BULLETIN MATHÉMATIQUE

DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
DE LA RÉPUBLIQUE SOCIALISTE DE ROUMANIE

TIRAGE À PART

TOME 22 (70), nr. 3, 1978

BULL. MATH. de la Soc. Sci. Math. de la R. S. de Roumanie
Tome 22 (70), nr. 3, 1978

VARIÉTÉS DE TYPE SPECIAL. CHAMPS PRESQUE-QUASI-CONCOURANTS

DE

JEAN-MARIE MORVAN

Nous étudions, dans ce travail, une classe de variétés riemanniennes dites, "de type spécial", définies par R. Rosca.

Ces variétés possèdent en particulier la propriété d'être feuilletées par des hypersurfaces quasiombilicales. On définit sur une telle variété un champ possédant une propriété dite de *presque-quasi-concuroance*, généralisant ainsi certaines notions de quasiconcourances introduites dans (1). Nous étudions quelques propriétés de tels champs.

Nous emploierons les notations suivantes : (M, g) désigne une variété Riemannienne de métrique g, de dimension $n \geqslant 4$. On note $\langle \ldots \rangle$ le produit scalaire, et $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire. TM est l'espace tangent à M, et T^*M l'espace cotangent à M. ∇ désigne la connexion de Levi-Civita associée à g, R le tenseur de courbure. Au voisinage d'un point $p \in M$, on note $\{e_A, A = 1 \ldots n, n \geqslant 4\}$ un repère orthonormé, $\{\omega^A, A = 1 \ldots n, n \geqslant 4\}$ le repère dual.

$dp = \omega^A \otimes e_A$ est la forme de soudure,

$\nabla e_A = \omega_A^B \otimes e_B$ définissent les formes de connexion ω_A^B de la connexion ∇.

Enfin, si $(\bar{M}, \bar{g}) \xrightarrow{i} (M\ g)$ est une immersion isométrique de la variété $(\bar{M}, \bar{g})$ dans la variété (M, g), on note $\bar{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita associée à g sur $\bar{M}$, $\nabla^\perp$ la connexion normale définie sur le fibré normal à $\bar{M}$, $T\bar{M}^\perp$, H la seconde forme fondamentale associée à l'immersion i :

$H : T\bar{M} \times T\bar{M} \to T\bar{M}^\perp$ K désigne le ténseur adjoint de H :

$K : T\bar{M} \times T\bar{M}^\perp \to T\bar{M}$ défini par $\langle K(X, \xi), Y\rangle = \langle H(X, Y), \xi\rangle$ $\forall X, Y \in T\bar{M}, \forall \xi \in T\bar{M}^\perp$.

On définit alors $\overset{\backsim}{\nabla}$ par $(\overset{\backsim}{\nabla} K)(Y, \xi) = \bar{\nabla}_X (K(Y, \xi)) - K(\nabla_X Y, \xi) - K(Y, \nabla_X^\perp \xi)$ $\forall X, Y \in T\bar{M}, \forall \xi \in T\bar{M}^\perp$.

Afin d'éviter toute confusion lorsque cela est nécessaire nous notons $M(\text{ou}_{\bar{M}}^\perp)$ l'orthogonalité dans $\bar{M}$ et $M(\text{ou}_M^\perp)$ l'orthogonalité dans M.

1 — VARIETES SPECIALES DE TYPE (E, x, λ, μ)

Definition 1 (R. Rosca)

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n. Nous dirons que M este une variété spéciale de type (E, X, λ, μ) s'il existe sur M;

— Un champ unitaire E

— Un champ X orthogonal à E

— Deux fonctions λ, $\mu \in C^\infty(M)$

tels que, si $(e_1 \ldots e_{n-1}, E = e_n)$ est un repère orthonormé au voisinage d'un point p de M, et $(\omega^1, \ldots, \omega^{n-1}, \theta = \omega)$ est le repère dual, et si $X = \sum_1^{n-1} a_i e_i$ sur ce voisinage, alors les formes de connexion ont pour expression :

$$\boxed{(*) \quad \omega_i^n = \lambda\omega^i + \mu a_i\, \alpha} \quad \text{si } i < n.$$

où α est la forme associée à X dans la dualité définie par g.

Les formes ω_i^j, $i,j < n$ sont dites horizontales.

Les formes ω_i^n, $i < n$ sont dites mixtes.

La distribution $E^\perp$ est dite horizontale. E est appelée direction verticale.

Remarques.

i· La distribution $E^\perp$ est involutive.

En effet, nous avons $d\theta = 0$. Car $d\theta = d\omega^n = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^n \cap \omega =$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} (\lambda\omega^i + \mu a_i\, \alpha) \wedge \omega^i = \sum_{i=1}^{n-1} \mu\, a_i \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j \omega^j \right) \wedge \omega^i = 0.$$

Ces terms s' annulent deux à deux.

ii. Si $n = 2m + 1$, M peut être muni *localement* d'une structure presque cosymplectique telle que E soit le champ de Reeb, et dont la distribution horizontale este involutive.

En effet, localemnet,

$$\begin{cases} \Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 + \ldots + \omega^{2m-1} \wedge \omega^{2m} \\ \theta = \omega^{2m+1} \end{cases}$$

défint une structure presaue cosymplectique, de distribution E involutive.

Une telle structure sera dite presque cosymplectique spéciale.

iii. Le condition (*) s'exprime de façon intrinsèque par la condition (**)

$$(**) \qquad \langle \nabla_Y Z, E \rangle = \lambda \langle Y, Z \rangle + \mu \langle Y, X \rangle \langle Z, X \rangle$$

$$\forall Y \in TM \qquad \forall Z \in E^{\perp}$$

En effet, $\omega_i^n = \langle \nabla e_i, e_n \rangle = \lambda \omega^i + \mu a^i \alpha \Leftrightarrow$

$$\langle \nabla_Y e_i, E \rangle = \lambda \omega^i (Y) + \mu a^i \alpha(Y) \Leftrightarrow$$

$$\langle \nabla_Y Z, E \rangle = \lambda \langle Y, Z \rangle + \mu \langle Z, X \rangle \langle Y, X \rangle$$

$$\forall Y, \in TM$$

$$\forall Z \in E^{\perp}$$

2 — FEUILLETAGE ASSOCIE A UNE VARIETE SPECIALE

D'après la remarque i., la distribution $E_{\perp}$ est involutive. Nous allons étudier les hypersurfaces intégrales de cette distribution. Nous avons besoin de la définition suivante :

Définition 2

Soit M_1 une hypersurface d'une variété M. M_1 est une sous-variété quasiombilicale si, au vosinage de tout point p de M, la seconde forme fondamentale a pour expression $H(X, Y) = (a \langle X, Y \rangle + b\ \omega(X)\ \omega(Y))\ N$ où N est une normale unitaire, a, b sont des fonctions C^{∞}, ω est une formé scalaire.

— Si $a = 0$, l'hypersurface est dite cylindrique

— Si $b = 0$, l'hypersurface est dite ombilicale.

Théorème 1

Une variété riemannienne (M, g) de dimension n, spéciale, de type (E, X, λ, μ) est feuilletée par des hypersrufaces quasiombilicales, orthogonales à E.

De plus :

— Si M est de type (E, X, O, μ), M est feuilletée par des hypersurfaces cylindriques M_1

— Si M est de type (E, X, λ, O), M est feuilletée par des hypersurfaces ombilicales M_1

— Si M est de type $\left(E, X, \dfrac{\mu \|X\|^2}{1-n}, \mu\right)$, M est feuilletée par des hypersurfaces minimales.

Démonstration

Soit M_1 une sous-variété intégrale maximale de la distribution $E^{\perp}$ au voisinage d'un point $p \in M$. M_1 este orthogonale à E. La seconde forme fondamentale a pour expression :

$$H(Y, Z) = \langle \nabla_Y Z, E \rangle E = \lambda \langle Y, Z \rangle + \mu \langle Y, X \rangle \langle Z, X \rangle, \text{ d'après } (**,)$$

M_1 est donc cyclindrique si $\lambda = 0$ et ombilicale si $\mu = 0$.

M_1 est minimale si trace $(\langle \nabla, E\rangle) = 0$, c'est-à-dire

$$\lambda(n-1) + \mu\|x\|^2 = 0.$$

La proposition est don complètement démontrée.
Si l'on fait des hypothèses supplmentaires sur le champ X, on peut définir d'autrs feuilletages.

Théorème 2

Soit (M, g) une variété riemannienne spéciale de dimension n, de type (E, X, λ, μ).

1. *On suppose que X est partout non nul, et parallèle dans le fibré vertical,* (i.e. $\langle \nabla X, E\rangle = 0$) *en tout point, et que le tenseur de courbure R conserve la distribution horizontale* (i.e. $R(Y, Z)U \in E \ \forall Y, Z, U \in E^{\perp}$). *Alors*

— *M est fuielletée par des sous-variétés orthogonales à $\{X, E\}$, M_1, de codimension 2, ombilicales dans la direction E.*

— *Si, de plus, $\lambda = cste \neq 0$, M est feuilletée par des hypersurfaces qui sont localement de la forme $C \times M_1$ ou C est une courbe, et M_1 est totalement ombilicale*

2. *On suppose que $\|X\| = cste \neq 0$ et X est parallèle dans le fibré horizontal* (i.e. $\langle \nabla x, Y\rangle = 0$ *Y horizontal*). *Alors*

— *M est feflletée par des sous-variétés M_1 totalement ombilicales de codimension 2, orthogonales à $\{X, E\}$.*

— *Si de plus, $\lambda = 0$ et M est connexe, simplement connexe et complète, alors $M = M_1 \times M_2$, ou dim $M_1 = 2$, et dim $M_2 = n - 2$.*

Démonstration

1. Par hypothèse, $\langle \nabla_Y X, E\rangle = 0 \quad \forall Y \in TM$.

$$\langle \nabla_X X, E\rangle = \lambda\langle Y, X\rangle + \mu\|X\|^2 \ \langle Y, X\rangle = 0 \Rightarrow \lambda + \mu\|X\|^2 = 0 \quad (1)$$

Soit M une sous-variété intégrale maximale de la distribution E. Soit H la seconde forme fondamentale et posons $A = K(., E)$. D'après (1) on a

$$\langle A(X), \ Y\rangle \quad = 0 \qquad \forall Y$$
$$\langle A(Y,) \ Z\rangle = \lambda \ \langle Y, Z\rangle \quad \forall Y, Z \ \bar{M} \ X$$

Notons $\bar{\nabla}$ la connexion induite par ∇ sur $\bar{M}$.
Pâr suite, $A(X) = 0$ et $A(Y) = \lambda Y \ \forall Y \perp X$. Les courbures principales de M sont donc O dans la direction X et λ sur l'orthogonal de X.
Montrons que la distribution $X\perp\bar{M}$ et involutive sur M.
D'âprès les équations de Gauss-Codazzi, on a puisque, par hypothèse $\langle R(Y, Z)U, E\rangle = 0 \quad \forall Y, Z, U \ E$ ($\Leftrightarrow R(Y, Z)E$ est dans la direction E)

$$(\tilde{\nabla}_Y \ A)(Z) = (\tilde{\nabla}_Z \ A)(Y). \text{ Soit } Y, \ Z \in T\bar{M} \cap X^{\perp}.$$

$$(\tilde{\Delta}_Y A)(Z) = \bar{\nabla}_Y (A(Z)) - A(\bar{\nabla}_Y Z)$$
$$= Y(\lambda)Z + \lambda\bar{\nabla}_Y Z - A(\bar{\nabla}_Y Z)$$

$$(\tilde{\nabla}_Z A)(Y) = Z(\lambda)Y + \lambda\ \overline{\nabla} Y - A(\overline{\nabla}_Z Y)$$

Par suite,

$$\begin{aligned} Y(\lambda)Z - Z(\lambda)Y &= (A - \lambda\ \mathrm{I})\ [Y,\ Z] \\ &= \lambda\ pr_{X\perp\overline{M}}[Y,\ Z] - \lambda[Y,\ Z] \\ &= \lambda\ pr_X\ [Y,\ Z]. \end{aligned}$$

Comme le premier membre de l'égalité est orthogonal à X, on en déduit que chacun des deux membres est nul. Par conséquent,

$$[Y,\ Z] \underset{\overline{M}}{\perp} X$$

La distribution $X^{\perp\overline{M}}$ est donc involutive.
Considérons une sous-variété M_1 intégrale maximale de la distribution $X^{\perp\overline{M}}$.
Considérons M_1 comme sous-variété de M, de codimension 2, Montrons que M_1 est ombilicale dans la direction E .

$$\langle \nabla_Y Z,\ E\rangle = \lambda\langle Y,\ Z\rangle + \mu\langle Y,\ X\rangle\langle Z,\ X\rangle = \lambda\langle Y,\ Z\rangle$$
$$\forall Y,\ Z \perp \{X,\ E\}$$

Par conséquent, si $H^{M}1$ designe la seconde forme fondamentale associée à M, on a
$\langle H^{M1}\ (Y,\ Z)\ E\rangle = \lambda\langle Y,\ Z\rangle$. M_1 est donc omblicale dans la direction E.
On en déduit donc que M est feuilletée par des sous-variétés M_1, de codimension ,2 orthogonales à X et E, et ombilicales dans la direction$E$.

— Supposons que $\lambda = cste = 0$. Montrons qu'alors le champ $\dfrac{X}{\|X\|}$ est parallèle sur $\overline{M}$. Posons $\mathrm{T} = \dfrac{X}{\|X\|}$,

Soit $Y \perp T$. On a :

$$(\overleftarrow{\nabla}_Y A)(T) = (\overleftarrow{\nabla}_\perp A)(Y).$$

$$(\overleftarrow{\nabla}_Y A)(T) = \overline{\nabla}_Y[A(T)] - A(\overline{\nabla}_Y T) = -A(\nabla_Y T)$$

$$\begin{aligned} (\overleftarrow{\nabla}_\mathrm{T} A)\ (Y) = \overline{\nabla}_\perp(\lambda Y) - A(\overline{\nabla}_\perp Y) &= \lambda\overline{\nabla}_\perp Y - A\ (\overline{\nabla}_\perp Y). \\ &= -\ pr_X \overline{\nabla}_\perp Y. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$A(\overline{\nabla}_{Y\mathrm{T}}) = pr_X \overline{\nabla}_\mathrm{T}\ Y.$$

Le premier membre de l'égalité étant orthogonal à X, on en déduit que les deux membres de cette égalité sont nuls. Par suite $pr_X \overline{\nabla}_T Y = 0$. Donc $\langle \overline{\nabla}_T Y, T \rangle = 0 \Rightarrow \langle Y, \nabla_\perp T \rangle = 0 \ \forall Y \perp T$. De même $A(\overline{\nabla}_Y T) = 0 \Rightarrow \overline{\nabla}_Y T$ est dans la direction T, donc $\overline{\nabla}_Y T = 0$, puisque T est unitaire. Finalement, $\overline{\nabla}_Z T = 0 \ \forall Z \in T\overline{M}$. T est donc parallèle sur M.
On peut donc appliquer le théorème de décomposition de De Rham au voisinage de chaque point de $\overline{M}$: $\forall p \in M_1$. $\exists U$, ouvert contenant p tel que $U = C \times M_1$, où C est une courbe intégrale de T et M_1 est une sous-variété intégrale de $T^\perp$ dans $\overline{M}$.
Calculons la seconde forme fondamentale H^{M1} de M_1 dans M.
On a

$$H^{M1}(Y, Z) = \langle \nabla_Y Z, T \rangle T + \langle \nabla_Y Z, E \rangle E$$
$$= \langle \nabla_Y Z, E \rangle E = \lambda \langle Y, Z \rangle E \quad \forall Y, Z \in TM$$

Par suite, M_1 est totalement ombilicale.
Finalement, si $\lambda = cste$, M est feuilletée par des hypersurfaces qui sont localement de la forme $C \times M_1 \cdot M_1$ este totalement ombilicale et vérifie La patrie 1 du théorème est donc démontrée.
2. Par hypothèse, $\langle \nabla X, Y \rangle = 0 \ \forall Y \perp E$.
Considérons, au voisinage de tout point $p \in M$, un repère orthonormé $(e_1 \ldots e_{n-2}, e_{n-1} = \dfrac{X}{\|X\|}, E)$.
On a :

$$(2) \qquad \omega^i_{n-1} = 0 \qquad \forall i \neq n.$$

Montrons que la distribution X est involutive. Il suffit de montrer que

$$\mathrm{d}\ \omega^{n-1} \wedge \omega^{n-1} = 0.$$

On a :

$$\mathrm{d}\omega^{n-1} = \sum_{i=1}^{n-2} \omega^{n-1}_i \wedge \omega^i + \omega^{n-1}_n \wedge \omega^n = \omega^{n-1}_n \wedge \omega^n$$

puisque $\omega^{n=1}_i = 0$ si $i = n$.

$\mathrm{d}\omega^{n-1} = -(\lambda\omega^{n-1} + \mu\|X\|^2\omega^{n-1})$. Par conséquent, $\mathrm{d}\omega^{n-1} \wedge \omega^{n-1} = 0$. Puisque les deux distributions $X^\perp$ et $E^\perp$ sont invloutives la distribution $\{X, E^\perp\}$ est involutive. Considérons une sous-variété intégrale maximale de $\{X, E\}^\perp$, notée $\overline{M}$. Montrons que $\overline{M}$ est totalement ombilicale. Sont $H^{\overline{M}}$ la seconde forme fondamentale associée à M_1.
$\langle H^{\overline{M}}(Y, Z), X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle = 0$ puisque X est parallèle dans le fibré horizontal

$$\langle H^{\overline{M}}(Y, Z), E \rangle = \langle \nabla_Y Z, E \rangle = \lambda \langle Y, Z \rangle \text{ puisque } Y, Z \perp X.$$

Par conséquent, $\overline{M}$ este totalement ombilicale.

— Supposons $\lambda = 0$. Montrons que la distribution $\{X, E\}$ est parallèle. Ceci revient à montrer, dans le système de coordonnées choisi précédemment, que

$$\begin{cases} \omega^i_{n-1} = 0 & \text{si } i = 1 \ldots n-2 \\ \omega^i_n = 0 & \text{si } i = 1 - \ldots n-2 \end{cases}$$

D'après (2) nous avons déjà $\omega^i_{n-1} = 0$ si $i \neq n$.
$\omega^i_n = -\omega^i_n = -\lambda\omega^i$ si $i = 1 \ldots n-2$. Puisque $\lambda = 0$, $\omega^i_n = 0$ si $i = 1 \ldots n-2$. Par conséquent, la distribution $\{X, E\}$ est parallèle. Si l'on suppose M connexe, simplement connexe, complète, le théorme de décomposition de De Rham implique que $M = M_1 \times M_2$. où M_1 est intégrale de $\{X, E\}^\perp$, et M_2 est intégrale de $\{X\ E\}$. Le théorème est donc complètement démontré.

3 — CHAMP PRESQUE QUASI-CONCOURANT

Remarque

Soit (M, g) une variété spéciale de type (E, X, λ, μ) ; le champ E vérifie l'égalité :

$$\nabla E = -\lambda\, dp + \lambda\, \theta \otimes E + \mu\, \alpha \otimes X$$

avec les notations du paragraphe précédent.
En effet, si l'on considère un repère local $(e_1 \ldots, e_{n-1}, E)$ on peut écrire, d'après (*) :

$$\begin{aligned} \nabla E &= \omega^i_n \otimes e_i = (-\lambda\omega^i + \mu a_i\, \alpha) \otimes e_i \text{ pour } 1 \leqslant i < n \\ &= -\lambda\, \omega^i \otimes e_i + \mu\alpha \otimes X \text{ pour } 1 \leqslant i < n \end{aligned}$$

Donc :

$$\nabla E = -\lambda\, dp + \theta \otimes E + \mu\alpha \otimes X$$

généralisant la notion de quasi concourance définie dans [1], nous donnons la défniition suivante :

Définition

Soir (M, g) une variété riemannienne (ou pseudo-riemannienne).
Soit Z un champ de vecteurs sur M. Si Z vérifie l'égalité

$$\nabla Z = \lambda dp - \lambda\, \tau \otimes Z + \mu\, \omega \otimes Y. \tag{3}$$

où $\lambda \in C^\infty(M)$, $\mu \in C^\infty(M)$ τ est la forme duale de Z, Y est un champ de

vecteurs, ω est la forme duale de Y alors on dit que Z est presque quasi-concourant dans la direction Y.
Nois allons montrer trois propriétés propres à ces champs.

P r o p o s i t i o n 1

Soit M une hypersurface orientée de l'espace euclidien E, quasiombilicale ($H = [\gamma g + \delta\, \omega \otimes \omega] \otimes N$ où N est une normale unitaire).
On suppose que le champ N est presque quasi concourant dans la direction Y, associée à ω dans la dualité définie par g.
Alors toute application parallèle de M est quasi conforme et conserve le caractère de quasiombilicalité de M.

D r m o n s t r a t i o n.

Puisque N est presque quasiconcourant dans la direction Y on peut écrire

$$\nabla N = \lambda\, \mathrm{d}p - \lambda\, \theta \otimes N + \mu\omega \otimes Y$$

où, λ, $\mu \in C^\infty(M)$, θ est la forme duale du champ N.
Considérnos l'aplpication parallèle f:

$$M \to f(M) = \bar{M} \subset R^N$$

$$p \smile \bar{p} = p + c\, N, \quad c \in R.$$

On a $\mathrm{d}\bar{p} = \mathrm{d}p + c\, \nabla N$ La métrique sur $\bar{M}$ a donc pour expression :

$$\begin{aligned}
\bar{g} = \langle \mathrm{d}\bar{p},\ \mathrm{d}\bar{p}\rangle &= \langle \mathrm{d}p + c\nabla N,\ \mathrm{d}p + c\nabla N\rangle \\
&= g + 2c\,\langle \mathrm{d}p,\ \nabla N\rangle,\ + c^2\,\langle \nabla N,\ \nabla N\rangle \\
&= g + 2c[\lambda g + \mu\omega \otimes \omega] + \\
&+ c^2[\lambda^2 g + 2\lambda\mu\omega \otimes \omega + \mu^2\|Y\|^2\, \omega \otimes \omega] \\
&= (1 + c\lambda)^2 g + (2c\mu + 2c^2\lambda\mu + c^2\mu^2\|Y\|^2)\omega \otimes \omega
\end{aligned}$$

$\bar{g}$ est donc de la forme $Ag + B\omega \otimes \omega$. La transformation est donc quasi-conforme.
Considérons le second tenseur fondamental associé à H sur M, $L = \langle H,\ N\rangle$, et $\bar{L}$ celui associé à $\bar{H}$, seconde forme fondamentale sur $\bar{M}$.
D'après la formule d'Otsuki, on sait que l'on a :

$$\bar{L} = L - c\langle \nabla N,\ \nabla N\rangle$$

$$\bar{L} = \gamma g + \delta\omega \otimes \omega - c[\lambda^2 g + 2\lambda\mu\omega \otimes \omega + \mu^2\|Y\|\omega \otimes \omega]$$

$$\bar{L} = (\gamma - c\lambda^2)g + (\delta - 2c\lambda\mu - c\mu^2\|Y\|^2)\, \omega \otimes \omega$$

$\bar{M}$ est donc quasiombilicale.
La proposition est donc complètement démontrée.

Proposition 2

Soit $M(, g)$ une variété riemannienne de dimension n, muni d'un champ E presque quasiconcourant dans la direction X, tel que :

$$\nabla E = \mathrm{d}p - \theta \otimes E + \mu\alpha \otimes X,$$

où θ, forme duale de E, est exacte $\left(\theta = \dfrac{\mathrm{d}f}{f}\right)$

Alors M est susceptible de définir une application quasiconforme.
Plus précisément, si M est immergée isométriquement dans l'espace euclidien R^N, l'application $p \to \tilde{p} = p + fE$ est quasi conforme.

Demonstration

On a

$$\mathrm{d}\tilde{p} = \mathrm{d}p + \mathrm{d}f \otimes E + f\nabla E = \mathrm{d}p + \mathrm{d}f \otimes E + f[\mathrm{d}p - \theta \otimes E + \mu\,\alpha \otimes X]$$

$$\mathrm{d}p = (1+f)\mathrm{d}p + f\mu\alpha \otimes X$$

$$\tilde{g} = (1+f)^2 g + f^2\mu^2\,\|X\|^2\alpha \otimes \alpha + 2(1+f)f\mu\alpha \otimes \alpha$$

$$\tilde{g} = (1+f)^2 f + [f^2\mu^2\|X\|^2 + 2f\mu(1+f]\alpha \otimes \alpha.$$

L' application est donc quasiconforme.
La proposition est donc démontrés.
Donnons enfin une application de la presque quasi concourance dans le cas où la variété M est lorentzienne.

Proposition 3

Soit M une variété lorentzienne de dimension n.
On suppose qu'il existe sur M deux vecteurs isotropes ξ, ξ', tels que :

- $\langle \xi, \xi' \rangle = 1$
- ξ' est presque quasiconforme dans la direction ξ.

Alors M est feuilletée par des hypersurfaces isotropes presque-ombilicales (au sens d R. Rosca [2]).

Démonstration.

Soit $p \in M$ Soit U un ouvert de trivialisation contenant p. Puisque la variété M est lorentzienne, on peut construire sur U un repèrequasi-orthonormé $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, c'est-à-dire tel que :

$$\xi_1 = \xi, \qquad \xi_n = \xi'.$$

$$\cdot\langle \xi_i, \xi_j \rangle = -\delta_{ji} \qquad \text{si } 1 < i,\ j < n$$

$$\langle \xi_1, \xi_i \rangle = 0 \qquad \text{si } 1 < i < n$$

$$\cdot\langle \xi_n, \xi_i \rangle = 0 \qquad \text{si } 1 < i < n.$$

Si $(\alpha^1 \ldots \alpha^n)$ est le repère dual et α^i_j sont les formes de connexions, on, sait que l'on a :

$$\alpha^1_1 + \alpha^n_n = 0, \ \alpha^i_i = 0 \text{ si } 1 < i < n.$$

$$\alpha_n^{\ i} + \alpha^1_i = 0 \qquad \text{si } 1 < i < n$$

D'autre part, puisque ξ_n est presque quasi-conforme dans la direction ξ_1

$$\exists \lambda \in C^\infty(M), \ \mu \in C^\infty(M) \text{ tels que}$$

$$\nabla \xi_n = \lambda \, dp - \lambda \alpha^n \otimes \xi_n + \mu \alpha^1 \otimes \xi_1$$

$$= \lambda[\alpha^1 \otimes \xi_1 \ldots + + \alpha^{n-1} \otimes \xi_{n-1}] + \mu \alpha^1 \otimes \xi_1$$

Par suite

$$\alpha^1_n = [\lambda + \mu)\alpha^1$$

$$\alpha^2_n = \lambda \alpha^2$$

$$\vdots$$

$$\alpha^{n-1}_n = \lambda \alpha^{n-1} \qquad \alpha^n_n = 0.$$

Nous pouvons à présent montrer que la ditribution orthogonale à ξ_1 est involutive.

On a :

$$d\alpha^1 = \alpha_i \wedge \alpha^1_i = \alpha^2 \wedge \alpha^2_n + \alpha^3 \wedge \alpha^3_n + \ldots + \alpha^{n-1} \wedge \alpha^{n-1}_n$$

$$= 0 \text{ puisque } \alpha^i_n = \lambda \alpha_i$$

Donc la distribution $\xi_1^\perp$ est involutive.

Considérons, au voisinage d'un point p, une sous,variété M_1 intégrale de $\xi_1^\perp$. Soit H la seconde forme fondamentale associée à M_1.

Nous avons

$$H(\xi_1, \ \xi_1) = \langle \underset{\xi_1}{\nabla} \xi_1, \ \xi_1 \rangle \ \xi_1 = 0$$

$$H(\xi_2, \ \xi_2) = \langle \underset{\xi_2}{\nabla} \xi_2, \ \xi_1 \rangle \xi_1 = \lambda \langle \xi_2, \ \xi_1 \rangle \ \xi_1$$

$$\vdots$$

$$H(\xi_{n-1}, \ \xi_{n-1}) = \langle \underset{\xi_{n-1}}{\nabla} \ \xi_{n-1}, \ \xi_1 \rangle \ \xi_1 = \lambda \langle \xi_{n-1}, \ \xi \rangle \ \xi_1$$

Par suite toutes les courbures principales de M_1 dont égales à λ, sauf celle qui correspond à la direction principale et isotrope ξ_1 ; cette dernière courbure est nulle. Conformément à la définition de R. Rosca, M_1 est une hypersurface presque ombilicale.

Recu 7.*XI*.1977

BIBLIOGRAPHIE

[1] Rosca : *Variété Riemanniennes protant un champ vectorial quasi concourant.* CRAS, T, 283 (8 Nov. 76), série A 851.

[2] Rosca : *Sur les hypersurfaces isotropes de défaut* 1 *incluses dans un espace hyperbolique de type normal.* Ann. Inst. Henri Piincaré, vol. XX, n² 3, 1974, p. 237—243, secton A.