=0$, les équations de Gauss-Codazzi-Ricci sont satisfaites pour tout t. On obtient donc une homotopie d'immersions isométriques x_t, telle que $G_t=G_t^D=\mathscr{H}_t=0$. On applique alors le théorème 1 pour conclure.

5.3. SOUS-VARIÉTÉS QUI NE SONT NULLE PART LAGRANGIENNES. — Dans [8], D. Hoffman, R. Osserman et R. Schoen ont étudié les surfaces de E^4 telles que l'image de ν_1 appartienne à un hémisphère ouvert de S^2. En utilisant notre interprétation de $\Lambda^2 E^4$, ceci signifie qu'il existe une structure complexe sur E^4 telle que cette surface ne soit lagrangienne en aucun point. Nous donnons ici des restrictions géométriques et topologiques de telles surfaces.

THÉORÈME 7. — *Soit* $x: M \to C^2$ *une immersion d'une surface compacte* M *à valeurs dans* C^2. *Si* M *n'est lagrangienne en aucun point, alors*

(i) *Il existe un point* p *de* M *telle que* $G_p = G_p^D$;

(ii) $\chi(M) = \chi(T^\perp M)$.

Démonstration du théorème 7. — Soit $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ l'application de Gauss associée à x. Si aucun plan tangent à M n'est lagrangien, l'image de ν_1 appartient à un hémisphère ouvert de S^2. Par conséquent, $\nu_1(M)$ à un bord. Si $p \in \partial(\nu_1(M))$, $((\nu_1)_*)_p$ à un rang < 2. Ceci implique que $G = G^D$.

Appliquons le théorème de l'index à l'application ν_1. Nous obtenons

$$\int_M \nu_1^*(dS^2) = \int_M (G - G^D)\, dM = \chi(M) - \chi(T^\perp M) = 0.$$

D'où l'on déduit (ii).

En utilisant le fait que $\chi(T^\perp M)/2 = q$, où q est le nombre d'autointersections de x, on déduit du théorème 7 les deux corollaires suivants :

COROLLAIRE 1. — *Soit* $x: S^2 \to C^2$ *une immersion d'une sphère dans* C^2. *Si* x *à un nombre d'auto-intersections* $q \neq 1$, *il existe un plan tangent à* S^2 *dans* C^2, *qui est lagrangien.*

COROLLAIRE 2. — *Soit* $x: S^2 \to C^2$ *une immersion telle que* x *soit régulièrement homotope au plongement standard de* S^2 *dans un hyperplan de* C^2. *Alors il existe un plan tangent de* S^2 *qui est lagrangien.*

5.4. UNE REMARQUE SUR L'HYPOTHÈSE $G = G^D$. — Comme nous l'a fait remarquer J. Weiner, l'hypothèse $G = G^D$ n'est pas suffisante pour affirmer l'existence d'une structure complexe qui rende la sous-variété lagrangienne. L'exemple suivant permet de s'en convaincre : Soient $\nu_i: (0, 1) \to S^2$, $i \in \{1, 2\}$ deux courbes régulières de S^2. Soit $\nu = \nu_1 \times \nu_2: (0, 1) \times (0, 1) \to S^2 \times S^2 \simeq G(2, 4)$. En utilisant les résultats de [10], il est facile de montrer que ν est l'application de Gauss d'une immersion $x: (0,1) \times (0,1) \to E^4$ telle que $G = G^D = 0$. Cependant, si l'image de ν_1 n'apparient pas à un grand cercle de S^2, x n'est lagrangienne pour aucune structure complexe sur E^4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Y. CHEN, *Geometry of Submanifolds*, Marcel Dekker, New York, 1973.

[2] B. Y. CHEN et C. S. HOUH, *On Totally Real Flat Surfaces* (*Boll. Un. Mat. Ital.*, vol. 15, 1978, p. 370-378).

[3] B. Y. CHEN et K. OGIUE, *On Totally Real Submanifolds* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 193, 1974, p. 257-266).

[4] B. Y. CHEN et J.-M. MORVAN, *Propriétés riemanniennes des surfaces lagrangiennes* (*C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 300, 1985, p. 209-212.

[5] S. S. CHERN et E. SPANIER, *A Theorem on Orientable Surfaces in Four Dimensional Space* (*Comm. Math. Helv.*, t. 25, 1951, p. 205-209).

[6] M. GROMOV, *A Topological Technique for the Construction of Solutions of Differential Equations and Inequalities* (*Int. Congr. of Math.*, Nice, 1970, vol. 2, Gauthier-Villars, Paris, 1971, p. 221-225).

[7] D. HOFFMAN et R. OSSERMAN, *The Gauss Map of Surfaces in* $\mathbb{R}^3$ *and* $\mathbb{R}^4$ (*Proc. London Math. Soc.*, (3), 50, 1985, p. 27-56.

[8] D. HOFFMAN, R. OSSERMAN et R. SCHOEN, *On the Gauss Map of Complete Surfaces of Constant Mean Curvature in* $\mathbb{R}^3$ *and* $\mathbb{R}^4$ (*Comment. Math. Helv.*, vol. 57, 1982, p. 519-531).

[9] B. LAWSON, *Lectures on Minimal Submanifolds I.* Publish or Perish, Berkeley, 1980.

[10] J. L. WEINER, *The Gauss Map for Surfaces in 4-Spaces* (*Math. Ann.*, vol. 269, 1984, p. 541-560).

[11] A. WEINSTEIN, *Lectures on Symplectic Manifolds* (*Conference Board of the Mathematical Sciences*, n° 2).

[12] L. WITT, *Isometric Homotopy and Codimension Two Isometric Immersions of the n-Sphere Into Euclidean Space* (*J. Diff. Geom.*, vol. 14, 1979, p. 295-302).

(Manuscrit reçu en novembre 1985.)

B.-Y. CHEN,
Michigan State University,
Department of Mathematics,
East Lansing, MI 48824,
U.S.A.;

J.-M. MORVAN,
Faculté de Sciences d'Avignon,
33, rue Louis-Pasteur,
84000 Avignon,
France