TD 6 : PROCESSUS DE POISSON

Modèles Aléatoires Discrets M1– 2022-2023

---

1. Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles de paramètres λ_1 et λ_2 respectivement.
   (a) Quelle est la loi de $Y = \min(X_1, X_2)$?
   (b) Calculer $\mathbb{P}(Y = X_1)$.

2. Dans une station de taxi, il y a des voitures de marque A et B, qui arrivent suivant des processus de Poisson indépendants d'intensité 10 et 15 par heure respectivement.
   (a) Soit T la minute d'arrivée du premier taxi. Quelle est la loi de T ? Quelle est la probabilité que le premier taxi arrivé soit de la marque A ?
   (b) Si le premier taxi arrivé est de marque A, quelle est la loi du temps qu'il faut encore attendre (après l'arrivée de ce taxi) avant l'arrivée du premier taxi de marque B ?
   (c) Montrer que les dates d'arrivée des taxis (quelle que soit leur marque) forment un processus de Poisson dont on donnera l'intensité.

3. On suppose que les dates des accidents des assuré-es de la compagnie *JojoTranquille* forment un processus de Poisson d'intensité λ. Pour chaque accident, l'assuré-e fera une déclaration à son assurance avec une probabilité $p \in]0, 1[$, la décision étant prise de manière indépendante des autres accidents et des autres assuré-es.
   Pour tout intervalle de temps $I \subset \mathbb{R}$, on note N_I^d (respectivement N_I^{nd}) le nombre d'accidents déclarés (respectivement non-déclarés) dans cet intervalle de temps. On note enfin $N_I = N_I^d + N_I^{nd}$.
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, quelle est la loi de N_I^d conditionnellement à $N_I = n$?
   (b) Quelle est la loi de N_I^d ?
   (c) Montrer que les dates des accidents déclarés forment un processus de Poisson dont on donnera l'intensité.
   (d) Les variables N_I^d et N_I^{nd} sont-elles indépendantes ?

4. Montrer que si on transforme les dates d'un processus de Poisson d'intensité λ sur $]0, T[$ par l'application $t \mapsto T - t$, alors on obtient toujours un processus de Poisson d'intensité λ sur $]0, T[$.

5. On modélise les dates T_i des sinistres déclarés par les assuré-es d'une compagnie d'assurance par un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$.
   On considère une date $t > 0$, et on note A_t (respectivement B_t) le temps qui sépare la date t du sinistre déclaré juste avant (respectivement après) t.
   Quelle est la loi de B_t ? Et celle de A_t ? Quelle est l'espérance de $A_t + B_t$?

6. Soit X_k des v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre θ et $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$ avec la convention $S = 0$ si $N = 0$. On suppose que N suit une loi binomiale négative (ou loi de Pólya) de paramètres r et p avec r entier. C'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}(N = n) = \frac{\Gamma(r+n)}{n!\Gamma(r)} p^r (1-p)^n.$$

(a)
- Soit $\theta, x \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite I_k définie pour $k \in \mathbb{N}^*$ par :

$$I_k = \int_0^x t^{k-1} \exp(\theta t)\ dt\ .$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{\theta^k}{(k-1)!} I_k = 1 - \exp(\theta x) \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\theta x)^j}{j!}\ .$$

- Déterminer la fonction de répartition de $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

(b) Déterminer une expression (avec une somme infinie) de la fonction de répartition de S.

(c)
- Déterminer la fonction génératrice des probabilités d'une v.a. de loi binomiale négative Neg-Bin(r, p) et celle d'une v.a. de loi binomiale Neg-Bin$(r, 1-p)$. Déterminer la fonction génératrice des moments d'une v.a. de loi exponentielle.
- En déduire que la composée d'une loi Neg-Bin(r, p) par la loi Exp(θ) a même fonction génératrice des moments que la composée d'une loi Bin$(r, 1-p)$ par la loi Exp$(p\theta)$.

(d) En déduire une expression simple (avec une somme finie) de la fonction de répartition de S.