TD 5: MARTINGALES

Modèles Aléatoires Discrets M1– 2022-2023

---

1. Soit X_n et Y_n deux martingales de carré intégrable définies sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$.
   (a) Montrer que pour tout $m \leq n$, on a $\mathbb{E}\left[X_m Y_n | \mathcal{F}_m\right] = X_m Y_m$ p.s., et donc en particulier que $\mathbb{E}\left[X_m X_n | \mathcal{F}_m\right] = X_m X_m$ p.s.
   (b) Montrer que pour tout $m < n \leq p < q$, on a Cov $(X_n - X_m, Y_q - Y_p) = 0$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}\left[(X_n - X_0)^2\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[(X_k - X_{k-1})^2\right]$.

2. On considère l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$ où $\Omega = \mathbb{N}^*$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$, $\mathbb{P}(\{n\}) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, $\mathcal{F}_n = \sigma\left(\{1\}, ..., \{n\}, [n+1, +\infty[\right)$. On considère la suite de variables aléatoires réelles $X_n = (n+1)\mathbb{I}_{[n+1,+\infty[}$.
   (a)
      - Montrer que pour la filtration $\mathcal{F}_n$, X_n est une martingale positive.
      - Vérifier que $X_n \to 0$ p.s.
      - X_n converge-t-elle dans $\mathcal{L}^1$?
   (b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, quelle est la valeur de $\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n(k)$? En déduire $\mathbb{E}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right]$.

3. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires réelles, positives, indépendantes, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et de même espérance 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on poste $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, ..., Y_n)$ et $X_n = Y_0 ... Y_n$.
   (a) Montrer que X_n est une $\mathcal{F}_n$-martingale et que $\sqrt{X_n}$ est une $\mathcal{F}_n$-surmartingale.
   (b) Montrer que le produit infini $\prod_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\sqrt{Y_k}\right]$ converge dans $\mathbb{R}_+$, on note l sa limite.
   (c) On suppose que $l = 0$. Montrer que $\sqrt{X_n} \to 0$ p.s. La martingale (X_n) est-elle régulière ?
   (d) On suppose que $l > 0$. Montrer que $\left(\sqrt{X_n}\right)$ est une suite de Cauchy dans L^2. En déduire que (X_n) est régulière.
   (e) Application : Soit P et Q deux probabilités distinctes sur un ensemble dénombrable E et (Z_n) une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans E de même loi Q.
   On suppose que pout tout $x \in E$, on a $Q(x) > 0$.
   On pose $X_n = \dfrac{P(Z_0)}{Q(Z_0)} ... \dfrac{P(Z_n)}{Q(Z_n)}$.
   Déduire de ce qui précède que $X_n \to 0$ p.s.

4. On considère une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$, et une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $(X_k)_{k\geq 1}$, indépendante de N.
   On pose
$$Y = \sum_{k=1}^{N} X_k \,.$$

(a) Déterminer $\mathbb{E}[Y|N]$, puis $\mathbb{E}[Y]$.

(b) Déterminer $\mathrm{Var}(Y|N)$, puis $\mathrm{Var}(Y)$.

(c) Montrer que $L_S = G_N \circ L_X$ où L_Z est la transformée de Laplace de la variable aléatoire Z et G_Z est sa fonction génératrice des probabilités.