Jean-Marie Morvan

Sous-variétés complexes et isotropes minimales de C^m et CP^m. Le point de vue Riemannien

1. INTRODUCTION

Depuis une quinzaine d'années, l'étude des sous-variétés isotropes, complexes, ou complexes réelles, a considérablement progressé. Les travaux de Chen, Kon, Ogiue, Yano, Yau et, plus récemment, Ros, Urbano, Verheyen, Verstraelen, ont permis de préciser la nature de la seconde forme fondamentale de telles immersions, et de caractériser en termes de pincements certaines variétés classiques. Le but de cet exposé est de faire apparaître des analogies entre les propriétés des sous-variétés complexes et des sous-variétés isotropes minimales. La plupart des résultats exposés ici sont dûs aux auteurs précités. Nous ne donnerons qu'une idée des démonstrations. Nous avons aussi utilisé [13] . Dans toute la suite, les variétés considérées sont supposées C^∞ et orientées.

2. NOTATIONS.

2.1. Soit M une variété riemannienne de métrique g, notée également $< , >$. On note R son tenseur de courbure. Si P est un plan de l'espace tangent T_mM au point m de M, on définit la courbure sectionnelle de P par :

$$K(P) = K(X,Y) = < R(X,Y)Y,X >$$

où X et Y sont deux vecteurs orthonormés qui engendrent P. M est dite "à courbure constante c" si K(P) est constant lorsque m varie dans M et P dans T_mM. R est alors déterminé par la formule :

$$R(X,Y)Z = c\{ < Y,Z > X - < X,Z > Y\}.$$

2.2. Soit M^{2n} une variété kaëhlérienne de dimension réelle 2n. On note J sa structure complexe.

- Un champ de k-plan de TM est dit "complexe" si il est invariant par J.
- Un champ de k-plan Q de TM est dit isotrope si JQ est orthogonal à Q. Un champ de k-plan isotrope maximal (c'est-à-dire de dimension k-n) est dit lagrangien. Si l'on considère Ω , la forme symplectique associée à (g,J), c'est-à-dire définie par :

$$\Omega(X,Y) = g(X,JY),$$

un champ de plan P est isotrope si $\Omega(X,Y) = 0 \quad \forall X,Y \in P$.

- Soit P un 2-plan complexe, et X un vecteur unitaire de P. $\{X,JX\}$ est une base orthonormée de P. On définit la courbure sectionnelle holomorphe de P par :

$$H(X) = K(P) = \langle R(X,JX)JX,X \rangle$$

Si K(P) est constant (égal à c) pour tout plan complexe P_m et tout point m de M, M est une variété à courbure sectionnelle holomorphe constante. Dans ce cas,

$$R(X,Y)Z = \frac{c}{4}\ \{\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y + \langle Z,JY\rangle\ JX - \langle Z,JX\rangle\ JY + 2\langle X,JY\rangle\ JZ\}.$$

- Si P et P' sont deux plans complexes, on définit la courbure bisectionnelle holomorphe par :

$$B(P,P') = \langle R(X,JX)JX',X'\rangle$$

si $P = [X,JX]$ et $P' = [X',JX']$.

2.3. Si M^n est une sous-variété d'une variété $(\overline{M}^{n+p},g)$ on munira toujours M^n de la métrique induite. Notons g, ∇,R (resp. (g, $\overline{\nabla}$,$\overline{R}$) la métrique sur M^n (resp. $\overline{M}^{n+p}$), la connexion de Levi-Civita et le tenseur de courbure sur M (resp. $\overline{M}^{n+p}$). La seconde forme fondamentale σ à valeur dans le fibré normal $T^{\perp} M^n$ est le tenseur symétrique défini par :

$$\sigma : TM \times TM \to T^{\perp}M$$
$$(X,Y) \longmapsto \sigma(X,Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$$
$$\forall X,Y \in TM.$$

Son adjoint A est défini par :

$$< A_\xi(X),Y > = <\sigma(X,Y), \xi > \qquad \forall X,Y \in TM, \quad \forall \xi \in T^\perp M.$$

Une sous-variété M^n est dite minimale si $H = \operatorname{Tr} \sigma \equiv 0$. On sait que dans ce cas, l'immersion minimise le volume de M. Les équations de Gauss, Ricci, Codazzi relient σ, A, R, $\overline{R}$ et le tenseur $R^\perp$ de courbure du fibré normal. Elles s'expriment par :

$$\overline{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + A_{\sigma(Y,Z)}X - A_{\sigma(X,Z)}Y + (\nabla_X\sigma)(Y,Z) - (\nabla_Y\sigma)(X,Z)$$

$$\overline{R}(X,Y)\xi = R^\perp(X,Y)\xi - \sigma(X,A_\xi Y) + \sigma(Y,A_\xi X) + (\nabla_X A)(Y,\xi) - (\nabla_Y A)(X,\xi)$$

Si $\overline{M} = \mathbb{C}P^m$, un calcul montre que :

$$(\nabla^2\sigma)(X,Y,Z,W) - (\nabla^2\sigma)(Y,X,Z,W) =$$
$$R^\perp(X,Y)\sigma(Z,W) - \sigma((R(X,Y)Z,W) - \sigma(Z,R(X,Y)W).$$

Si, M est complexe, on a :

$$\begin{cases} \sigma(JX,Y) = \sigma(X,JY) = J\sigma(X,Y) \\ \nabla^\perp_X J\xi = J\,\nabla^\perp_X \xi\,. \end{cases}$$

Si, M est isotrope, on a :

$$\begin{cases} A_{JY}X = -J\sigma(X,Y) \\ \nabla^\perp_X JY = J\nabla_X Y \end{cases}$$

$\forall X,Y \in TM, \quad \forall \xi \in T^\perp M$.
(cf. [1] ou [13]).

3. ETUDE LOCALE.

On peut placer l'étude locale des sous-variétés lagrangiennes minimales et celle des sous-variétés complexes dans un même contexte bien plus général : celui des variétés calibrées, (cf. le travail de HARVEY-LAWSON [7]). Ceci a l'avantage de faire apparaître les propriétés communes de ces deux classes de sous-variétés, et de donner des procédés de construction (cf. 3.4).

3.1. Généralités. Considérons sur $\mathbb{E}^m$, muni de sa métrique canonique, une p-forme fermée ϕ telle que, pour tout p-plan tangent orienté ξ, on ait :

$$\phi_{|\xi} \leqslant \mathrm{vol}_\xi$$

Alors si M est une sous-variété compacte orientée (à bord), de $\mathbb{E}^m$, telle que

$$\phi_{|M} = \mathrm{vol}_M,$$

M minimise homologiquement le volume, c'est-à-dire que

$$\mathrm{vol}(M) \leqslant \mathrm{vol}(M')$$

pour toute variété M' telle que

$$\begin{cases} [M] = [M'] & \text{dans } H_p^c(\mathbb{E}^m, K) \\ \partial M = \partial M' & \end{cases}$$

En effet, on a :

$$\mathrm{vol}(M) = \int_M \phi = \int_{M'} \phi \leqslant \mathrm{vol}(M')$$

la deuxième égalité ayant lieu puisque ϕ est fermée.

La donnée d'une telle forme ϕ s'appelle une **calibration** sur $\mathbb{E}^m$, et une sous-variété M telle que $\int_M \phi = \mathrm{vol}(M)$ s'appelle une ϕ-sous-variété. Remarquons qu'une ϕ-sous-variété est toujours minimale.

Etudions deux cas particuliers, lorsque l'espace ambiant est $\mathbb{C}^n$.

3.2. Le cas complexe. Considérons $\mathbb{C}^n$ muni de sa structure hermitienne canonique, et notons Ω la partie imaginaire de cette structure. Ω est la forme symplectique standard de $\mathbb{C}^n$. Posons :

$$\Omega_p = \frac{1}{p!}\,\Omega^p$$

Ω_p est une calibration sur $\mathbb{C}^n$ telle que **les Ω_p-sous-variétés sont les sous-variétés complexes de dimension p de $\mathbb{C}^n$.**

3.3. Le cas lagrangien orienté. Notons $z_j = x_j + iy_j$ des coordonnées de $\mathbb{C}^n$. Considérons la forme : $\phi_\theta = \mathrm{Re}(e^{i\theta}\, dz_1 \quad \ldots \quad dz_n)$. C'est une calibration sur $\mathbb{C}^n$. Il est facile de constater que si M^n est une sous-variété compacte (à bord) de $\mathbb{C}^n$ qui vérifie l'égalité :

$$\int_M \phi_\theta = \mathrm{vol}\, M,$$

M est lagrangienne minimale.

3.4. Un cas particulier : le fibré normal d'une sous-variété d'un espace euclidien. Considérons une sous-variété M^n de $\mathbb{E}^{n+p}$. On sait que $T^\perp M^n$ est lagrangien dans $T\mathbb{E}^{n+p}$, identifié à $\mathbb{E}^{n+p} + i\mathbb{E}^{n+p} \simeq \mathbb{C}^{n+p}$. En utilisant ce que nous venons de voir, on obtient le résultat suivant :

$T^\perp M$ est minimal dans $\mathbb{C}^{n+p}$ si et seulement si il existe $\theta \subset [0,2\pi]$ tel que la partie imaginaire de l'expression

$$\phi_\theta = e^{i\theta}(dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n)(\xi)$$

est nulle, $\forall \xi \in T_\nu T^\perp M^n$, $\forall \nu \in T^\perp M$.

Un cas intéressant est celui où l'on fixe $e^{i\theta} = i^{-p}$. On obtient une classe de sous-variétés M telles que $T^\perp M$ est minimale. Utilisant la seconde forme fondamentale de l'immersion, un calcul montre que $T^\perp M$ est une ϕ_θ-sous-variété si et seulement si la **seconde forme fondamentale σ de M s'écrit :**

$$< \sigma(.,.),\xi > = \begin{pmatrix} a_\xi & & & & & & \\ & -a_\xi & & & & 0 & \\ & & b_\xi & & & & \\ & 0 & & -b_\xi & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\forall \xi \in T^\perp M$.

dans une base qui diagonalise $< \sigma(.,.),\xi >$: Une telle sous-variété s'appelle une sous-variété "austère" .

On déduit de ceci deux corollaires :

Corollaire 1. *Si* M^n *est une sous-variété complexe de* $\mathbb{C}^{n+p}$ *, alors* $T^{\perp}M^n$ *est lagrangienne minimale.*

Corollaire 2. *Si* M^2 *est une surface minimale de* $\mathbb{E}^{2+p}$ *, alors* $T^{\perp}M^2$ *est lagrangienne minimale.*

4. VOLUME D'UNE SOUS-VARIETE MINIMALE DE $\mathbb{C}P^m$.

La minoration du volume des sous-variétés compactes vérifiant certaines propriétés géométriques est un vieux problème. Un cas intéressant est celui des sous-variétés minimales compactes de $\mathbb{C}P^m$. Il a été presque complètement résolu par B.Y. CHEN et A. ROS ([2], [11]) :

- On connaît la meilleure constante qui minore le volume des sous-variétés minimales compactes de $\mathbb{C}P^m$.
- On connaît la meilleure constante qui minore le volume des sous-variétés complexes compactes de $\mathbb{C}P^m$. Elle est strictement plus grande que la précédente.
- On connaît également une constante qui minore le volume des sous-variétés isotropes compactes de $\mathbb{C}P^m$. Cependant, (à la connaissance de l'auteur), on ne sait pas si cette constante est atteinte.

Précisons cela dans le théorème suivant ([2], [11]).

Théorème. *Soit* M^n *une sous-variété compacte minimale de* $\mathbb{C}P^m$.

i) On a $\mathrm{vol}(M^n) \geqslant \frac{C_{n+1}}{2}$ *; l'égalité a lieu si* M^n *est l'image d'une grande sphère* S^{n+1} *de* $S^{2(m+1)-1}$ *par la projection canonique* $\pi : S^{2(m+1)-1} \longmapsto CP^m$.

ii) Si M^{2n} *est une sous-variété complexe, on a* $\mathrm{vol}(M^{2n}) \geqslant \left(\frac{n}{2n+2}\right)^n C_{2n}$*, l'égalité a ayant lieu si* $M = \mathbb{C}P^1$ *est isométriquement immergée comme sous-variété complexe totalement géodésique de* $\mathbb{C}P^m$.

iii) Si M^n *est une sous-variété isotrope, on a*

$$\mathrm{vol}(M^n) \geqslant \left(\frac{n}{2(n+1)}\right)^{2/n} C_n$$

où C_n *est le volume de la sphère unité* S^n.

La démonstration de ce théorème est technique. Nous en esquissons ici les étapes.

<u>1ère étape</u> : Remarquons tout d'abord que $\mathbb{C}P^m$ s'obtient comme quotient de la sphère unité de $\mathbb{E}^{2(m+1)} \simeq \mathbb{C}^{m+1}$, en identifiant les points $(z_o,\dots,z_m)$ et $(cz_o,\dots,cz_m)$, $|c| = 1$. On obtient ainsi une submersion riemannienne, à fibre totalement géodésique de longueur 2π

$$\pi : S^{2(m+1)-1} \longmapsto \mathbb{C}P^m$$

<u>2ème étape</u> : Remarquons également que $\mathbb{C}P^m$ s'obtient aussi comme l'espace symétrique

$$U(m+1)/U(1) \times U(m)$$

Il suffit en effet de faire "passer au quotient" l'action de $U(m+1)$ sur $S^{2(m+1)-1}$. On obtient une action de $U(m+1)$ sur $\mathbb{C}P^m$ dont le sous-groupe d'isotropie est $U(1) \times U(m)$.

<u>3ème étape</u> : Considérons le plongement isométrique classique de $\mathbb{C}P^m$ dans $H(m+1)$, l'espace des $(m+1) \times (m+1)$ matrices hermitiennes sur $\mathbb{C}$ $({}^t\overline{A} = A)$ défini par :

$$\emptyset(z) = z\,{}^t\overline{z} = \begin{pmatrix} |z_o| & z_o\overline{z}_1 \cdots z_o\overline{z}_m \\ \vdots & \\ z_m\overline{z}_o & z_m\overline{z}_1 \cdots |z_m|^2 \end{pmatrix}$$

L'image de $\emptyset$ est l'ensemble des matrices A de $H(m+1)$ telles que $A^2 = A$ et trace$(A) = 1$. De plus, $\emptyset$ est équivariant relativement à $U(m+1)$ et invariant sous l'action de $U(m+1)$. Enfin, $\emptyset$ est minimale dans l'hypersphère S de centre $(\frac{1}{m+1})I$ et de rayon $\sqrt{2m/_{m+1}}$, de $H(m+1)$, considère comme sous-espace vectoriel de $g\ell(m,\mathbb{C})$. Notons $\widetilde{\sigma}$ la seconde forme fondamentale de l'immersion :

$$\emptyset : \mathbb{C}P^m \longmapsto H(m+1)$$

Un calcul donne :

$$\begin{cases} \widetilde{\sigma}(JX,JY) = \widetilde{\sigma}(X,Y) & \forall X,Y \in T\mathbb{C}P^m \\ \nabla\widetilde{\sigma} = 0 & \end{cases}$$

4ème étape : Rappelons un résultat de B.Y. Chen : soit M^n une sous-variété compacte de $\mathbb{E}^N$, de vecteur de courbure moyenne H.

On a :

$$\int_M \|H\|^n du \geqslant C_n , \qquad [1]$$

En particulier, si M^n est minimale dans une hypersphère de rayon 1, son vecteur de courbure moyenne a pour norme 1. Dans ce cas on obtient :

$$\mathrm{Vol}(M) \geqslant C_n .$$

5ème étape : Démontrons la partie i) du théorème.

Si M^n est compacte et minimale dans $\mathbb{C}P^m$, $\pi^{-1}(M^n)$ est compacte, minimale, et de dimension n+1 dans $S^{2(m+1)-1}$.

D'autre part, la fibration est telle que :

$$\mathrm{Vol}(M') = \mathrm{Vol}(M).\mathrm{Vol}(\mathrm{Fibre})$$

On en déduit alors

$$\mathrm{Vol}(M) = \frac{\mathrm{Vol}(M')}{2} \geqslant \frac{C_{n+1}}{2} .$$

6ème étape : Démontrons iii), ((ii) se montre de la même façon).

Désignons par K la courbure sectionnelle de $\mathbb{C}P^m$.

Si M est isotrope K(X,Y) = 1 pour tous vecteurs unitaires X et Y de TM. L'équation de Gauss implique alors que le vecteur de courbure moyenne H de l'immersion de M dans H(m+1) vérifie

$$\|H\|^2 = \frac{2(n+1)}{n}$$

L'inégalité de B.Y. Chen implique que :

$$\int_M \left(\frac{2(n+1)}{n}\right)^{n/2} du = \left(\frac{2(n+1)}{n}\right)^{n/2} \mathrm{Vol}(M) \geqslant C_n .$$

5. LES PROBLEMES DE PINCEMENT.

En 1979 et 1980, Mori, Griffiths, Kobayashi, Ochiai, Siu, et Yau, ont montré, par des méthodes différentes, le théorème suivant :

Théorème. [6], [8], [9], [15]

Toute variété kaehlérienne compacte M^n *, à courbure bisectionnelle holomorphe positive, est biholomorphe à* $\mathbb{C}P^n$.

Il est naturel de poser un problème analogue dans le cadre des sous-variétés de $\mathbb{C}P^m$: Quelles conditions doit-on imposer aux "courbures" d'une sous-variété de $\mathbb{C}P^m$ pour que celle-ci soit biholomorphiquement isométrique à $\mathbb{C}P^n$?

Remarquons d'abord que si l'on impose à la sous-variété M^n de $\mathbb{C}P^m(1)$ d'être totalement géodésique, on montre facilement que M^n est :

. soit une sous-variété complexe à courbure constante 1 (c'est-à-dire que M^n est localement isométrique à $\mathbb{C}P^{n/2}(1)$).

. soit une sous-variété isotrope à courbure constante $\frac{1}{4}$ (c'est-à-dire que M^n est localement isométrique à $\mathbb{R}P^n(\frac{1}{4})$).
(On pourra consulter [3] sur ce point.)

Remarquons que si M^n est une sous-variété complexe de $\mathbb{C}P^m(1)$, sa courbure sectionnelle holomorphe H vérifie l'équation :

$$H(u) = 1-2\|\sigma(u,u)\|^2 \leqslant 1$$

pour tout vecteur unitaire u de TM^n.

A la suite de travaux de Abe, Chen, Ogiue, Yau, en employant une méthode différente, Ros et Verstraelen pour le cas complexe, et Urbano, pour le cas lagrangien minimal, ont pu montrer les deux théorèmes de pincement suivants [11], [12], [14], [16].

Théorème. *Soit* M^n *une sous-variété complexe de* $\mathbb{C}P^m(1)$.
Si $H(u) > \frac{1}{2}$ $\forall u \in TM^n$, $\|u\| = 1$, *alors* M^n *est totalement géodésique dans* $\mathbb{C}P^m(1)$.

Si $K(P) > \frac{1}{8}$ *, pour tout plan* P *de* TM^n *, alors* M^n *est totalement géodésique dans* $\mathbb{C}P^m(1)$.

Théorème. *Soit* M^n *une sous-variété compacte, minimale, lagrangienne de* $\mathbb{C}P^n(1)$. *Si* $K(P) > 0$ *pour tout plan* P *de* TM^n, *alors* M^n *est totalement géodésique.*

On peut aussi caractériser certaines sous-variétés complexes ou isotropes par un pincement plus faible. A. Ros a montré le théorème suivant :

Théorème. [14]

Soit M^n *une sous-variété kaëhlérienne compacte de* $\mathbb{C}P^m(1)$. *Alors :*

$H(M^n) \geqslant \frac{1}{2}$ *si et seulement si* M^n *est l'une des sept variétés suivantes :*

$$\mathbb{C}P^n(1)$$
$$\mathbb{C}P^n(\tfrac{1}{2})$$
$$\mathbb{C}P^{n-s}(1) \times \mathbb{C}P^s(1)$$
$$\mathbb{Q}^n$$
$$U(s+2)/U(2) \times U(s) \qquad s \geqslant 3$$
$$SO(10)/U(5)$$
$$E_6/Spin(10) \times T$$

Ici encore, nous ne pouvons pas donner les preuves complètes de ces trois théorèmes. Les trois sont basés sur l'étude des points critiques d'une fonction définie sur le fibré unitaire de la sous-variété, liée à sa seconde forme fondamentale. Donnons une idée, à titre d'exemple, de la démonstration du deuxième théorème.

Notons U(M) le fibré unitaire de M, et définissons la fonction :

$$f : U(M) \to \mathbb{R}$$

par :

$$f(U) = \langle \sigma(U,U), JU \rangle .$$

U(M) étant compact, f atteint un maximum en V_p, $p \in M$.

On a donc :

$$(*) \quad \begin{cases} df_{V_p}(U) = 0 & \forall U \in TU(M) \\ d^2 f_{V_p}(U,U) \leqslant 0 & \forall U \in TU(M) \end{cases}$$

Remarquons alors que :

(**) $d^2f_V(U,U) = \langle$
$= \langle$

D'autre part, un c

(***)

Utilisant alors le

(***) que σ est i

[1] B.Y. CHEN, "Total mean

[2] B.Y. CHEN, submanifolds tics, 1983, vo

[3] B.Y. CHEN Math. Soc. 19

[4] B.Y. CHEN lagrangiennes A paraître.

[5] C.C. FWU, "K J. Diff. Geom

[6] P.A. GRIFFI positive vect University Pr

[7] R. HARVEY, 1982, 48-157.

[8] KOBAYASHI bundle", J. Ma

[9] S. MORI, "Pr 110, 1979, 59

[10] A. ROS, "P vol. 93, n° 2,

[11] A. ROS, "Spec jective space"

$$(**)\quad d^2f_V(U,U) = \langle (\tilde{\nabla}^2\sigma)(U,U,V,V), JV \rangle$$
$$= \langle (\tilde{\nabla}^2\sigma)(U,V,V,J\sigma(U,V)) \rangle + R(U,V,U,J\sigma(V,V)) + 2R(U,V,V,J\sigma(U,V)).$$

D'autre part, un calcul montre que (*) implique :

$$(***)\quad \begin{cases} 3\ \langle \sigma(V,V), JU \rangle_p = 0 & \forall U \text{ orthogonal à } V \\ 6\ \langle \sigma(U,V), JU \rangle_p - 3\langle \sigma(V,V), JV \rangle_p \leqslant 0 & \forall U \in U(M) \end{cases}$$

Utilisant alors le fait que M^n est minimale et $K > 0$, on déduit de (*), (**) et (***) que σ est identiquement nul.

*

BIBLIOGRAPHIE

[1] **B.Y. CHEN**, "Geometry of submanifolds", Marcel Dekker, 1973, New-York ; "Total mean curvature and submanifolds of finite type", World scientific, 1984.

[2] **B.Y. CHEN**, "On the first eigenvalue of Laplacian of compact minimal submanifolds of Rank one symmetric spaces", Chinese Journal of Mathematics, 1983, vol. 11, n° 4.

[3] **B.Y. CHEN - K. OGIUE**, "On totally real submanifolds", Trans. Amer. Math. Soc. 193, 1974, 257-266.

[4] **B.Y. CHEN - J.M. MORVAN**, (1) "Propriétés riemanniennes des surfaces lagrangiennes", A paraître C.R.A.S. 1985. (2) "On lagrangian surfaces in $\mathbb{C}^2$", A paraître.

[5] **C.C. FWU**, "Kaëhler manifolds isometrically immersed in Euclidean space", J. Diff. Geom., 1982.

[6] **P.A. GRIFFITHS**, "Hermitian differential geometry, Chern classes and positive vector bundles, global analysis (in honor of Kodaira)", Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[7] **R. HARVEY, H. LAWSON**, "Calibrated geometries", Acta Matematica, 1982, 48-157.

[8] **KOBAYASHI - T. OCHIAI**, "On complex manifolds with positive tangent bundle", J. Math. Soc. Japan, 22, 1970, 499-525.

[9] **S. MORI**, "Projective manifolds with ample tangent bundle", Ann. of Math., 110, 1979, 593-606.

[10] **A. ROS**, "Positively curved Kaëhler submanifolds", Proceedings A.M.S., vol. 93, n° 2, 1985, 329-331.

[11] **A. ROS**, "Spectral geometry of CR-minimal submanifolds in the complex projective space", Kodai Math. J., 1983, vol. 6, 88-99.

[12] **A. ROS - L. VERSTRAELEN,** "A conjecture of K. Ogiue", J. Diff. Geom., 19, 1984, 561-566.

[13] **A. ROS - P. VERHEYEN - L. VERSTRAELEN,** "Positively curved minimal submanifolds", A paraître.

[14] **A. ROS,** "A characterization of seven compact Kaëhler submanifolds by holomorphic pinching", Ann. of Math., 121, 1985.

[15] **Y.T. SIU, S.T. YAU,** "Compact Kaëhler manifolds of positive bisectional curvature", Invent. Math. 59, 1980, 189-204.

[16] **F. URBANO,** "Totally real minimal submanifolds of a complex projective space", Proceedings A.M.S., vol. 93, n° 2, 1985, 332-334.

[17] **K. YANO - M. KON,** "Antiinvariant submanifolds", Marcel Dekker, New-York, 1978.

[18] **S.T. YAU,** "Submanifolds with constant mean curvature I ", Amer. J. Math., 96, 1974, 346-366, II : Amer. J. Math., 97, 1975, 76-100.

Faculté des Sciences d'Avignon
Département de Mathématiques
33, rue Louis Pasteur

84000 AVIGNON (France)

Un des suj
symplectique er
par exemple, à
que cette class
qu'on peut asso
générale, si π
rement trivial)
réduit le group
ce groupe struc
ristiques second
dire à ce que l
facteur constan
truction, sans d
détails, mais sc
la théorie de [V
(Mai 1986) (1).

Les classes
lisations en dim
dire que ce n'e
été proposées,
reste néanmoins
cas d'un fibré sy
lation générale