REND. SEM. MAT.
UNIVERS. POLITECN. TORINO
Vol. 36° (1977-78)

JEAN-MARIE MORVAN — RADU ROSCA

STRUCTURES PRESQUE COSYMPLECTIQUES A COUPLE DE CHAMPS QUASI-RECURRENTS RECIPROQUES

RIASSUNTO - *Si studiano le varietà para co-kähleriane aventi una coppia di campi quasi ricorrenti reciproci.*

Soit (M, g) une C^∞-variété para co-kàhlerienne [1] de dimension $2n+1$, et soit T_pM l'espace tangent en chaque point $p \in M$. On peut décomposer $T_pM = H_p \oplus D_p$, où H_p et D_p sont respectivement un $2n$-plan para-hermitien, et D_p une droite temporelle orthogonale à H_p. Soient $X_1 \in H_p$ et $X_2 \in D_p$ deux champs vectoriels formant un couple quasi-récurrent $\{X_a;\ a = 1, 2\}$ [1] sur (M, g), et soient v_a les *Pfaffiens générateurs* de ce couple. Soit (Ω, σ) une structure presque cosymplectique $\{1 \times S_p(n, R)\}$, où Ω est la 2-forme para-hermitienne échangeable avec la métrique de H_p, et σ est le covecteur de Reeb. On dit que la structure $\{1 \times S_p(n, R)\}$ est à distribution horizontale involutive si σ est fermée. On montre que toute variété (M, g) munie d'une pareille structure $\{1 \times S_p(n, R)\}$ et portant un couple $\{X_a\}$ quasi-récurrent réciproque est Ricciplate, et les deux vecteurs X_a du couple définissent un espace dont tous les vecteurs sont des champs de Killing qui, en outre, sont des géodésiques. Différents automorphismes de ces champs sont discutés.

Enfin, si l'on considère l'immersion $x : M' \to M$, ou M' est l'hypersurface définie par $\sigma = 0$, celle-ci est cylindrique et la valeur

---

Classificazione per soggetto AMS (MOS) 1970: 53B99.

induite X_1' du champ horizontal du couple $\{X_a, a=1, 2\}$ est une direction principale de l'application de Weingarten sur M'.

1. Soit (M, g) une C^∞-variété Riemannienne ou Pseudo-Riemannienne et soit $T_p(M)=T_p'(M)\oplus T_p''(M)$ une décomposition orthogonale de l'espace tangent en chaque point $p\in M$. $X_1\in T_p'(M)$ et $X_2\in T_p''(M)$ étant deux champs vectoriels sur M, nous avons défini [2] le couple $\{X_a, a=1, 2\}$ comme étant *quasi-récurrent réciproque* (noté par $\{X_a\}_{q,r}$) si l'on a:

$$(1.1)\qquad \nabla X_a=u_a\otimes X_a+v_a\otimes X_b\ ,\qquad a, b=1, 2, a\neq b\ .$$

Dans 1.1, ∇ est la connexion de Levi Civita associée à g, et u_a, $v_a\in T_p{}^*$ sont des 1-formes.

Si j est l'isomorphisme canonique défini par g, les équations (1.1) entrainent que le système de Pfaff $\mathcal{S}$ (jX_a, jX_b) est complètement intégrable.

$$(1.2)\qquad d(jX_a)=u_a\wedge jX_a+v_a\wedge jX_b\ .$$

(Les 1-formes v_a s'appellent les formes génératrices de $\mathcal{S}$). On a:

$$(1.3)\qquad Si\,\|X_a\|\neq 0\ ,\qquad u_a=\frac{d\,\|X_a\|}{\|X_a\|},\qquad \|X_1\|^2 v_2+\|X_2\|^2 v_1=0\ ;$$

et le système $\mathcal{S}$ est $*$-invariant:

$$(1.4)\qquad d*(jX_a)=u_a\wedge *(jX_a)+v_a\wedge *(jX_b)\ .$$

Mieux, si (M, g) est Riemannienne, et si $\|X_a\|\neq 0$ en tout point, $\|X_b\|\neq 0$ en tout point, l'équation 1.1 montre que $\{X_a, X_b\}$ est une distribution parallèle de dimension 2. Par suite, utilisant le théorème de décomposition de De Rham [5], on en déduit que M est localement le produit des deux sous-variétés intégrales de $\{X_a, X_b\}$ et $\{X_a, X_b\}^\perp$.

2. Supposons que (M, g) est une C^∞-variété para-cokàhlerienne [6] de dimension $2n+1$. Soit $R(M)$ le fibré des repères de Witt de

M et $\{h_A, A=1, ..., 2n+1\}$, σ^A respectivement la base vectorielle et la base duale d'un repère $\mathfrak{R} \in \mathfrak{R}(M)$; soit $\theta(=\theta^A_B)$ les formes de connexion sur $\mathfrak{R}(M)$.

Les $h_{i'}, h_i'$ $(i=1 \ldots n, i'=i+n)$ sont isotropes réels et $h_{2n+1}=h$ est un vecteur temporel unitaire. Si D_p est la droite portant h, on peut décomposer l'espace tangent T_pM en $p \in M$ en

$$T_p(M)=H_p \oplus D_p \tag{2.1}$$

où H_p est un espace vectoriel parahermitien (de dimension $2n$) orthogonal à D_p. Les vecteurs h_A sont normés, soit:

$$\begin{aligned} &g(h_i, h_A)=0\,, \quad g(h_{i'}, h_B)=0 \qquad A \neq i', B \neq i \\ &g(h_i, h_{i'})=1\,, \quad g(h, h)=1\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

La 1-forme de soudure dp (1-forme vectorielle canonique sur M) est

$$dp=\theta^A \otimes h_A\,, \tag{2.3}$$

et M est structurée par la connexion ∇ telle que

$$\nabla h_A=\theta^B_A \otimes h_B\,; \qquad \theta^B_A=l^B_{AC}\sigma^C\,. \tag{2.4}$$

De (2.2) et (2.3), on déduit [6]:

$$\left\{\begin{aligned} &\theta^i_{i'}=0\,, \quad \theta^{i'}_i=0\,, \quad \theta^{2n+1}_{2n+1}=0 \\ &\theta^i_j+\theta^{i'}_{j'}=0\,, \quad \theta^i_{j'}+\theta^j_{i'}=0 \\ &\theta^{2n+1}_i+\theta^{i'}_{2n+1}=0\,, \quad \theta^i_{2n+1}+\theta^{2n+1}_{i'}=0\,. \end{aligned}\right. \tag{2.5}$$

La connexion ∇ étant sans torsion et la connexion ∇_H induite sur H_p étant par définition une connexion de Chern-Libermann (connexion Ch-L) les groupes d'équations de structure s'écrivent:

$$\left\{\begin{aligned} &d\theta^i=\theta^k \wedge \theta^i_k+\theta^{2n+1} \wedge \theta^i_{2n+1} \\ &p\theta^{i'}=\theta^{k'} \wedge \theta^{i'}_{k'}=\theta^{2n+1} \wedge \theta^{i'}_{2n+1} \\ &d\theta^{2n+1}=\theta^r \wedge \theta^{2n+1}_r\,, \qquad r=1, ..., 2n \text{ et} \end{aligned}\right. \tag{2.6}$$

$$(2.7)\qquad \begin{cases} d\theta^i_k = \theta^l_k \wedge \theta^i + \theta^{2n+1}_k \wedge \theta^i_{2n+1} + \Omega^i_k \\ d\theta^{i'}_{k'} = \theta^{l'}_{k'} \wedge \theta^{i'}_{l'} + \theta^{2n+1}_{k'} \wedge \theta^{i'}_{2n+1} + \Omega^i_k \\ d\theta^{2n+1}_i = \theta^j_i \wedge \theta^{2n+1}_j + \Omega^{2n+1}_i \\ d\theta^{2n+1}_{i'} = \theta^{j'}_{i'} \wedge \theta^{2n+1}_{j'} + \Omega^{2n+1}_{i'} \ . \end{cases}$$

Soit maintenant

$$(2.8)\qquad X_1 = \sum_r a_r h_r \in H_p \qquad r = 1 \ldots 2n$$

un champ parahermitien, partout non nul et

$$(2.9)\qquad X_2 = fh \in D_p$$

un champ orthogonal non nul. En exprimant que ces deux champs forment un couple $\{X_a\}_{q.r}$, les conditions (1.1) (compte tenu de (2.5)) donnent:

$$(2.10)\qquad \begin{cases} da_i = a_i u_1 - \sum_k a_k \theta^i_h \\ da_{i'} = a_{i'} u_1 + \sum_k a_{k'} \theta^{k'}_i \end{cases}$$

$$(2.11)\qquad \begin{cases} f\theta^{2n+1}_i = - a_{i'} v_2 \\ f\theta^{2n+1}_{i'} = - a_i v_2 \end{cases}$$

$$(2.12)\qquad \Sigma_r a_r \theta^{2n+1}_r = f v_1 \ .$$

En posant

$$(2.13)\qquad \|X_1\| = a \Longleftrightarrow a^2 = 2\sum_i a_i a_{i'}, \text{ l'on a } u_1 = \frac{da}{a} \text{ et}$$

$$(2\ 14)\qquad a^2 v_2 + f^2 v_1 = 0 \ . \qquad \text{(d'après (1.3))}$$

D'autre part, en posant $\pi_1 = jX_1$, et $\pi_2 = jX_2$, on a:

$$(2.15)\qquad \pi_1 = \Sigma\, a_{i'} \sigma^i + \Sigma\, a_i \sigma^{i'}$$

$$(2.16)\qquad \pi_2 = f\sigma^{2n+1}, \quad u_2 = \frac{df}{f} \ .$$

A l'aide de (2.11), et en faisant usage de la dernière équation (2.6), on a aussi

$$d\sigma^{2n+1} = \frac{v_2}{f} \wedge \pi_1 \ . \tag{2.17}$$

3. Si nous considérons maintenant sur (M, g) la 2-forme parahermitienne

$$\Omega = \Sigma \sigma^i \wedge \sigma^{i'}, \tag{3.1}$$

on a visiblement

$$\text{Ker } \Omega = D_p \, ; \ (\wedge \Omega)^n \wedge \sigma \neq 0 \ \text{ ou l'on a posé } \ \sigma = \sigma^{2n+1}. \tag{3.2}$$

On peut donc dire que Ω et σ définissent une structure presque cosymplectique $\{1 \times S_p \ (n, R)\} \equiv (\Omega, \sigma)$.

A l'aide de (2.5), (2.6), (2.11), la différentiation extérieure de (3.1) donne

$$d\Omega = \sigma \wedge \frac{u_2}{f} \wedge \tilde{\pi}_1 \ , \text{ où} \tag{3.3}$$

$$\tilde{\pi}_1 = \Sigma a_i \sigma^{i'} - \Sigma a_{i'} \sigma^i \ . \tag{3.4}$$

Définition.

Nous disons qu'une structure presque cosymplectique (Ω, θ) est à *distribution horizontale involutive* si le covecteur de Reeb θ est une forme complètement intégrable.

Si E est le vecteur de Reeb $(i_E \theta = 1)$ alors on voit facilement que tout champ $W \in T_p M$ tel que $<W, E> = c^{te}$ est un champ *caractéristique* de θ si θ est fermée.

Eu égard à (2.17), on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que σ soit fermée est

$$\pi_1 = \tilde{f} v_2, \ \text{ où } \ \tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(M) \ . \tag{3.5}$$

D'autre part, de (1.1), on déduit facilement

$$\begin{aligned} dv_1 &= v_1 \wedge (u_2 - u_1) \\ dv_2 &= v_2 \wedge (u_1 - u_2) \end{aligned} \tag{3.6}$$

et eu égard à (1.2), on déduit de (3.5)

$$d\tilde{f}=\tilde{f}(2u_1-u_2)+\frac{a^2}{\tilde{f}^2}\pi_2 \tag{3.7}$$

$$dv_2=0 \Longrightarrow dv_1=0 \Longleftrightarrow (u_1-u_2)\wedge v_a=0 \ . \tag{3.8}$$

Dans ces conditions, et puisque les formes π_a sont orthogonales ($\pi_1 \wedge * \pi_2 = 0$, où $*$ dénote le « star » isomorphisme) on déduit de (1.4):

$$\begin{aligned} d\pi_2 &= u_2 \wedge \pi_2 \\ d*\pi_2 &= u_2 \wedge *\pi_2 \ . \end{aligned} \tag{3.9}$$

Ainsi la 1-forme π_2 associée au champ vertical X_2 (par rapport à la structure $\{1 \times S_p(n, R)\} \equiv (\Omega, \theta)$) est *complètement intégrable* et co-intégrable. En particulier, si $||X_2|| = c^{te}$, alors π_2 est *harmonique.*

Soit $\mu : TM \to T^*M$ l'isomorphisme de fibrés défini par $\mu : W \to i_W \Omega$, $W \in T_pM$. Compte tenu de l'expression (3.1) de Ω, on a

$$\mu X_1 = \tilde{\pi}_1 \tag{3.10}$$

et à l'aide de (2.10), la différentiation de $\tilde{\pi}_1$ donne

$$d\tilde{\pi}_1 = u_1 \wedge \tilde{\pi}_1 \ . \tag{3.11}$$

La différentiation des équations (2.11) donne, compte tenu de (3.8)

$$\Omega_r^{2n+1} = 0 \ . \tag{3.12}$$

D'autre part, la différentiation extérieure de (2.10) donne

$$\begin{aligned} \sum_i a_i \Omega_i^k &= 0 \\ \sum_i a_{i'} \Omega_k^{i'} &= 0 \ . \end{aligned} \tag{3.13}$$

Mais, puisque, en général, compte tenu de (3.12), on a:

$\Omega^i_j = -R^i_{jkl}$, $\sigma^k \wedge \sigma^{l'}$, le tenseur de Ricci R' a pour composante $R_{kl'}$. Les équations (3.13) donnent alors après calcul $R_{ik'} = 0 = R_{i'k'}$ et par conséquent $R' = 0$.

THÉORÈME.

Soit (M, g) une variété para co-kählérienne, et soit Ω et θ respectivement la 2-forme hermitienne et la 1-forme verticale associée à g. Si X_1, X_2 sont respectivement un champ horizontal et un champ vertical de M partout non nuls, formant un couple quasi récurrent réciproque $\{X_a, a = 1, 2\}_{qr}$, et v_a les 1-formes génératrices, et si j est l'isomorphisme défini par g, alors:

(i) La condition nécessaire et suffisante pour que (Ω, θ) définisse une structure presque cosymplectique à distribution horizontale involutive est que jX_1 soit conforme à v_2.

(ii) Toute pareille variété presque cosymplectique est Ricciplate.

4. Soient $\lambda_a \in C^\infty(M)$ 2 fonctions satisfaisant le système complètement intégrable:

$$d\lambda_a + \lambda_a u_a + \lambda_b v_b = 0 \; ; \qquad a, b = 1, 2, a \neq b \tag{4.1}$$

que nous dénommerons le *système associé* à (1.2).

Considérons le champ vectoriel

$$Z = \sum_a \lambda_a X_a \; . \tag{4.2}$$

On déduit aussitôt à l'aide de (1.1), (1.3) et (4.1)

$$\|Z\| = c^{te}, \; \nabla_Z Z = 0, \text{ ce qui montre que } Z \text{ est } \textit{géodésique}. \tag{4.3}$$

D'autre part, D étant un champ arbitraire sur M, on déduit de (1.2)

$$\begin{aligned} \nabla_W X_1 &= u_1(W) X_1 = v_1(W) X_2 \\ \nabla_W X_2 &= u_2(W) X_2 = v_2(W) X_1 \; . \end{aligned} \tag{4.4}$$

Si $W_i \in T_p(M)$ est un second champ arbitraire, on trouve facilement

$$g(\nabla_{W'} Z, W) + g(\nabla_W Z, W') = 0 \; , \tag{4.5}$$

ce qui exprime de manière invariante que Z est un *champ de Killing*.

On vérifie aussi à l'aide de (1.4) que la 1-forme jZ est harmonique ($\Delta\, jZ = 0$).

Soit maintenant la 2-forme

$$\mu = \frac{\pi_1 \wedge \pi_2}{a|f|} \quad . \tag{4.6}$$

A l'aide de (1.2), on trouve

$$d\mu = 0 \quad , \tag{4.7}$$

et puisque $\operatorname{Ker} \mu \neq 0$, la 1-forme μ est *presque symplectique* [3]. On a

$$i_Z \mu = \lambda_1 \frac{a}{|f|} \pi_2 - \lambda_2 \frac{|f|}{a} \pi_1 \quad , \tag{4.8}$$

et par différentiation extérieure, on trouve, à l'aide de (1.2), (1.3) et (3.9)

$$d i_Z \mu = 0 \Longrightarrow \mathcal{L}_Z \mu = 0 \quad . \tag{4.9}$$

Ainsi tout champ Z est un *automorphisme infinitésimal* de μ. D'autre part, eu égard à (3.3), (3.4), (3.11), on trouve:

$$\mathcal{L}_Z \Omega = \frac{a^2}{f^2} \frac{\lambda_1}{f} \tilde{\pi}_1 \wedge \pi_2 \quad . \tag{4.10}$$

La différentiation extérieure de (4.10), donne, compte tenu de (3.6)

$$d \mathcal{L}_Z \Omega = 0 \quad . \tag{4.11}$$

Ainsi Ω est *relativement invariante* par Z.

THÉORÈME.

Soit $\{M, \Omega, \theta, g\}$ la variété para cokählérienne définie aux n° 2 et 3. On a les propriétés suivantes:

(i) Le couple $\{X_a\}_{qr}$ définit un espace vectoriel à 2 dimension de champs de Killing Z qui, en outre, sont des géodésiques.

(ii) Si j est l'isomorphisme canonique défini par g, la 2-forme $\mu = \dfrac{jX_1 \wedge jX_2}{||X_1||\,||X_2||}$ est presque cosymplectique, et tout champ de Killing Z est un automorphisme infinitésimal de μ.

(iii) La 2-forme Ω de la structure presque cosymplectique $\{1 \times S_p(n, R)\}$ est relativement invariante par Z.

5. La distribution horizontale $\mathcal{H}$ sur (M, g) étant involutive, soit $x : M' \to M$ l'immersion définie par $\sigma = 0$. L'hypersurface M' est visiblement munie d'une structure para-kählérienne, ayant la valeur induite Ω' de Ω comme forme symplectique (de (3.3), on voit que $\sigma = 0 \Longrightarrow d\Omega' = 0$). Dans ce cas, on déduit de (3.10) et (3.11) que le champ unitaire $\dfrac{X_1'}{||X_1'||}$ est un automorphisme infinitésimal de Ω'.

Le champ de Reeb h de la structure $\{1 \times S_p(n, R)\}$ devient normal à M', et la seconde forme fondamentale ϱ associée est, comme on le sait, $\varrho = -\langle dp', \nabla h \rangle$.

De (2.9) et de (1.1), on a

$$\nabla h = \left(u_2' - \frac{df'}{f}\right) \otimes h + \frac{v_2'}{f'} \otimes X_1' = \frac{v_2'}{f'} \otimes X_1' \tag{5.1}$$

et par conséquent, en vertu de (3.5), il vient finalement

$$l = -\frac{1}{\bar{f} f'}\, \pi_1' \otimes \pi_1' \,. \tag{5.2}$$

Cette expression de l montre que l'immersion x est *cylindrique* [4]. Enfin, de (5.1), on déduit

$$\nabla_{X_1'} h = \frac{1}{f'} (i_{X_1'} V_2')\, X_1' \,. \tag{5.3}$$

L'équation ci-dessus définit l'application de Weingarten

$$L : T_p M' \to T_p M'$$
$$X_1' \rightsquigarrow \nabla_{X_1'} h \,.$$

Conformément aux propriétés de l'application L, on déduit de (5.3) que le champ horizontal X_1' (induit) est une *direction principale* sur M'.

THÉORÈME.

Soit M' l'hypersurface horizontale définie par l'immersion du covecteur de Reeb θ de la structure $\{1, S_p(n, R)\}$ définie au n° 2 et 3.

Si X_1' est le vecteur horizontal induit du couple $\{X_a\}_{qr}$, alors

(i) $\dfrac{X_1'}{\|X_1'\|}$ est un automorphisme infinitésimal de la forme symplectique Ω' sur M'.

(ii) X_1' est une direction principale pour l'application de Weingarten sur M'.

(iii) L'immersion $x : M' \to M$ est cylindrique.

Accettato per la pubblicazione su proposta di F. Fava.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. ROSCA, *On total null manifolds included is a real pseudo-Euclidean space of signature* $(n, n+1)$, Mathem. Sem. der. Univ. Hambourg, Nov. 1974, pp. 9-17.

[2] R. ROSCA, *Couple de champs vectoriels quasi recurrents réciproques*, CRAS, Série A, t. 282 (1976).

[3] J. M. SOURIAU, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris, 1970.

[4] BY. CHEN, *Geometry of Submanifolds*, Marcel Dekker, 1970.

[5] KOBAYASHI-NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry*, Vol. I, Intersciences Publishers.

[6] G. VRANCEANU, R. ROSCA, *Introduction in Relativity and Pseudo-Riemannian Geometry*, Editura Academici Republicci socialiste Romania, Bucarest, 1976.

JEAN-MARIE MORVAN, U.E.R. des Sciences de Limoges, Departement de Mathématiques, 123, Rue Albert Thomas, 87100 Limoges, France.

RADU ROSCA, Faculté des Sciences et Techniques de Sfax, Tunisie.