TD 1: CHAÎNES DE MARKOV

Modèles Aléatoires Discrets M1 – 2023-2024

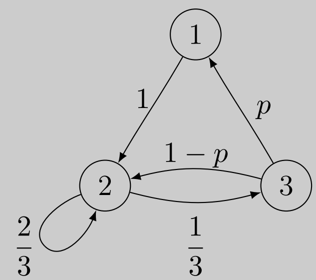
---

1. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $\{1,2,3\}$ de matrice de transition ($p \in [0,1]$):

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Dessiner le graphe de cette chaîne de Markov.

Solution: La chaîne de Markov est donnée par le graphe suivant :



(b) Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 1|X_0 = 1)$, $\mathbb{P}(X_2 = 1|X_0 = 1)$, $\mathbb{P}(X_3 = 1|X_0 = 1)$, $\mathbb{P}(X_4 = 1|X_0 = 1)$, $\mathbb{P}(X_1 = 2|X_0 = 2)$, $\mathbb{P}(X_2 = 2|X_0 = 2)$ et $\mathbb{P}(X_3 = 2|X_0 = 2)$.

Solution: Pour calculer $\mathbb{P}(X_1 = 1|X_0 = 1)$, $\mathbb{P}(X_2 = 1|X_0 = 1)$, $\mathbb{P}(X_3 = 1|X_0 = 1)$ et $\mathbb{P}(X_4 = 1|X_0 = 1)$, on peut calculer les lois de X_1, X_2, X_3 et X_4, par récurrence en partant de $X_0 = 1$ presque sûrement. Pour cela on définit la suite de loi $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\mu_0(\{1\}) = 1,$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mu_{n+1} := \mu_n Q.$$

On trouve alors:

$$\mu_1(\{1\}) = \mu_0(\{1\}) \times 0 + \mu_0(\{2\}) \times 0 + \mu_0(\{3\}) \times p = 0,$$
$$\mu_1(\{2\}) = \mu_0(\{1\}) \times 1 + \mu_0(\{2\}) \times \frac{2}{3} + \mu_0(\{3\}) \times (1-p) = 1,$$
$$\mu_1(\{3\}) = \mu_0(\{1\}) \times 1 + \mu_0(\{2\}) \times \frac{1}{3} + \mu_0(\{3\}) \times 0 = 1/0.$$

De la même façon, on trouve,

$$\mu_2(\{1\}) = \mu_1(\{1\}) \times 0 + \mu_1(\{2\}) \times 0 + \mu_1(\{3\}) \times p = 0,$$
$$\mu_2(\{2\}) = \mu_1(\{1\}) \times 1 + \mu_1(\{2\}) \times \frac{2}{3} + \mu_1(\{3\}) \times (1-p) = 2/3,$$
$$\mu_2(\{3\}) = \mu_1(\{1\}) \times 1 + \mu_1(\{2\}) \times \frac{1}{3} + \mu_1(\{3\}) \times 0 = 1/3.$$

Puis
$$\mu_3(\{1\}) = \mu_2(\{1\}) \times 0 + \mu_2(\{2\}) \times 0 + \mu_2(\{3\}) \times p = \frac{3p}{9},$$
$$\mu_3(\{2\}) = \mu_2(\{1\}) \times 1 + \mu_2(\{2\}) \times \frac{2}{3} + \mu_2(\{3\}) \times (1-p) = \frac{7-3p}{9},$$
$$\mu_3(\{3\}) = \mu_2(\{1\}) \times 1 + \mu_2(\{2\}) \times \frac{1}{3} + \mu_2(\{3\}) \times 0 = \frac{2}{9}.$$
Et enfin,
$$\mu_4(\{1\}) = \mu_3(\{1\}) \times 0 + \mu_3(\{2\}) \times 0 + \mu_3(\{3\}) \times p = \frac{6p}{27},$$
$$\mu_4(\{2\}) = \mu_3(\{1\}) \times 1 + \mu_3(\{2\}) \times \frac{2}{3} + \mu_3(\{3\}) \times (1-p) = \frac{20-3p}{9},$$
$$\mu_4(\{3\}) = \mu_3(\{1\}) \times 1 + \mu_3(\{2\}) \times \frac{1}{3} + \mu_3(\{3\}) \times 0 = \frac{7-3p}{27}.$$
On trouve donc :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = 1 | X_0 = 1) =& \mu_1(\{1\}) = 0\\ \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_0 = 1) =& \mu_2(\{1\}) = 0\\ \mathbb{P}(X_3 = 1 | X_0 = 1) =& \mu_3(\{1\}) = 3p/9\\ \mathbb{P}(X_4 = 1 | X_0 = 1) =& \mu_4(\{1\}) = 6p/27.\end{aligned}$$
Pour calculer $\mathbb{P}(X_1 = 2 | X_0 = 2)$, $\mathbb{P}(X_2 = 2 | X_0 = 2)$ et $\mathbb{P}(X_3 = 2 | X_0 = 2)$, on va calculer sommer les probabilités des chemins amenant de 2 à 2.
Il n'y a qu'un seul chemin allant de 2 à 2 en une étape : $2 \to 2$. Ce chemin a une probabilité $2/3$ donc $\mathbb{P}(X_1 = 2 | X_0 = 2) = 2/3$.
Il y a deux chemins allant de 2 à 2 en deux étapes : $2 \to 2 \to 2$ et $2 \to 3 \to 2$. Le chemin $2 \to 2 \to 2$ a une probabilité $2/3 \times 2/3 = 4/9$ et le chemin $2 \to 3 \to 2$ a une probabilité $\frac{1}{3} \times (1-p) = \frac{3-3p}{9}$. On a donc $\mathbb{P}(X_2 = 2 | X_0 = 2) = \frac{4}{9} + \frac{3-3p}{9} = \frac{7-3p}{9}$.
Il y a quatre chemins allant de 2 à 2 en trois étapes : $2 \to 2 \to 2 \to 2$, $2 \to 3 \to 2 \to 2$, $2 \to 2 \to 3 \to 2$ et $2 \to 3 \to 1 \to 2$. Le chemin $2 \to 2 \to 2 \to 2$ a une probabilité $2/3 \times 2/3 \times 2/3 = 8/27$, le chemin $2 \to 3 \to 2 \to 2$ a une probabilité $\frac{1}{3} \times (1-p) \times \frac{2}{3} = \frac{6-6p}{27}$, le chemin $2 \to 2 \to 3 \to 2$ a une probabilité $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times (1-p) = \frac{6-6p}{27}$ et le chemin $2 \to 3 \to 1 \to 2$ a une probabilité $\frac{1}{3} \times p \times 1 = \frac{9p}{27}$. On a donc $\mathbb{P}(X_2 = 3 | X_0 = 2) = \frac{8}{27} + \frac{6-6p}{27} + \frac{6-6p}{9} + \frac{9p}{27} = \frac{20-3p}{9}$.

(c) Quelle est la loi de X_1 si X_0 suit une loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$.

Solution: Si X_0 suit une loi μ_0 uniforme sur $\{1, 2, 3\}$, c'est-à-dire que
$$\mu_0(\{1\}) = \mu_0(\{2\}) = \mu_0(\{3\}) = \frac{1}{3},$$
Alors X_1 suit une loi μ_1 définie par $\mu_1 = \mu_0 Q$. On a
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{3} & \frac{8-3p}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

donc
$$\mu_1(\{1\}) = \frac{p}{3},\ \mu_1(\{2\}) = \frac{8-3p}{9} \text{ et } \mu_1(\{3\}) = \frac{1}{9},$$

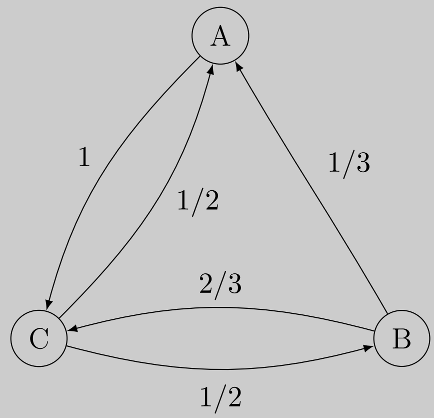
(d) On suppose que X_0 a pour loi $(1/2, 1/4, 1/4)$.
Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 2 \text{ et } X_2 = 3)$ et $\mathbb{P}(X_1 = 2 \text{ et } X_3 = 2)$.

Solution: Puisque $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov, on a :
$$\mathbb{P}(X_1 = 2 \text{ et } X_2 = 3) = \mathbb{P}(X_1 = 2)\mathbb{P}(X_2 = 3|X_1 = 2)$$
On sait que $\mathbb{P}(X_2 = 3|X_1 = 2) = \dfrac{1}{3}$ donc
$$\mathbb{P}(X_1 = 2 \text{ et } X_2 = 3) = \mathbb{P}(X_1 = 2) \times \frac{1}{3}.$$
Il nous reste à calculer $\mathbb{P}(X_1 = 2)$. On a:
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = 2) =& \mathbb{P}(X_0 = 1)Q(1,2) + \mathbb{P}(X_0 = 2)Q(2,2) + \mathbb{P}(X_0 = 3)Q(3,2)\\ =& \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{2}{3} + \frac{1}{4}(1-p)\\ =& \frac{11-3p}{12}.\end{aligned}$$
On trouve donc
$$\mathbb{P}(X_1 = 2 \text{ et } X_2 = 3) = \frac{11-3p}{12} \times \frac{1}{3} = \frac{11-3p}{36}$$
Ensuite, on a:
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = 2 \text{ et } X_3 = 2) =& \mathbb{P}(X_1 = 2)\mathbb{P}(X_3 = 3|X_1 = 2)\\ =& \frac{11-3p}{12} \times \mathbb{P}(X_3 = 3|X_1 = 2).\end{aligned}$$
Il n'y a qu'un seul chemin qui amène de 2 à 3 en deux étapes : $2 \to 2 \to 3$ qui est de probabilité $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{9}$ donc
$$\mathbb{P}(X_3 = 3|X_1 = 2) = \frac{2}{9}.$$
On en conclut que
$$\mathbb{P}(X_1 = 2 \text{ et } X_3 = 2) = \frac{11-3p}{12} \times \frac{2}{9} = \frac{11-3p}{54}.$$

2. Anna, Bruno et Carole se lancent un ballon. Anna le lance toujours à Carole ; Carole le lance aux deux autres avec la même probabilité ; Bruno le lance une fois sur trois à Anna, deux fois sur trois à Carole. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note
$$X_n = \begin{cases} A, & \text{si Anna a le ballon après } n \text{ lancers ;}\\ B, & \text{si Bruno a le ballon après } n \text{ lancers ;}\\ C, & \text{si Carole a le ballon après } n \text{ lancers.}\end{cases}$$

(a) Dessiner le graphe de probabilités associé à $(X_n)_{n\geq 0}$ et écrire sa matrice de transition Q.

Solution: La chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à pour graphe :



La matrice de transition Q associée à $(X_n)_{n\geq 0}$ est définie par :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n = (a_n, b_n, c_n)$ la loi de X_n .

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer μ_{n+1} en fonction de μ_n.

(ii) On suppose que Anna a le ballon au début du jeu. Pour chacun des joueurs, calculer la probabilité d'avoir le ballon après deux lancers.

Solution:

(i) Puisque $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov homogène, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$\mu_{n+1} = \mu_n Q.$$

(ii) Calculer la probabilité d'avoir le ballon après deux lancers pour chacun des joueurs revient à calculer μ_2 pour $\mu_0 = (1, 0, 0)$. On a:

$$\mu_1 = \mu_0 Q = (0, 0, 1).$$

De même,

$$\mu_2 = \mu_1 Q = (1/2, 1/2, 0).$$

On en conclut qu'après deux lancers, Carole n'a presque jamais le ballon, alors qu'Anne et Bruno ont chacun le ballon avec probabilité 1/2.

(c) Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ admet une unique probabilité invariante π et la calculer.

Solution: Une probabilité invariante $\pi := (\pi_A, \pi_B, \pi_C)$ satisfait le système suivant :

$$\begin{cases} \pi_A = \dfrac{1}{3}\pi_B + \dfrac{1}{2}\pi_C \\ \pi_B = \dfrac{1}{2}\pi_C \\ \pi_C = \pi_A + \dfrac{1}{2}\pi_B \\ \pi_A + \pi_B + \pi_C = 1 \end{cases}$$

La seule solution de ce système est $\pi = \left(\dfrac{4}{13}, \dfrac{3}{13}, \dfrac{6}{13}\right)$.

3. On considère la chaîne de Markov sur l'espace d'états $\{1, 2\}$ dont la matrice de transition est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

où $p, q \in [0, 1]$ sont fixés.

   (a) Dessiner son graphe. Déterminer la ou les mesures stationnaires.

   (b) On note $a_n = P(X_n = 1)$ et $b_n = \mathbb{P}(X_n = 2)$. Ecrire une relation de récurrence pour les couples (a_n, b_n) et la résoudre.

   (c) Etudier alors le comportement asymptotique de $\mathbb{P}(X_n = 1)$.

4. **Dépenses énergétiques**

On dispose, dans une maison individuelle, de deux systèmes de chauffage, l'un de base, et l'autre d'appoint. On dira qu'on est dans l'état 1 si seul le chauffage de base fonctionne, et dans l'état 2 si les deux systèmes fonctionnent.

Si un jour on est dans l'état 1, on estime qu'on y reste le lendemain avec une probabilité $\frac{1}{2}$; en revanche, si on est dans l'état 2, le lendemain la maison est chaude, et l'on passe à l'état 1 avec une probabilité $\frac{3}{4}$.

Soit X_n l'état du système au jour numéro n.

   (a) Expliquer pourquoi $(X_n)_{n\geq 0}$ peut être modélisé par une chaîne de Markov homogène. Quel est son espace d'états ? Déterminer sa matrice de transition Q et son graphe.

   (b) On pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$. Déterminer une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}, puis exprimer p_n en fonction de p_0. Que vaut $\lim_{n\longrightarrow\infty} p_n$?

   (c) Sachant qu'on est dans l'état 1 un dimanche, trouver la probabilité d'être dans le même état le dimanche suivant ?

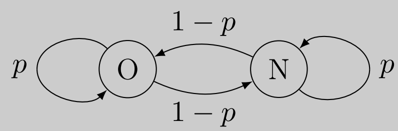
   (d) Montrer que si un jour on se trouve dans l'état 1 avec une proba $\frac{3}{5}$, alors il en est de même tous les jours qui suivent.

   (e) Chaque journée dans l'état 1 coûte 1,5 €, et dans l'état 2 coûte 2 €. Chaque transition de l'état 1 à l'état 2 ou inversement coûte 0,5 €. Calculer le coût moyen d'une journée dans la situation précédente.

5. **Bruit qui court**
Un message pouvant prendre 2 formes (oui ou non) est transmis à travers n intermédiaires. On suppose que chaque intermédiaire transmet le message de façon correcte avec une probabilité $p \in \,]0,1[$ ou le déforme en son contraire avec une probabilité $1-p$. Les intermédiaires sont indépendants.

(a) Modéliser cette situation par une chaîne de Markov à 2 états.

Solution: On peut modéliser la situation par la chaîne de Markov donnée par le graphe suivant :



ce qui correspond à la matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

(b) Calculer la probabilité que l'information transmise par le n-ième intermédiaire soit conforme à l'information initiale.
Indication : remarquer que (1, 1) et (1,-1) sont vecteurs propres de Q et diagonaliser Q.

Solution: On remarque que

$$\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (2p-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'inverse de A est :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a alors:

$$A^{-1}QA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix}.$$

On en conclut donc que

$$Q^n = A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix}^n A^{-1} = A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2p-1)^n \end{pmatrix} A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(2p-1)^n & 1-(2p-1)^n \\ 1-(2p-1)^n & 1+(2p-1)^n \end{pmatrix}$$

La probabilité que l'information transmise par le n-ième intermédiaire soit conforme à l'information initiale vaut donc $\dfrac{1+(2p-1)^n}{2}$.

(c) Que se passe-t-il lorsque $n \to +\infty$?

Solution: On a trois cas de figure possible :

- si $p = 1$, l'information transmise est toujours conforme à l'information initiale, on n'a donc aucune perte d'information,

- si $p = 0$, l'information transmise est toujours conforme à l'information initiale lors des étapes paires, et est l'inverse de l'information initiale lors des étapes impaires,
- sinon, la probabilité que l'information transmise à l'étape n soit conforme à l'information initiale converge vers $\frac{1}{2}$.