J.-M. MORVAN

Obstructions à la transversalité de deux champs de plans lagrangiens

INTRODUCTION

Le rôle fondamental de la géométrie symplectique en analyse et en mécanique a conduit à étudier localement, puis globalement, les variétés symplectiques, leurs sous-variétés et feuilletages Lagrangiens.

- Localement, le théorème de Darboux et ses généralisations (Kostant, Souriau, Weinstein, Libermann) (5), (8), montrent qu'il n'y a qu'un seul modèle au voisinage d'un point, d'une sous-variété ou d'un feuilletage Lagrangien : c'est la structure symplectique standard de $\mathbb{C}^n$.

- On connaît par contre peu de choses sur la topologie des sous-variétés Lagrangiennes et des variétés munies d'un feuilletage Lagrangien : un des principaux résultats est qu'une feuille d'un feuilletage Lagrangien est affine (2), (8). En quantification, il est intéressant de considérer des variétés munies de deux feuilletages Lagrangiens transverses. C'est pourquoi Leray, Maslov, Arnold, ont étudié les variétés munies de deux champs de plans Lagrangiens et mis en évidence une classe de cohomologie de degré 1, (la classe de Maslov), qui est une obstruction à leur transversalité (cf.(5) par exemple).

Cet exposé se propose d'exhiber explicitement une autre obstruction du même type d'ordre 5, en utilisant la structure d'espace symétrique de la grassmannienne Lagrangienne. On pourra consulter (1), (3) pour une étude plus topologique et pour la classification des singularités.

L'auteur tient à remercier le Pr.Nagano pour une correspondance très utile, le Pr.Dazord pour de fructueuses discussions, et Madame M.Lefebvre qui a parfaitement assuré la frappe de ce texte.

1ère partie : ESPACES VECTORIELS SYMPLECTIQUES - FIBRES SYMPLECTIQUES LA GRASSMANNIENNE LAGRANGIENNE

1. ESPACES VECTORIELS ET FIBRES SYMPLECTIQUES (5)

1.1 Espaces vectoriels symplectiques.

Soit E un espace vectoriel symplectique (i.e muni d'une deux-forme Ω non dégénérée), de dimension 2n. Un plan L de E est dit Lagrangien si

- dim L = n.
- $\Omega|_L \equiv 0$ c'est-à-dire $\Omega(X,Y) = 0 \quad \forall X,Y \in L$.

1.2 La grassmannienne Lagrangienne

1.2.1 Définition : On appelle Grassmannienne Lagrangienne orientée d'un espace vectoriel symplectique E, l'espace des n-plans Lagrangiens orientés (passant par l'origine), noté $\mathcal{L}(E)$.

1.2.2 L'isomorphisme : $\mathcal{L}(E) \simeq U(n)/SO(n)$.

Une structure presque complexe compatible avec la structure symplectique d'un espace vectoriel symplectique E, est la donnée d'un couple (J,g), où g est un produit scalaire et J un tenseur de type (1,1) tel que $J^2 = -Id$ satisfaisant :

$$\Omega(X,Y) = g(X,JY) \quad \forall X,Y \in E$$

Il est bien connu que, la donnée :

- d'un plan Lagrangien L orienté
- d'une structure presque complexe (g,J) compatible avec Ω,

permet de définir un isomorphisme canonique entre $\mathcal{L}(E)$ et $U(n)/SO(n)$. Cet isomorphisme se construit de la façon suivante :

si $(e_1,\dots e_n)$ est une base directe de L, $(e_1,\dots,e_n, Je_1,\dots Je_n)$ est une base de E. A toute matrice M de U(n), on associe le plan Lagrangien M(L). Ceci définit une action de U(n) sur $\mathcal{L}(E)$ dont le sous-groupe d'isotropie est SO(n).

D'autre part, on sait que deux structures presque complexes (J_1,g_1) (J_2,g_2) compatibles avec Ω se déduisent l'une de l'autre par déformation. Par suite, si i_1 et i_2 sont deux identifications de $\mathcal{L}(E)$ associées à deux structures presque complexes (J_1,g_1) et (J_2,g_2)

$$\begin{tikzcd} & U(n)/SO(n) \\ \mathcal{L}(E) \arrow[ur, "i_1"'] \arrow[r, "i_2"'] & U(n)/SO(n) \end{tikzcd}$$

il est clair que $i_1^*(C) = i_2^*(C)$ pour toute classe de cohomologie C de $U(n)/SO(n)$.

Par conséquent, il existe un isomorphisme canonique entre les groupes de cohomologie de $\mathcal{L}(E)$ et ceux de $U(n)/SO(n)$.

Nous utiliserons dans la suite le théorème suivant :

1.2.3 Théorème

Soit E un espace vectoriel symplectique et L un plan Lagrangien orienté de E. Soit $\tau(L)$ l'ensemble des plans Lagrangiens orientés transverses à L. Alors $\tau(L)$ admet une structure d'espace affine. En particulier $\tau(L)$ est contractile dans $\mathcal{L}(E)$.

1.3 Fibrés vectoriels symplectiques - Variétés symplectiques

1.3.1 Définition

Soit (E,Π,B) un fibré vectoriel de base B. On dit que (E,Π,B) est symplectique s'il est muni d'une deux-forme $\Omega \in \overset{2}{\wedge} E$, telle qu'en tout point $p \in B$, Ω_p soit une forme symplectique sur E_p.

1.3.2 Définition

Une variété est dite symplectique si son fibré tangent est muni d'une deux-forme fermée non dégénérée.

1.3.3 Le fibré $(\mathcal{L}(E),\overline{\Pi},B)$

On appelle fibré des n-plans Lagrangiens orientés d'un fibré symplectique (E,Π,B) le fibré de base B dont la fibre au point $p \in B$ est la grassmannienne Lagrangienne orientée $\mathcal{L}(E_p)$. On note $(\mathcal{L}(E),\overline{\Pi},B)$ ce fibré.

2. L'ESPACE SYMETRIQUE $U(n)_{/SO(n)}$

2.1. Généralités

Notons $\mathcal{U}(n)$ l'algèbre de Lie de U(n), (algèbre des matrices antihermitiennes), et $\mathcal{SO}(n)$ l'algèbre de Lie de SO(n), (algèbre des matrices antisymétriques).

Rappelons la

Proposition

L'espace homogène $U(n)_{/SO(n)}$ est canoniquement muni d'une structure d'espace symétrique réel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration

- $\dim U(n)_{/SO(n)} = \dim U(n) - \dim SO(n) = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

- U(n) et SO(n) étant compacts, $U(n)_{/SO(n)}$ est muni d'une métrique invariante. Si X et Y appartiennent à $\mathcal{U}(n)$, $g(X,Y) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Trace}(X\,Y)$ est une métrique invariante sur U(n). Sa projection sur $U(n)_{/SO(n)}$ définit une métrique invariante sur $U(n)_{/SO(n)}$.

- Enfin l'automorphisme $\sigma : U(n) \longrightarrow U(n)$, défini par

$$\sigma \begin{pmatrix} M_1 & -M_2 \\ M_2 & M_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ -M_2 & M_1 \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} M_1 & -M_2 \\ M_2 & M_1 \end{pmatrix} \text{ est la}$$

représentation réelle d'une matrice de U(n), est une isométrie involutive de U(n) laissant fixe SO(n). Elle munit donc $U(n)_{/SO(n)}$ d'une structure d'espace symétrique canonique.

Remarque

Ecrivons $\mathcal{U}(n) = \mathcal{SO}(n) \oplus \mathcal{H}$, où $\mathcal{H} = \mathcal{SO}(n)^{\perp}$ pour g.

$\mathcal{H}$ est l'espace des matrices antihermitiennes imaginaires pures ; cette décomposition permet d'identifier $\mathcal{U}(n)_{/\mathcal{SO}(n)}$ et $\mathcal{H}$.

2.2 Fibration de $U(n)/SO(n)$ sur S^1.

Considérons l'application "déterminant" de $U(n)$ sur S^1 :
$U(n) \xrightarrow{\det} S^1$.

Cette application se factorise à travers le quotient $U(n)/SO(n)$ et détermine une fibration (triviale) $(U(n)/SO(n), \det, S^1)$, de base S^1, et dont la fibre type est l'espace symétrique $SU(n)/SO(n)$ simplement connexe. (on peut également fibrer $U(n)$ par l'application $\det^2$ ce qui a l'avantage de pouvoir considérer $U(n)/O(n)$). On en déduit que

$$H_1(U(n)/SO(n), \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}.$$

2.3 L'immersion de $SU(k)/SO(k)$ dans $U(n)/SO(n)$ $(n \geqslant 3)$.

L'application $U(n) \xrightarrow{\det} S^1$ permet de construire la suite exacte

$$1 \longrightarrow SU(n)/SO(n) \xrightarrow{i} U(n)/SO(n) \xrightarrow{\det} S^1 \longrightarrow 1$$

où i est l'immersion canonique de $SU(n)/SO(n)$ dans $U(n)/SO(n)$.

Considérons l'immersion $j_k : SU(k)/SO(k) \longrightarrow SU(n)/SO(n)$, $\forall k \leqslant n$ définie par

$$j_k(M) = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} \quad , \forall M \in SU(k)/SO(k) .$$

$i \circ j_k$ est une immersion canonique de $SU(k)/SO(k)$ dans $U(n)/SO(n)$.

Nous utiliserons par la suite l'immersion de $SU(3)/SO(3)$ dans $U(n)/SO(n)$, $n \geqslant 3$.

3. COHOMOLOGIE DE $U(n)/SO(n)$ ET $SU(n)/SO(n)$.

Nous avons remarqué en 2.2 que $H^1(U(n)/SO(n), \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$. Ce paragraphe complète ce résultat.

3.1 Polynômes de Poincaré de $U(n)/SO(n)$ et $SU(n)/SO(n)$

Nous donnons ici les dimensions des espaces de cohomologie réelle de $U(n)/SO(n)$ et $SU(n)/SO(n)$.

Les résultats suivants sont classiques (4) . Notons $P(U(n),t)$, (resp. $P(SU(n),t)$, $P(SO(n),t)$, $P(SU(n)/SO(n),t)$ $P(U(n)/SO(n),t)$), les polynômes de Poincaré de $U(n)$, (resp. $SU(n)$, $SO(n)$, $SU(n)/SO(n)$, $U(n)/SO(n)$).

Nous avons :

$$P(SU(n),t) = (1+t^3)(1+t^5)\dots(1+t^{2n-1})$$
$$P(U(n),t) = (1+t)(1+t^3)(1+t^5)\dots(1+t^{2n-1})$$
$$P(SO(2n),t) = (1+t^{2n-1})\left[(1+t^3)(1+t^7)\dots(1+t^{4n-5})\right]$$
$$P(SO(2n+1) = (1+t^3)(1+t^7)\dots(1+t^{4n-5})$$

Ceci implique que :

$$P(U(2n)/SO(2n),t) = (1+t)(1+t^{2n})\left[(1+t^5)(1+t^9)\dots(1+t^{4n-3})\right]$$
$$P(U(2n+1)/SO(2n+1),t) = (1+t)\left[(1+t^5)(1+t^9)\dots(1+t^{4n+1})\right]$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} \dim H^k(U(n)/SO(n),\mathbb{R}) = 0 & \text{si } k = 2,3,4 \text{ et } n \geqslant 3 \\ \dim H^5(U(n)/SO(n),\mathbb{R}) = 1 \end{cases}$$

La classe de Maslov est la classe de cohomologie entière engendrant $H^1(U(n)/SO(n),\mathbb{Z})$, c'est-à-dire le pull-back par la submersion $U(n)/SO(n) \xrightarrow{\det} S^1$, de la classe de cohomologie représentée par la forme volume de S^1. L'objet du paragraphe qui suit est l'étude géométrique du $H^5(U(n)/SO(n),\mathbb{R})$.

3.2 Etude du $H^5(U(n)/SO(n),\mathbb{R})$

Commençons par étudier le cas $n = 3$, fondamental pour la suite.

3.2.1 Généralités sur $SU(3)/SO(3)$

L'étude faite au paragraphe 3.1 permet de caractériser l'espace $SU(3)/SO(3)$.

On a la

Proposition

$SU(3)/SO(3)$ est un espace symétrique de dimension 5, dont le polynôme de Poincaré vérifie

$$P(SU(3)/SO(3)) = (1+t^5)$$

(c'est donc une sphère homologique).

3.2.2 Etude de $\mathfrak{su}(3)/\mathfrak{so}(3)$.

Explicitons une base B de $\mathfrak{su}(3)/\mathfrak{so}(3)$. En identifiant $\mathfrak{su}(3)/\mathfrak{so}(3)$ avec l'orthogonal $\mathfrak{so}(3)^{\perp}$ de $\mathfrak{so}(3)$ dans $\mathfrak{su}(3)$, nous pouvons prendre

$B = (E_1, E_2, E_3, E_4, E_5)$, avec

$$E_1 = i\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad E_2 = i\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad E_3 = i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_4 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad E_5 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2.3 Forme volume de $SU(3)/SO(3)$.

Considérons la 5-forme $\overline{\theta}_5$ invariante à gauche, sur $SU(3)/SO(3)$, définie en l'élément neutre de $SU(3)/SO(3)$ par

$$\overline{\theta}_5(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = \frac{1}{i} \sum_{\varepsilon \in \mathfrak{S}_5} \mathrm{Sign}(\varepsilon)\, \mathrm{Trace}(X_{\varepsilon_1} X_{\varepsilon_2} X_{\varepsilon_3} X_{\varepsilon_4} X_{\varepsilon_5})$$

$$\forall X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \in T_e(SU(3)/SO(3)) = \mathfrak{su}(3)/\mathfrak{so}(3).$$

Nous avons la

Proposition

$\overline{\theta}_5$ est une forme volume sur $SU(3)/SO(3)$.

Démonstration

Il suffit de vérifier que $\overline{\theta}_5(E_1, E_2, E_3, E_4, E_5) \neq 0$, ce qui est un long calcul.

3.2.4 5-Forme harmonique sur $U(n)/SO(n)$.

Supposons ici $n \geqslant 3$.

Nous nous proposons de montrer le théorème suivant :

Théorème

Soit θ_5 la 5-forme invariante à gauche sur $U(n)/SO(n)$ définie par

$$\theta_5(X_1, \ldots X_5) = \frac{1}{i} \sum_{\varepsilon \in \mathfrak{S}_5} \mathrm{Sign}(\varepsilon)\, \mathrm{Tr}(X_{\varepsilon_1} \ldots X_{\varepsilon_5})$$

$$\forall X_1 \ldots X_5 \in \mathfrak{u}(n)/\mathfrak{so}(n).$$

θ_5 est harmonique et sa classe de cohomologie engendre $H^5(U(n)/SO(n), \mathbb{R})$.

Notation

On note $\omega_5 = [\theta_5]$ la classe de cohomologie de θ_5.

On appelle ω_5 la classe canonique de $H^5(U(n)/SO(n),\mathbb{R})$.

Démonstration

On a d'abord $\dim H^5(U(n)/SO(n),\mathbb{R}) = 1$.

Soit θ_5 la 5-forme invariante à gauche sur $U(n)/SO(n)$ définie par

$$\theta_5(X_1,\dots,X_5) = \frac{1}{i} \sum_{\varepsilon \in \mathcal{S}_5} \mathrm{Sign}(\varepsilon)\mathrm{Tr}(X_{\varepsilon_1} X_{\varepsilon_2} X_{\varepsilon_3} X_{\varepsilon_4} X_{\varepsilon_5})$$

$$\forall X_1,X_2,X_3,X_4,X_5 \in \mathcal{U}(n)/\mathcal{SO}(n)$$

θ_5 est U(n)-invariante:

On a en effet $\mathrm{Ad}_A^* \theta_5(X_1,\dots,X_5) = \theta_5(A^{-1} X_1 A,\dots,A^{-1}X_5A)$

$$= \frac{1}{i} \sum_{\varepsilon \in \mathcal{S}_5} \mathrm{Sign}(\varepsilon)\mathrm{Tr}(A^{-1}X_1AA^{-1}X_2A\dots A^{-1}X_5A)$$

$$= \theta_5(X_1,\dots,X_5),\ \forall A \in U(n).$$

Enfin la forme θ_5 est non nulle ; considérons $\mathrm{ioj}_3 : SU(3)/SO(3) \to U(n)/SO(n)$ l'immersion canonique définie au 2.3. On a $\mathrm{ioj}_3^*(\theta_5) = \overline{\theta}_5 \neq 0$, où $\overline{\theta}_5$ a été définie en 3.2.3.

$U(n)/SO(n)$ est donc muni d'une 5-forme θ_5 invariante à gauche, non nulle, et U(n)-invariante. θ_5 est donc harmonique, et $\omega_5 = [\theta_5]$ définit une classe de cohomologie engendrant $H^5(U(n)/SO(n),\mathbb{R})$.

2ème partie : TRANSVERSALITE DE DEUX CHAMPS DE PLANS LAGRANGIENS

4 - POSITION DU PROBLEME

Tous les champs de plans Lagrangiens considérés ici sont orientés. Rappelons le cadre général géométrique sous-jacent à l'étude des singularités de certaines équations aux dérivées partielles.

On considère (E,Π,B) un fibré symplectique muni d'un champ de plans Lagrangiens L_o , c'est-à-dire une section s_o du fibré $(\mathcal{L}(E),\overline{\Pi},B)$. On se donne alors une autre section s_L de ce même fibré, c'est-à-dire un autre champ de plans Lagrangiens de E, et l'on étudie la transversalité de L_o et L.

4.1 Exemples

La situation décrite ci-dessus est classique dans les cas suivants :

(a) Sous-variétés de $\mathbb{C}^n$

Soit L une sous-variété Lagrangienne de $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^n \oplus i\,\mathbb{R}^n$. $(T_{|L}\,\mathbb{C}^n,\Pi,L)$ est un fibré symplectique admettant deux champs de plans Lagrangiens canoniques. Le champ de plan "horizontal" $\mathbb{R}^n$, et le champ de plan TL.

(b) Sous-fibré Lagrangien du fibré cotangent T^*M d'une variété M.

Soit M une variété quelconque. Le fibré cotangent à M, T^*M, est muni d'une structure symplectique Ω canonique : Si $(x_1,\dots,x_n,\ y_1,\dots,y_n)$ est un système de coordonnées standard sur T^*M, $\Omega = dx_1 \wedge dy_1 + \dots + dx_n \wedge dy_n$. Le fibré vertical V définit un feuilletage Lagrangien de T^*M. Si N est une sous-variété Lagrangienne de T^*M, $T^*_{|N}M$ est donc muni de deux champs de plans Lagrangiens : $V_{|N}$ et TN.

(c) Connexion linéaire sans torsion sur une variété M.

On peut montrer le théorème suivant :

<u>Théorème</u> : Soit M une variété munie d'une connexion linéaire ∇ . Soit ∇^* la connexion linéaire duale de ∇ sur T^*M. Alors si ∇ est sans torsion, la distribution horizontale associée canoniquement à ∇^* sur T^*M définit un champ de plans Lagrangiens transverse au fibré vertical, (lui-même Lagrangien).

4.2. Obstructions topologiques à la tranversalité de deux champs de plans Lagrangiens

Pour simplifier les constructions, nous supposerons dans la suite que le champ de plans Lagrangiens L_o est trivial. Ceci implique que le fibré (E,Π,B) est lui-même trivial. C'est le cas pour une sous-variété Lagrangienne de $\mathbb{C}^n$(4.1(a)). (On peut se ramener à cette situation dans des cas plus compliqués (cf.(1)). Ceci permet de construire une application de Gauss G, associée à tout champ de plans Lagrangiens L de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}(E) \arrow[r, "i"] \arrow[d, shift right, "\Pi"'] & U(n)/SO(n) \\ B \arrow[u, shift right, "s_L"'] \arrow[ur, "G"'] & \end{tikzcd} \quad ; \quad G = i o s_L ,$$

où i, restreint à une fibre $\mathcal{L}_p(E)$, $p \in B$, est l'identification de $\mathcal{L}_p(E)$ avec $U(n)/SO(n)$, relativement à L_{o_p} et à une structure presque complexe adaptée à la structure symplectique sur E.(cf.1.2.2).

Pour définir des obstructions à la transversalité de deux champs de plans Lagrangiens, on applique le théorème 1.2.3 de la façon suivante :

Si C est une classe de cohomologie quelconque de $U(n)/SO(n)$, telle que $G^*(C) \neq 0$ dans $H^*(B)$, groupe de cohomologie de B, alors L_o et L ne sont pas transverses, car s'ils l'étaient, l'image de G serait dans un sous-ensemble contractile de $U(n)/SO(n)$ et on aurait $G^*(C) = 0$. Par suite, le pull-back par G de toute classe de cohomologie de $U(n)/SO(n)$ est une obstruction à la transversalité de L_o et L.

Avant de poursuivre, il faut évidemment remarquer que les conditions de transversalité obtenues par cette méthode sont <u>nécessaires</u>, mais évidemment pas <u>suffisantes</u>.

Il suffit en effet de prendre un fibré symplectique dont la base est une sphère homologique ($S^n \times \mathbb{C}^m$ par exemple) pour que toutes les classes de cohomologie construites comme précédemment soient nulles, quels que soient les sous-fibrés Lagrangiens considérés, si n est impair et $n \neq 4k+1$ $\forall k \in N$.

D'autre part, si L est un champ de plans Lagrangiens transverses à L_o, on sait que l'on peut construire une structure presque complexe (g,J) sur le fibré (E,Π,B), telle que $J(L_o) = L$. L est donc également un fibré trivial. En particulier, si L est une sous-variété Lagrangienne de $\mathbb{C}^n$, transverse à un champ de plans parallèles (Lagrangiens) $\mathbb{R}^n$, TL est trivial.

5. LA CLASSE DE MASLOV - SOUS-VARIETES LAGRANGIENNES SPECIALES.

5.1. La classe de Maslov

Pour définir la classe de Maslov $m_1(L)$, on complète le diagramme précédent

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}(E) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\Pi"'] & U(n)/SO(n) \arrow[r, "\det"] & S^1 \\ B \arrow[ur, bend right, "s"'] \arrow[ur, "G"'] & & \end{tikzcd}$$

Si α est la 1-forme volume sur S^1, on a $= \frac{1}{2\Pi i} \frac{dz}{z}$.
On pose $m_1(L) = G^* \circ \det^{2*} ([\alpha]) \in H^1(B,\mathbb{Z})$.
On a, d'après le paragraphe précédent, le

Théorème

Soit (E,Π,B,L_o) un fibré vectoriel muni d'un champ de plans Lagrangiens fixé L_o.

Soit L un autre champ de plans Lagrangiens.

Si $m_1(L) \neq 0$; alors L et L_o ne sont pas partout transverses.

5.2 Sous-variétés Lagrangiennes spéciales

Un moyen efficace de construire une sous-variété Lagrangienne à classe de Maslov nulle, est d'imposer à l'application det o G d'être constante. On est ainsi amené à considérer les sous-variétés dites "Lagrangiennes spéciales", dont nous donnons maintenant avec précision la

Définition

Soit L une sous-variété Lagrangienne orientée de $\mathbb{C}^n$. L est dite spéciale si l'application det o G

$$(L \xrightarrow{G} U(n)/SO(n) \xrightarrow{\det} S^1$$

où G est l'application de Gauss de l'immersion),
est égale à l'application constante 1.

En d'autres termes, ceci signifie que l'application de Gauss G de L est à valeurs dans la fibre $SU(n)/SO(n)$ au-dessus de 1, de $U(n)/SO(n)$. De telles sous-variétés apparaissent dans un tout autre contexte, celui de la théorie des sous-variétés calibrées, définies par Harvey-Lawson (6) , dont nous esquissons ici le cadre.

5.3 Notion de variétés calibrées (6)

La remarque suivante est fondamentale dans l'étude des sous-variétés minimales :

(a) Remarque

Soit $(\tilde{M},\tilde{g})$ une variété Riemannienne, munie d'une p-forme fermée φ telle que pour tout p-plan tangent orienté ξ ,

$$\varphi_{|\xi} \leqslant \mathrm{vol}_{\xi}$$

Alors si M est une sous-variété compacte orientée de M, telle que

$$\varphi_{|M} = \mathrm{vol}_M ,$$

M minimise le volume homologiquement, c'est-à-dire que

$$\mathrm{vol}(M) \leqslant \mathrm{vol}(M') \qquad \forall M' \text{ tel que } \partial M = \partial M'$$

et $[M-M'] = 0$ dans $H_p(\tilde{M},\mathbb{R})$.

Il suffit en effet de remarquer que

$$\mathrm{vol}(M) = \int_M \varphi = \int_{M'} \varphi \leqslant \mathrm{vol}(M').$$

La donnée d'une telle forme φ s'appelle une calibration sur $\tilde{M}$, et une sous-variété M telle que $\mathrm{vol}(M) = \int_M \varphi$ s'appelle une φ-sous-variété.

(b) Un cas particulier

Intéressons-nous au cas où la variété est $\mathbb{C}^n$, et où la forme

$$\varphi = \mathrm{Re}\,\{dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n\} , \qquad \text{avec } z_j = x_j + iy_j .$$

On est amené à s'assurer que φ est une calibration, et à rechercher les φ-sous-variétés.

On peut montrer le

Théorème

1 - $\forall \xi$, n-plan tangent orienté $\varphi_{|\xi} \leqslant \mathrm{vol}_{\xi}$

2 - $\varphi_{|\xi} = \mathrm{vol}_{|\xi} \iff \xi$ est un n-plan Lagrangien spécial.

Ainsi, φ est bien une calibration, et les φ-sous-variétés sont les sous-variétés Lagrangiennes spéciales. On déduit en particulier que toute sous-variété Lagrangienne spéciale est minimale. (On retrouve ici une conséquence d'un théorème de (7) .

Démonstration du théorème

Ecrivons $dz = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$. Nous avons

$dz = \mathrm{Re}\{dz\} + \mathrm{Im}\{z\}$

$= \varphi + i\psi$ avec β réelle.

Il est facile de voir que si ξ est un n-vecteur décomposable,

$|dz(\xi)|^2 = \varphi(\xi)^2 + \psi(\xi)^2 = |\xi \wedge J\xi| \leqslant |\xi|^2$, l'égalité ayant lieu si le n-plan engendré par ξ est Lagrangien.

Par suite, $\varphi(\xi) = \mathrm{vol}(\xi) \longleftrightarrow \xi$ engendre un champ de plans Lagrangiens spécial.

(c) Etude locale

Rappelons que toute sous-variété Lagrangienne de $\mathbb{C}^n$ est localement à changement de coordonnées unitaires près, le graphe d'une fonction $\{y = f(x)\}$, où $f = \nabla F$, F étant une fonction scalaire. De la même façon, une sous-variété Lagrangienne spéciale est localement, à un changement de coordonnées spéciales unitaires près, le graphe d'une fonction $\{y = f(x)\}$, où $f = \nabla F$, F étant une fonction scalaire vérifiant une équation linéaire non elliptique. Précisons ce résultat :

Théorème

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1. Soit M le graphe de f dans $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus i\,\mathbb{R}^n$.

1 - Alors le graphe M de f est Lagrangien si et seulement si la matrice Jacobienne de f, $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ est symétrique. En particulier, si Ω est simplement connexe, M est Lagrangien si et seulement si f dérive d'un potentiel F (c.a.d $f = \nabla F$), $F \in C^2(\Omega)$.

2 - De plus, M est Lagrangien spécial si et seulement si

$\mathrm{Im}\,\{\det(I + i\,\mathrm{Hess}\,F)\} = 0$

où Hess F désigne le Hessien de F.

Remarque

Pour n=3, 2 s'écrit alors

$\Delta F = \det(\mathrm{Hess}\,F)$

c'est-à-dire que le Laplacien de F égale l'opérateur de Monge-Ampère de F. Signalons enfin qu'on trouve, dans (6) , des exemples de constructions explicites de sous-variétés Lagrangiennes spéciales.

6 - LA CLASSE CARACTERISTIQUE m_5

6.1 Définition de m_5

On suppose ici $n \geqslant 3$.

Comme nous l'avons déjà remarqué, il est clair que deux champs de plans peuvent être non transverses et avoir une classe de Maslov nulle. (Il suffit par exemple de supposer la variété de base simplement connexe). Ceci motive la recherche d'autres obstructions homologiques à leur transversalité.

Comme $H^k(U(n)/SO(n) ; \mathbb{R}) = 0$ pour $k = 2,3,4$ et $n \geqslant 3$, et $\dim H^5(U(n)/SO(n), \mathbb{R}) = 1$ si $n \geqslant 3$, nous donnons la

Définition

Soit (E,Π,B) un fibré vectoriel symplectique muni d'un champ de plans Lagrangiens trivial L_o fixé. Soit s une section du fibré $(\mathcal{L}(E),\overline{\Pi},B)$, c'est-à-dire un autre champ de plan Lagrangien L. On appelle classe caractéristique d'ordre 5 du champ de plan L relativement à L_o, la classe de cohomologie $m_5 \in H^5(B,\mathbb{R})$ définie sur B par

$$m_5 = G^*(\omega_5)$$

où G est l'application de Gauss définie par L et ω_5 est la classe canonique de $H^5(U(n)/SO(n), \mathbb{R})$.

Remarque

Comme nous l'avons déjà remarqué, cette définition est indépendante de la structure presque complexe compatible avec Ω, choisie pour définir G. En effet, si i_1 et i_2 sont deux identifications,

$$\begin{tikzcd} & U(n)/SO(n) \\ \mathcal{L}(E) \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & \\ & U(n)/SO(n) \end{tikzcd}$$

On aura :

$$G_1^*(\omega_5) = G_2^*(\omega_5).$$

6.2 Interprétation topologique de m_5

Comme la classe de Maslov, la classe caractéristique m_5 a la propriété suivante (cf. théorème 1.2.3) :

Théorème

Soit (E,Π,B,L_o) un fibré vectoriel symplectique muni d'un champ de plans Lagrangiens trivial L_o.
Soit L un autre champ de plans Lagrangiens.
Si $m_5(L) \neq 0$, alors L et L_o ne sont pas partout transverses.
En reprenant la terminologie de (6) , m_5 est la première classe cohomologique des sous-variétés Lagrangiennes spéciales.

6.3 Exemples

Les classes m_1 et m_5 sont en général non nulles. Elles sont aussi "indépendantes", comme le montrent les exemples suivants :

(a) L'immersion standard de S^1 dans $\mathbb{C}$ est à classe de Maslov m_1 non nulle et à classe caractéristique m_5 évidemment nulle.

(b) Considérons le fibré trivial :

$$\begin{array}{ccc} SU(3)/SO(3) & \times & \mathbb{C}^3 \\ \downarrow & & \\ SU(3)/SO(3) & & \end{array}$$

muni du champ de plan canonique horizontal $L_o = \mathbb{R}^n$. $(\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus i\,\mathbb{R}^n)$
Considérons L le champ de plans défini par

$$s(p) = p(L_{o_p})$$

où p représente à la fois le point de base et la matrice que l'on applique à L_{o_p}.
Il est clair que, dans ce cas, le diagramme

$$\begin{tikzcd} SU(3)/SO(3) \times \mathcal{L}(\mathbb{C}^3) \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d] & SU(3)/SO(3) \\ SU(3)/SO(3) \arrow[u, bend right, "s"'] \arrow[ur, "G"'] & \end{tikzcd}$$

montre que $m_5(L) = G^*(\omega_5) = \omega_5 \neq 0$

D'autre part $H^1(SU(3)/SO(3), \mathbb{R}) = 0$. Donc $m_1(L) = 0$.

(c) Considérons le fibré trivial

$$\begin{array}{ccc} U(3)/SO(3) & \times & \mathbb{C}^3 \\ & \downarrow & \\ & U(3)/SO(3) & \end{array}$$

muni du champ de plans canonique horizontal L_o.

Comme en 3.4.2, on considère L le champ de plan défini par $s(p)=p(L_{o_p})$.

En étudiant le diagramme

$$\begin{tikzcd} U(3)/SO(3) \times \mathcal{L}(\mathbb{C}^3) \arrow[r, "h"] \arrow[d] & U(3)/SO(3) \arrow[r, "\det"] & S^1 \\ U(3)/SO(3) \arrow[ur, bend left, "s"] \arrow[ur, "G"'] & & \end{tikzcd}$$

et en remarquant que

$$H(U(3)/SO(3)) \simeq H(SU(3)/SO(3)) \otimes H(S^1)$$

on conclut aisément que, dans ce cas

$$m_1(L) \neq 0 \text{ et } m_5(L) \neq 0$$

(d) De manière triviale, toute immersion Lagrangienne de S^2 dans $\mathbb{C}^2$, par exemple, satisfait $m_1 = 0$ et $m_5 = 0$.

(e) L'immersion du tore standard Lagrangien $T^n = S^1_1 \times \ldots \times S^1_i \times \ldots \times S^1_n \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ satisfait $m_1 \neq 0$ et $m_5 = 0$.

1. M.AUDIN, Classes caractéristiques d'immersions Lagrangiennes définies par des variétés de caustiques (même volume).

2. P.DAZORD, Invariants homotopiques attachés aux fibrés symplectiques., Ann. Inst.Fourier, Grenoble, 29, 2, 1979, 27-28.

3. D.B.FUCHS, Maslov-Arnold characteristic classes., Soviet Math Dokl., vol.9, 1968, N°1.

4. GREUB, HALPERIN, VANSTONE, Connexions, curvature and cohomology., vol.2, Academic Press, New York and London 1979.

5. V.GUILLEMIN, S.STERNBERG, Geometric Asymptotics., Survey 17, Amer.Math. Soc., 1977, Providence R.I..

6. HARVEY,LAWSON, Calibrated geometries., Acta Mathematica, 1982, 48-157.

7. J.M.MORVAN, Quelques invariants topologiques en géométrie symplectique., Ann. Inst. Henri Poincaré, vol.38 n°4, 1983, 349-370.

8. A.WEINSTEIN, Lectures on symplectic manifolds., Memoirs of the Amer.Math. Soc., n°29.