Problèmes mathématiques pour le prochain siècle[1]

Steve SMALE (*City University of Hong Kong*)

Introduction

V. I. Arnold, au nom de l'Union Mathématique Internationale, a écrit à plusieurs mathématiciens pour leur demander de décrire quelques grands problèmes pour le prochain siècle. Ce rapport est ma réponse.

L'invitation d'Arnold est en partie inspirée de la liste de Hilbert de 1900 (voir par exemple [Browder, 1976]) et j'ai utilisé cette liste pour m'aider à écrire cet essai.

Je propose 18 problèmes, choisis avec les critères suivants :

(1) énoncé simple. Aussi, de préférence, précis mathématiquement.

(2) connaissance personnelle du problème. Je ne l'ai pas trouvé facile.

(3) ma conviction que la question, sa solution, des résultats partiels ou même des tentatives de solution auront vraisemblablement une grande importance pour les mathématiques et leur développement au siècle prochain.

Certains de ces problèmes sont bien connus. En fait, y sont inclus ce que je crois être les trois plus grands problèmes ouverts des mathématiques : l'hypothèse de Riemann, la conjecture de Poincaré et « P=NP ? ». En dehors de l'hypothèse de Riemann, l'un des énoncés ci-dessous est sur la liste de Hilbert (le 16$^{\text{e}}$ problème de Hilbert). Il y a un certain recouvrement avec mon papier précédent « Dynamics retrospective, great problems, attempts that failed » [Smale, 1991].

Commençons.

Problème 1 : L'hypothèse de Riemann

> *Les zéros de la fonction zêta de Riemann, définie par le prolongement analytique de*
>
> $$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\ , \qquad Re(s) > 1$$
>
> *situés dans la bande critique* $0 \leqslant Re(s) \leqslant 1$*, sont-ils tous sur la droite* $Re(s) = \frac{1}{2}$ *?*

C'était le problème n$^{\text{o}}$ 8 sur la liste de Hilbert. Il y a beaucoup de bons livres faciles à trouver sur la fonction zêta et l'hypothèse de Riemann. Aussi je m'arrête là.

[1] Conférence prononcée à l'occasion du 60$^{\text{e}}$ anniversaire d'Arnold, à l'institut Fields, Toronto, juin 1997. Ce texte a été publié en anglais dans *The Mathematical Intelligencer*, vol. 20, n$^{\text{o}}$ 2, 1998.

Problème 2 : La conjecture de Poincaré

> *On suppose qu'une variété compacte connexe de dimension 3 a la propriété que tout cercle de cette variété peut être déformée sur un point. Est-elle alors homéomorphe à la 3-sphère ?*

La *n-sphère* est l'espace

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\} , \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 .$$

Une variété compacte de dimension n peut être assimilée à une surface fermée bornée de dimension n (différentiable et non singulière) dans un espace euclidien.

La conjecture de Poincaré en dimension n affirme qu'une variété M compacte de dimension n, ayant la propriété que tout plongement $f : S^k \to M$, $k < n$ (ou de façon équivalente, $k \leqslant n/2$) peut être déformée sur un point, doit être homéomorphe à S^n.

Henri Poincaré a fait œuvre de pionnier en étudiant ces problèmes dans ses articles de topologie. En 1900 Poincaré a annoncé une preuve dans le cas général à n dimensions (voir [Poincaré, 1953], pp. 338–370). Ensuite (en 1904) il a trouvé un contre exemple à sa première version de l'énoncé [Poincaré 1953, pp. 435–498]. Dans le second article il se limite à $n = 3$ et énonce le cas de dimension 3 sous la forme ci-dessus (et non pas comme une « conjecture »).

Mon rapport personnel avec ce problème est décrit dans [Smale, 1990], où j'écrivais :

> « J'ai entendu parler pour la première fois de la conjecture de Poincaré en 1955 à Ann Arbor alors que je rédigeais ma thèse sur un problème de topologie. Peu de temps après, j'eus l'impression d'avoir trouvé une preuve (en dimension 3). Hans Samuelson était dans son bureau, et, très excité, je lui esquissai mon idée [...] Après avoir quitté son bureau, je me rendis compte que ma « preuve » n'avait utilisé aucune hypothèse sur la 3-variété ».

En 1960, « sur les plages de Rio », j'ai donné une réponse affirmative à la conjecture de Poincaré en dimension n pour $n > 4$. En 1983, Mike Freedman a donné une réponse affirmative pour $n = 4$. (Note : pour $n > 4$, j'ai démontré un résultat plus fort, à savoir que M est la réunion lisse de deux domaines $M = D^n \cup D^n$; ce problème est encore ouvert aujourd'hui pour $n = 4$.)

Pour des références sur ces sujets, en plus de celles déjà données, voir [Smale, 1963].

Beaucoup d'autres mathématiciens après Poincaré ont affirmé avoir une preuve du cas $n = 3$. Voir [Taubes, 1987] pour une description de quelques unes de ces tentatives.

Une raison pour laquelle la conjecture de Poincaré est fondamentale dans l'histoire des mathématiques est qu'elle a permis de se concentrer sur les variétés comme objet d'études. En ce sens, Poincaré a poussé une grande partie des mathématiques du 20e siècle à s'intéresser aux objets géométriques, incluant les variétés algébriques, riemanniennes, etc.

J'ai la conviction qu'un phénomène comparable se produit aujourd'hui pour la notion « d'algorithme en temps polynomial ». On analyse maintenant les algorithmes pour eux-mêmes, et pas simplement comme un moyen de résoudre d'autres problèmes. Aussi je suggère que, de même que l'étude de l'ensemble des solutions d'une équation (c'est-à-dire une variété) a joué un rôle important dans les mathématiques du 20e siècle, la question du calcul des solutions (c'est-à-dire un algorithme) peut jouer un rôle d'égale importance au prochain siècle.

Problème 3 : P=NP ?

Je considère parfois ce problème comme un cadeau des informaticiens aux mathématiciens. Il peut être utile de le mettre sous une forme qui ressemble davantage à des mathématiques traditionnelles.

Pour cela, considérons d'abord le théorème des zéros de Hilbert sur les nombres complexes. Soient donc $f_1, \ldots, f_k$ des polynômes complexes à n variables ; il nous est demandé de décider s'ils ont un zéro commun $\zeta \in \mathbb{C}^n$. Le théorème des zéros affirme qu'il n'y en a pas si et seulement s'il existe des polynômes complexes $g_1, \ldots, g_k$ à n variables satisfaisant l'identité polynomiale

$$\sum_1^k g_i f_i = 1. \tag{1}$$

Le théorème des zéros effectif, établi par Brownawell (1987) et d'autres, précise que dans (1) on peut rajouter que les degrés des g_i satisfont

$$\deg\ g_i \leqslant \max(3, D)^n\ , \qquad D = \max\ \ \deg\ \ f_i.$$

Avec cette borne sur le degré, le problème de décidabilité devient un problème d'algèbre linéaire. Etant donnés les coefficients des f_i, on peut vérifier si (1) a une solution en les coefficients des g_i. Ainsi, on a un algorithme pour décider du problème des zéros. Le nombre d'opérations arithmétiques de cet algorithme augmente exponentiellement par rapport au nombre de coefficients des f_i (la taille des données).

Conjecture (P $\neq$ NP dans $\mathbb{C}$). *Il n'y a pas d'algorithme en temps polynomial pour décider du problème des zéros.*

Un algorithme en temps polynomial est un algorithme dont le nombre de pas de calcul est borné par un polynôme en le nombre des coefficients des f_i.

Pour donner un sens mathématique à cette conjecture, on a besoin d'une définition formelle de ce qu'est un algorithme. Dans ce contexte, la définition traditionnelle d'une machine de Turing n'est pas intéréssante.

Dans [Blum-Shub-Smale, 1989] une définition satisfaisante est proposée, et la théorie associée est exposée dans [Blum-Cucker-Shub-Smale (ou BCSS),1997].

Très brièvement, une machine sur $\mathbb{C}$ a comme entrées une chaîne finie de nombres complexes, et de même pour les états et les sorties. Les calculs sur les états incluent les opérations arithmétiques et les décalages de la chaîne. Enfin, on se donne une opération de branchement conditionnel, « $x_1 = 0?$ ».

La taille d'une entrée est le nombre d'éléments de la chaîne d'entrée. Le temps d'un calcul est le nombre d'opérations machine utilisées dans le passage des entrées aux sorties. Ainsi la notion d'algorithme en temps polynomial sur $\mathbb{C}$ est bien définie.

Notez bien que tout ce qui a été dit sur les machines et la conjecture utilise uniquement la structure de corps de $\mathbb{C}$ et, à partir de là, à la fois la machine et la conjecture marchent sur n'importe quel corps. En particulier, si le corps est le corps à deux éléments $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, nous retrouvons les machines de Turing.

Considérons le problème de décision : soit en entrées k polynômes à n variables et à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ont ils un zéro commun $\zeta \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$?

> **Conjecture.** *Sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, il n'y a pas d'algorithme en temps polynomial pour décider si ce problème est résoluble.*

C'est une simple reformulation de la conjecture classique $P \neq NP$.

Ci-dessus j'ai laissé de côté les notions de base et les théorèmes relatifs à la NP-complétude. Pour le cas classique de Cook et Karp, voir [Garey-Johnson, 1979], et pour la théorie sur un corps arbitraire, voir [BCSS].

Problème 4 : Zéros entiers d'un polynôme

Commençons par définir un invariant diophantien τ en vue de la théorie de la complexité. Un *programme* pour un polynôme $f \in \mathbb{Z}[t]$ en une variable à coefficients entiers est l'objet $(1, t, u_1, \ldots, u_k)$ où $u_k = f$, et pour tout ℓ, $u_\ell = u_i \circ u_j$, $i, j < \ell$, où $\circ$ est $+$ ou $-$ ou $\times$. Ici $u_0 = t$, $u_{-1} = 1$. Alors $\tau(f)$ est le plus petit k sur tous ces programmes.

> *Le nombre de zéros entiers distincts de f est-il polynomialement borné par $\tau(f)$? En d'autres termes, a-t-on*
>
> $$Z_a(f) \leqslant \tau(f)^c \quad \textit{pour tout} \quad f \in \mathbb{Z}[t]$$
>
> où $Z_a(f)$ est le nombre de zéros entiers distincts de f et c une constante universelle ?

Avec Mike Shub nous avons découvert ce problème dans nos études sur la complexité. Nous avons démontré qu'une réponse positive entraînait l'impossibilité de résoudre le problème des zéros comme problème de décision sur $\mathbb{C}$ et donc $P \neq NP$ sur $\mathbb{C}$. Voir [Shub-Smale, 1995] et aussi [BCSS].

Puisque le degré de f est inférieur ou égal à $2^{\tau+1}$ avec $\tau = \tau(f)$, il n'y a pas plus que $2^{\tau+1}$ zéros en tout.

Pour les polynômes de Chebyshev, le nombre de zéros réels distincts croît exponentiellement avec τ.

Beaucoup de problèmes diophantiens classiques comportent deux variables ou plus. Celui-ci demande une estimation en une seule variable, et cependant il ne semble pas facile.

Voici un problème voisin. Un programme pour un entier m est l'objet $(1, m_1, \ldots, m_\ell)$ où $m_\ell = m$, $m_0 = 1$, $m_q = m_i \circ m_j$, $i, j < q$ et $\circ = +, -$ ou $\times$. Alors, soit $\tau(m)$ le minimum de ℓ, sur tous ces programmes. Ainsi $\tau(m)$ représente la façon la plus courte de construire un entier m en partant de 1 et en utilisant les opérations d'addition, de soustraction et de multiplication.

Problème : existe-t-il une constante c telle que $\tau(k!) \leqslant (\log k)^c$ pour tout entier k ? On peut s'attendre à ce que ce soit faux, ce qui entraînerait que $k!$ est difficile à calculer. Voir [Shub-Smale, 1995].

Problème 5 : Bornes sur la hauteur pour les courbes diophantiennes

> *Peut on décider si une équation diophantienne $f(x, y) = 0$ (avec $f \in Z[u, v]$ donné) est résoluble en temps 2^{s^c} où c est une constante universelle ?*

On désigne par $s = s(f)$ la taille de f défine par
$s(f) = \sum_{|\alpha| \leqslant d} (\log\ |a_\alpha| + 1)$, $\ f(x, y) = \sum_{|\alpha| \leqslant d} a_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}$, $\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$
et $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, $\ \alpha_i \geqslant 0$.

On dit que $f(x, y)$ est résoluble s'il existe des entiers x, y avec $f(x, y) = 0$. On utilise le modèle de calcul de Turing.

Ce problème est posé surtout dans [Cucker-Koiran-Smale, 1999]. La taille $s(f)$ est une version de la « hauteur » de f. Des conjectures sur les bornes des hauteurs comme dans [Lang, 1991] peuvent se montrer très utile pour attaquer ce problème. Voir aussi [Manders-Adelman, 1978].

Problème 6 : Finitude du nombre d'équilibres relatifs en mécanique céleste

> *Etant donné des nombres réels positifs $m_1, \ldots, m_n$ représentant les masses dans le problème des n corps en mécanique céleste, le nombre des équilibres relatifs est-il fini ?*

Ce problème se trouve dans le livre de mécanique céleste de Wintner (1941). Un équilibre relatif est une solution des équations de Newton qui est induite par une rotation plane.

Pour le problème des 3 corps il y a cinq équilibres relatifs : trois trouvés par Lagrange, deux par Euler. Pour 4 corps, la question est ouverte.

Dans [Smale, 1970], j'ai interprété les équilibres relatifs comme points critiques d'une fonction induite par le potentiel du problème plan des n corps. Plus précisément les équilibres relatifs correspondent aux points critiques de

$$\hat{V} : (S_k - \Delta)/SO(2) \to \mathbb{R}$$

où $S_k = \{x \in (\mathbb{R}^2)^n \mid \sum m_i x_i = 0,\ \frac{1}{2} \sum m_i \|x_i\|^2 = 1\}$,
$\Delta = \{x \in S_k \mid \exists (i, j), i \neq j, x_i = x_j\}$.

Le groupe des rotations $SO(2)$ agit sur $S_k - \Delta$ et $\hat{V}$ est induite sur le quotient par le potentiel

$$V(x) = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{\|x_i - x_j\|} .$$

Notez que $V : S_k \to \mathbb{R}$ est invariant par le groupe de rotation $SO(2)$ et que l'espace quotient $S_k/SO(2)$ est homéomorphe à l'espace projectif complexe de dimension $n - 2$.

Mike Shub (1970) a montré que l'ensemble des points critiques est compact et Palmore (1976) que même pour $n = 4$, $\hat{V}$ peut avoir des points critiques dégénérés.

Les équilibres relatifs jouent un rôle important en mécanique céleste, par exemple, dans la bifurcation du moment angulaire. De plus dans le système solaire, les planètes troyennes correspondent aux équilibres relatifs de Lagrange.

Kuz'mina (1977) a trouvé des majorations explicites dans le cas générique. On trouvera d'autres informations dans [Abraham-Marsden, 1978].

Problème 7 : Distribution de points sur la sphère de dimension 2

Soit $V_N(x) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} \log \frac{1}{\|x_i - x_j\|}$ où $x = (x_1, \ldots, x_N)$, les x_i sont des points distincts sur la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, et $\|x_i - x_j\|$ est la distance dans $\mathbb{R}^3$. On écrira V_N pour $\min_x V_N(x)$.

Trouver $(x_1, \ldots, x_N)$ *tels que*

$$V_N(x) - V_N \leqslant c \log N \ , \quad c \text{ constante universelle.} \tag{2}$$

« Trouver » veut dire donner un algorithme qui, avec N en entrée, fournit en sortie des points distincts $x_1, \ldots, x_N$ sur la sphère qui satisfont (2). Pour être précis on pourrait prendre un algorithme sur les nombres réels au sens de [BCSS] (en rajoutant le calcul d'une racine carrée) avec un temps d'exécution polynomial en N.

Ce problème provient de la théorie de la complexité, dans un article écrit avec Mike Shub (voir [Shub-Smale, 1993]). Sa motivation était de trouver un bon polynôme de départ pour un algorithme d'homotopie réalisant le théorème fondamental de l'algèbre.

On dit que le N-uplet $(x_1, \ldots, x_N) = x$ est un point elliptique de Fekete si l'on a $V_N(x) = V_N$ (voir [Tsuji, 1959]).

La fonction V_N en tant que fonction de N vérifie

$$V_N = -\tfrac{1}{4} \log \left(\tfrac{4}{e}\right) N^2 - \tfrac{1}{4} N \log N + O(N) \ .$$

Il est naturel de considérer également les fonctions

$$V_N(x, s) = \sum_{i<j} \frac{1}{\|x_i - x_j\|^s}, \qquad V_{N,s} = \min_x V_N(x, s) \ ,$$

avec x comme précédemment et $0 < s < 2$. Les valeurs particulières $V_N(x)$ et V_N correspondent d'une façon naturelle à $s = 0$, et pour $s = 1$, $V_N(x, 1)$ est le potentiel de Coulomb, et $V_N(1)$ correspond à la position d'équilibre de N électrons astreints à rester sur la 2-sphère.

J'ai demandé à Ed Saff de m'aider à résoudre le problème principal ci-dessus. Ultérieurement, lui et ses collègues ont écrit plusieurs bons articles en rapport avec le sujet et ses ramifications. Voir [Kuijlaars-Saaf, 1997] et [Saaf-Kuijlaars, 1997] pour une meilleure idée du contexte et d'autres précisions. Dans Rakhmanov-Saff-Zhou (1994], on trouve des calculs numériques ($N = 12000$) à l'appui de ces problèmes.

Un autre point de vue sur notre problème principal consiste à optimiser la fonction

$$W_N(x) = (\exp V_N(x))^{-1} = \prod_{i<j} \|x_i - x_j\| \ .$$

Cependant, comme il est écrit dans [Shub-Smale, 1993], « ... ceci n'est peut-être pas si facile puisqu'il y a des points selle d'indice N (N points $x_1, \ldots, x_N$

équidistribués sur un grand cercle de la sphère). En plus, les diverses symétries de W_N risquent de brouiller le dessin. »

Problème 8 : Introduction de la dynamique dans la théorie économique

Le problème suivant ne relève pas des mathématiques pures, mais est à l'interface de l'économie et des mathématiques. Il n'a été résolu que dans des cas très particuliers.

Etendre le modèle mathématique de la théorie de l'équilibre général pour inclure les ajustements de prix.

Il y a une théorie (statique) de l'équilibre des prix en économie qui a commencé avec Walras et qui s'enracine dans l'œuvre de Arrow et Debreu (voir [Debreu, 1959]). Pour le cas trivial d'un seul marché, ceci se ramène à l'équation « offre égale demande », et l'on trouve facilement une dynamique naturelle [Samuelson, 1971]. Pour plusieurs marchés, la situation est complexe.

Il y a une fonction appelée l'excès de demande $Z(p) = D(p) - S(p)$ de l'ensemble des prix dans l'ensemble des biens. A la fois la demande D et l'offre S sont définies par agrégation des demandes et offres individuelles. Les sciences économiques justifient des conditions sur le comportement individuel qui conduisent à des axiomes sur Z. Ces axiomes pour la fonction d'excès de demande $Z : \mathbb{R}^\ell_+ \to \mathbb{R}^\ell$ sont :

(1) $Z(\lambda p) = Z(p)$, pour tout $p = (p_1, \ldots, p_\ell)$, $p_i \geqslant 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$.
(2) $\sum_{i=1}^{\ell} p_i Z_i(p) = 0$, loi de Walras (la valeur totale est zéro).
(3) $Z_i(p) > 0$ if $p_i = 0$ (demande positive pour un bien gratuit).

En vertu de (1),(2),(3), Z peut être interprété comme un champ de vecteur sur l'ensemble des points de la $(\ell - 1)$-sphère à coordonnées positives, champ qui, sur la frontière, pointe à l'intérieur. L'existence d'un vecteur des prix d'équilibre p^* découle du théorème de Hopf, qui entraîne $Z(p^*) = 0$, et « offre égale demande ».

Dans le problème 8, on recherche un modèle dynamique, dont les états sont les vecteurs de prix (avec une définition élargie pour inclure d'autres variables économiques). Cette théorie doit être compatible avec la théorie existante des équilibres. Une caractéristique agréable en serait que l'évolution des prix en fonction du temps soit déterminée par les actions individuelles des agents économiques.

J'ai travaillé sur ce problème pendant plusieurs années, en pensant que c'était le problème principal des Sciences économiques [Smale, 1976]. Voir aussi [Smale, 1981] pour les bases.

Problème 9 : Le problème de programmation linéaire

Existe-t-il un algorithme en temps polynomial sur les nombres réels qui décide si le système linéaire d'inégalités $Ax \geqslant b$ a une solution ?

L'algorithme recherché dans ce problème doit fonctionner sur une machine travaillant en nombre réels au sens de [BCSS] (voir problème 3). Le système $Ax \geqslant b$ est décrit par une matrice réelle A à m lignes et n colonnes et un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$ et la question est : existe-t-il $x \in \mathbb{R}^n$ avec $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i$ pour tout $i = 1, \ldots, m$? Le temps est mesuré par le nombre d'opérations arithmétiques. Ce problème est dans [BCSS].

Il y a une version « problème de décision » du problème d'optimisation de la programmation linéaire : étant donnés A, b comme ci-dessus et $c \in \mathbb{R}^n$, décider si

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} c \cdot x \quad \text{avec la contrainte} \quad Ax \geqslant b$$

existe, et si oui, calculer un tel x.

La célèbre méthode du simplexe de Dantzig fournit un algorithme pour ces deux problèmes (sur $\mathbb{R}$) mais Klee et Minty ont montré qu'il était exponentiellement lent dans le pire des cas. D'autre part, Borgwardt et moi avons démontré, avec une importante aide ultérieure de Haimovich, qu'en moyenne il était en temps polynomial. Pour tout cela, voir [Schrijver, 1986].

Dans le cadre du modèle de calcul de Turing, qui utilise les nombres rationnels $\mathbb{Q}$, et dans lequel le coût est mesuré au niveau des « bits », il y a un développement parallèle. A partir des idées de Yudin-Nemirovsky, Khachian a trouvé un algorithme en temps polynomial (la méthode de l'ellipsoïde) pour le problème de programmation linéaire. Ensuite, Karmarkar avec sa « méthode du point intérieur » a trouvé un algorithme utilisable en pratique pour ce problème, et il a montré qu'il fonctionnait en temps polynomial dans le modèle de Turing. Pour tout cela, on peut consulter [Grötschel-Lovász-Schrijver, 1993] et [Schrijver, 1986].

Plus proche du problème principal posé ci-dessus sur $\mathbb{R}$, il existe un problème similaire qui demande à trouver un « algorithme fortement polynomial » sur $\mathbb{Q}$ pour résoudre ces problèmes de programmation linéaire. Cette notion d'algorithme requiert que le nombre d'opérations arithmétiques ainsi que le nombre d'opérations sur des bits soit polynomial par rapport à la taille en bits des données ($m \times (n+1)$). Megiddo et tout particulièrement Tardos (voir [Grötschel-Lovász-Schrijver, 1993]) ont obtenus des résultats partiels.

Pour le problème sur $\mathbb{R}$, il y a aussi comme références [Barvinok-Vershik, 1993] et [Traub-Woźniakowski, 1982].

Problème 10 : Le « Closing Lemma » [2]

> *Soit p un point non-errant d'un difféomorphisme $S : M \to M$ d'une variété compacte. Peut on arbitrairement bien approcher S, ainsi que ses dérivées d'ordre r (approximation de classe C^r) pour tout r, par $T : M \to M$ de telle façon que p soit un point périodique de T ?*

---

[2] N.D.T. Il semble qu'il n'y ait pas de traduction officielle, cf. par exemple le Mémoire de la S.M.F. n° 98 de M.-C. Arnaud intitulé Le *closing Lemma*.

Un point non-errant $p \in M$ est un point qui a la propriété que, pour tout voisinage U de p, il y a un entier $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, tel que $S^k U \cap U \neq \varnothing$. Dans cette formule, S^k est le $k-$ième itéré de S. De plus, on dit que p est un point périodique de période m si $T^m(p) = p$.

C'est la forme discrète du fameux « closing lemma » qui, dans le cas C^1 a été résolu affirmativement par Charles Pugh (1967).

On obtient facilement une approximation C^0 ayant la propriété désirée. Peixoto a observé que cet argument ne marche pas pour les approximations C^1, corrigeant ainsi une erreur de René Thom (que René m'a avoué être sa plus grosse erreur).

Pugh-Robinson (1983) ont démontré le « closing lemma » avec des approximations de classe C^1 pour la version Hamiltonienne. Peixoto a donné une réponse affirmative pour les approximations de classe C^r, pour tout r, pour le cercle ainsi que la version en temps continu pour les variétés orientables de dimension 2. Récemment, le « closing lemma » a encore pris de l'importance du fait du travail de Hayashi (1997) ; voir aussi [Wen-Xia, 1997].

Problème 11 : Les systèmes dynamiques en dimension un sont ils généralement hyperboliques ?

> *Un polynôme complexe T peut-il être approché par un polynôme de même degré avec la propriété que tout point critique tend par itération vers un point attractif périodique ?*

Ce problème n'est même pas résolu pour les polynômes de degré 2. On considère le système dynamique engendré par itération d'une application polynomiale $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (où $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes). Si $z \in \mathbb{C}$, son orbite dans le temps, $z = z_0, z_1, z_2, \ldots$, est définie par $z_i = T(z_{i-1})$ et i peut être interprété comme un temps discret. Un point fixe w de T, $(T(w) = w)$ est un *point attractif* si la dérivée $T'(w)$ de T en w a un module strictement inférieur à 1. Un point attractif périodique de T, de période p, est un point attractif pour T^p. Un point critique de T est un point où la dérivée de T s'annule.

Maintenant que le problème est précisé, il est utile de le regarder dans le cadre de la dynamique hyperbolique développée à partir des années 1960.

Un point fixe x d'un difféomorphisme $T : M \to M$ est *hyperbolique* si la dérivée $DT(x)$ de T en x (comme automorphisme linéaire de l'espace tangent) n'a pas de valeur propre de module égal à 1. Si x est un point périodique de période p, alors x est hyperbolique si c'est un point fixe hyperbolique de T^p. La notion d'hyperbolicité s'étend de façon naturelle à Ω, l'adhérence de l'ensemble des points non-errants (voir le problème 10).

Un système dynamique $T \in \mathrm{Diff}(M)$ est dit *hyperbolique* (ou satisfait l'Axiome A) si les points périodiques sont denses dans Ω et si Ω est hyperbolique (voir [Smale, 1967 ou 1980]). Nous supposons aussi qu'il vérifie la condition de non-cycle. Les travaux de plusieurs personnes, spécialement de Ricardo Mañé, ont permis d'identifier la notion de système dynamique hyperbolique avec une notion forte de stabilité des systèmes dynamiques appelée stabilité structurelle. Il y a même un début de théorie sur la structure de cette classe de systèmes dynamiques.

Les systèmes dynamiques hyperboliques constituent un ensemble assez vaste de systèmes dynamiques, mais il en existe d'autres qui forment un ensemble encore plus grand et qui incluent les dynamiques chaotiques intervenant dans les applications. Le concept d'hyperbolicité s'étend des systèmes dynamiques inversibles au cas étudié ci-dessus des applications polynomiales de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. La théorie classique des fonctions de variables complexes permet de remplacer le problème par le problème équivalent suivant.

> *Une application polynomiale $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ peut-elle être approchée par une autre qui soit hyperbolique ?*

La théorie des systèmes dynamiques complexes à une dimension a été initiée par Fatou et Julia au début de ce siècle. Dans les années 1960, j'ai demandé à mon étudiant en thèse John Guckenheimer de regarder leurs travaux et d'essayer de résoudre le problème ci-dessus (entre autres choses). Sa thèse (voir [Chern-Smale, 1970]) contient une réponse affirmative, mais avec un trou dans la preuve. Actuellement, ce problème ouvert apparaît comme le problème fondamental des systèmes dynamiques à une dimension.

L'article de John est l'un des nombreux articles sur les problèmes discutés dans cet essai comportant une preuve fausse, comme celui de Poincaré.

Les systèmes dynamiques complexes à une dimension sont devenus un sujet florissant et ont fait l'objet de contributions importantes de Douady-Hubbard, Sullivan, Yoccoz, McMullen, parmi beaucoup d'autres (voir [Mc Mullen, 1994]).

Il y a un domaine parallèle de la dynamique réelle à une dimension d'une application régulière $T : I \to I$, $I = [0, 1]$.

> **Problème :** *Une application régulière $T : [0, 1] \to [0, 1]$ peut elle être C^r-approchée, pour tout r, par une application hyperbolique ?*

A l'époque de la thèse de Guckenheimer, j'ai demandé à Ziggy Nitecki d'étudier ce problème. Ma précédente négligence fut aggravée par le fait que je n'avais pas remarqué l'erreur dans la thèse de Nitecki (voir [Chern-Smale, 1970]), qui prétendait donner une preuve affirmative.

Par la suite, Jakobson (1971) résolut le problème pour les approximations de classe C^1, mais le cas général reste ouvert. Voir de Melo-van Strien (1993) pour plus de détails.

Problème 12 : Centralisateurs de difféomorphismes

> *Un difféomorphisme d'une variété compacte M sur elle-même peut-il être C^r approché, pour tout $r \geqslant 1$, par un difféomorphisme $T : M \to M$ qui commute seulement avec ses itérés ?*

On veut que le centralisateur de T dans le groupe des difféomorphismes, Diff(M), soit $\{T^k \mid k \in Z\}$.

J'ai commencé à penser au centralisateur dans [Smale, 1963], mais ce n'est qu'après la soutenance de la thèse de Nancy Kopell sous ma direction (voir [Chern-Smale, 1970]), dans laquelle était résolu affirmativement le cas dim $M = 1$, que j'ai proposé ce problème [Smale, 1967]. Aujourd'hui, il n'est toujours pas résolu, même pour les variétés M de dimension 2.

On peut aussi se demander si l'ensemble des difféomorphismes de M à centralisateur trivial est dense et *ouvert* dans Diff(M) muni de la topologie C^r.

Le travail essentiel sur ces problèmes a été fait par Palis-Yoccoz (1989), avec des réponses presque complètes dans le cas des systèmes dynamiques hyperboliques (voir Problème 11) pour n'importe quelle variété.

J'ai écrit dans [Smale, 1991], « je trouve ce problème intéressant en ce sens qu'il éclaire un peu le royaume sombre, au delà de l'hyperbolicité, où même il est difficile de poser clairement les problèmes ».

Problème 13 : Le 16$^{\rm e}$ problème de Hilbert

Soit l'équation différentielle dans $\mathbb{R}^2$

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y)\ , \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x,y) \tag{3}$$

où P et Q sont des polynômes. Existe-t-il une borne K pour le nombre de cycles limites, de la forme $K \leqslant d^q$, où d est le maximum des degrés de P et Q, et q est une constante universelle ?

C'est une version moderne de la seconde moitié du seizième problème de Hilbert. Mise à part l'hypothèse de Riemann, il semble que ce soit le plus insaisissable des problèmes de Hilbert.

En fait, depuis un article de Petrovskii et Landis (1957) prétendant donner une solution positive, les progrès semblent aller à reculons. Un peu plus tôt, Dulac (1923) affirmait que le système (3) a toujours un nombre fini de cycles limites. Après qu'un trou fût trouvé dans Petrovskii-Landis (voir [Petrovskii-Landis, 1959]), Ilyashenko (1985) a trouvé une erreur dans l'article de Dulac. Puis Shi Songling (1982) a trouvé un contre-exemple aux bornes spécifiques de Petrovskii-Landis pour le cas $d = 2$. Ensuite, deux longs travaux ont été publiés, indépendamment, démontrant les affirmations de Dulac [Écalle, 1992] et [Ilyashenko, 1991]. Ces deux articles ont cependant à être complètement digérés par la communauté mathématique.

Ainsi, on sait qu'il y a un nombre fini de cycles limites, mais on n'a pas de majoration. Nous allons considérer une classe spéciale pour laquelle il est facile de prouver la finitude, mais pour laquelle aucune majoration n'est actuellement connue.

L'exemple ci-dessous correspond à l'équation de Liénard (voir par exemple [Hirsch-Smale, 1974])

$$\frac{dx}{dt} = y - f(x)\ , \qquad \frac{dy}{dt} = -x \tag{4}$$

où $f(x)$ est un polynôme réel dont le terme dominant est x^{2k+1} et qui vérifie $f(0) = 0$.

Si $f(x) = x^3 - x$ alors (4) est l'équation de van der Pol avec un cycle limite. Plus généralement, on peut facilement montrer que toutes les solutions de (4) s'enroulent autour de l'unique point d'équilibre (0,0) dans le sens des aiguilles d'une montre. En suivant ces courbes, on définit une « section de Poincaré », $T : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ où $\mathbb{R}^+$ est le demi-axe des y positifs. Les cycles limites de (4) sont précisément les points fixes de T. Dans différents exposés, j'ai soulevé la question d'estimer le nombre de ces points fixes (en appliquant une nouvelle espèce de théorème du point fixe ?). En réponse, Lins, de Melo et Pugh (1977) ont trouvé des exemples avec k cycles limites distincts et ont conjecturé que ce nombre k était la borne supérieure. Aucune majoration de la forme $(\deg\ f)^q$ n'a encore été trouvée. Puisque T est analytique, il s'ensuit que (4) n'a qu'un nombre fini de cycles limites pour chaque f.

Pour plus de détails voir [Browder, 1976], [Ilyashenko-Yakovenko, 1995], [Lloyd and Lynch, 1988], et [Smale, 1991].

Problème 14 : L'attracteur de Lorenz

Le comportement dynamique des équations différentielles ordinaires de Lorenz (1963), est-il celui de l'attracteur géométrique de Lorenz décrit par Williams, Guckenheimer et Yorke ?

Les équations de Lorenz sont :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -10x + 10y \\ \dot{y} &= 28x - y - xz \\ \dot{z} &= -\tfrac{8}{3}z + xy \end{aligned}$$

Lorenz (1963) a analysé ces équations par ordinateur pour montrer que la plupart des solutions tendent vers un certain ensemble attractif et, ce faisant, il a produit un des premiers exemples importants de « chaos ». Cependant, il n'y avait pas de preuves mathématiques. Ce travail numérique a inspiré la construction mathématiquement rigoureuse d'une équation différentielle ordinaire définie géométriquement et qui semble avoir le même comportement (Yorke, [Williams, 1979], [Guckenheimer-Williams, 1979]). Cet attracteur géométrique a été étudié en détail et l'on peut honnêtement dire qu'il est maintenant bien compris.

La question que pose le problème 14 est de savoir si le comportement dynamique des équations originales est le même que celui du modèle géométrique. Pour y répondre positivement de façon aussi complète que possible, il faudrait construire un homéomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui envoie les solutions des équations de Lorenz sur les solutions de l'attracteur géométrique – ou plutôt d'un des attracteurs de la famille à deux paramètres des attracteurs géométriques.

Une réponse à ce problème serait un pas en avant pour fonder la théorie des systèmes dynamiques appliqués. Jusqu'à présent, pour les équations de l'ingéniérie et de la physique, le chaos a été démontré seulement en un sens plus faible, en prouvant l'existence de fers à cheval (e.g. Melnikov, Marsden et Holmes ; voir [Guckenheimer-Holmes, 1990]).

On peut trouver dans mon article [Smale, 1967], des exemples de systèmes dynamiques, présentant des attracteurs chaotiques géométriques et structurellement stables. Mais ils ne proviennent d'aucun système physique.

Rychlik et Robinson (voir [Robinson 1989]) ont obtenus des résultats partiels sur le problème 14.

Problème 15 : Les équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes sur un domaine Ω à 3 dimensions de $\mathbb{R}^3$ ont-elles une unique solution régulière pour tout temps ?

C'est peut-être le problème le plus célèbre des équations aux dérivées partielles. Soyons un peu plus précis. Les équations de Navier-Stokes peuvent s'écrire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \mathrm{grad}\ p = 0, \qquad \mathrm{div}\ u = 0$$

et l'on doit trouver une application de classe C^∞, $u : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^3$ et une autre application $p : \Omega \to \mathbb{R}$ qui satisfont ces équations, u ayant une valeur donnée en $t = 0$ et sur la frontière $\partial\Omega$. On note $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $u \cdot \nabla$ est l'opérateur $\sum_1^3 u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, et ν est une constante positive. Voir e.g. [Chorin-Marsden, 1993] pour d'autres informations.

De nombreux mathématiciens ont contribué à la compréhension de ce problème. Une réponse affirmative a été donnée en dimension 2 et en dimension 3 pour t dans un petit intervalle $[0, T]$. Voir [Temam, 1979) pour plus de détails.

La solution de ce problème pourrait bien être une avancée fondamentale en direction du très vaste problème qui est de comprendre la turbulence. Par exemple, cela pourrait aider à réaliser les idées de Ruelle-Takens (1971) qui introduisent la notion d'attracteur chaotique dans un modèle de turbulence. Voir aussi [Chorin-Marsden-Smale, 1977]

Dans [Smale, 1991] j'ai demandé si les solutions de l'équation de Navier-Stokes à 2 dimensions avec un terme de forçage sur un tore doivent converger vers un équilibre lorsque le temps tend vers l'infini. Babik-Vishik (1983) ont donné des indices contredisant cela. Ensuite, Liu (1992) a fourni des exemples qui montrent la convergence vers un attracteur plus compliqué.

Problème 16 : La conjecture du Jacobien

On suppose que $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ est une application polynomiale dont la différentielle en chaque point est non singulière. Peut-on en déduire que f est bijective ?

Dans cette définition, $\mathbb{C}^n$ est un espace vectoriel complexe de dimension n, $f(z) = (f_1(z), \ldots, f_n(z))$ et chaque f_i est un polynôme en n variables. La différentielle de f en z, $Df(z) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ peut être vue comme la matrice des dérivées partielles et la condition de non singularité s'écrit Det $Df(z) \neq 0$.

Si f est injective, alors elle est aussi surjective et a un inverse qui est une application polynomiale.

Le problème remonte aux années 1930 et l'on peut consulter les excellents exposés de synthèse [Bass-Connell-Wright, 1982] et [van den Essen, 1997] pour s'enquérir de l'importance du sujet, de ses bases, et des résultats en rapport.

Problème 17 : Résolution des équations polynomiales

Peut-on trouver une valeur approchée d'un zéro d'un système de n équations polynomiales complexes à n inconnues, avec un algorithme uniforme fonctionnant, en moyenne, en temps polynomial ?

Le théorème final dans la série de cinq articles écrits en commun avec Mike Shub (voir [Shub-Smale, 1994]) est exactement ce résultat sans le mot « uniforme ».

Reprenons les définitions.

On considère $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $f(z) = (f_1(z), \ldots, f_n(z))$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ où chaque f_i est un polynôme en n variables de degré d_i. Il est raisonnable de rendre les f_i homogènes en rajoutant une nouvelle variable z_0, de travailler dans l'espace projectif correspondant, puis de traduire l'algorithme et les résultats pour revenir au problème affine initial.

On peut définir « approchée » de façon intrinsèque en utilisant la méthode de Newton et cette restriction est nécessaire à cause d'Abel, Galois et al. Le temps est mesuré par le nombre d'opérations arithmétiques et de comparaisons, $\leqslant$, en utilisant des machines réelles (comme dans le Problème 3) si l'on veut être formel.

On doit mettre une mesure de probabilité sur l'espace des f, pour chaque $d = (d_1, \ldots, d_n)$ et l'on calcule le temps moyen d'exécution d'un algorithme sur l'espace des f. Existe-t-il un tel algorithme dont le temps moyen est borné polynomialement par rapport au nombre des coefficients de f (la taille des données) ?

Dans [Shub and Smale, 1994] il est prouvé que ceci peut être fait, mais l'algorithme est différent pour chaque d et même pour chaque probabilité de succès envisagée. Un algorithme uniforme doit être indépendant de d (d fait partie des données).

La détermination des zéros des polynômes et des systèmes polynomiaux est assurément un des plus vieux et des plus importants problèmes des mathématiques. On pose ici la question de savoir si, sous certaines conditions, spécifiées dans l'énoncé, il peut être résolu systématiquement sur ordinateur. S'il n'y a pas de méthode en temps polynomial pour le résoudre, alors aucun ordinateur n'y arrivera.

Enfin, il y a eu un développement récent donnant au problème des zéros des polynômes un rôle universel. Le Nullstellensatz de Hilbert (en tant que problème de décision) est NP-complet sur tout corps. (Voir Problème 3).

Un problème similaire, mais plus difficile, peut être posé pour les nombres réels.

Problème 18 : Les limites de l'intelligence

Quelles sont les limites de l'intelligence, à la fois artificielle et humaine ?

Penrose (1991) a essayé de montrer que l'intelligence artificielle a des limites. Son argumentation inclut l'intéressante question de savoir si l'ensemble de Mandelbrot est décidable (utilisé dans [Blum-Smale, 1993]) et des implications du théorème d'incomplétude de Gödel.

Cependant, il serait souhaitable d'effectuer une étude plus large, qui impliquerait des modèles plus détaillés du cerveau et de l'ordinateur, et de chercher ce que les intelligences artificielle et humaine ont en commun, et en quoi elles diffèrent.

Je voudrais m'impliquer davantage dans une recherche où l'apprentissage, la résolution de problèmes, et la théorie des jeux jouent un rôle important au même titre que les mathématiques des nombres réels, les approximations, les probabilités et la géométrie.

J'espère développer ces idées à une autre occasion.

Références

Abraham, R. and Marsden, J., (1978). *Foundations of Mechanics.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.

Babin, A.V. and Vishik, M.I., (1983). Attractors of partial differential evolution equations and their dimension. *Russian Math. Survey* **38**, 151–213.

Barvinok, A. and Vershik, A., (1993). Polynomial-time, computable approximation of families of semi-algebraic sets and combinatorial complexity. *Amer. Math. Soc. Trans.* **155**, 1–17.

Bass, H., Connell, E., and Wright, D., (1982). The Jacobian conjecture : reduction on degree and formal expansion of the inverse. *Bull. Amer. Math. Soc.* **7**, 287–330.

bcss Blum, L., Cucker, F., Shub, M., and Smale, S., (1997). *Complexity and Real Computation*, Springer-Verlag, to appear.

Blum, L., Shub, M. and Smale, S., (1989). On a theory of computation and complexity over the real numbers : NP-completness, recursive functions and universal machines. *Bulletin of the Amer. Math. Soc.* **21**, 1–46.

Blum, L. and Smale, S., (1993). The Gödel incompleteness theorem and decidability over a ring. Pages 321–339 in M. Hirsch, J. Marsden and M. Shub (editors), *From Topology to Computation : Proceedings of the Smalefest*, Springer-Verlag.

Browder, F. ed., (1976). *Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems*, American Math Society, Providence, RI.

Brownawell, W., (1987). Bounds for the degrees in the Nullstellensatz. *Annals of Math.* **126**, 577–591.

Chern, S. and Smale, S., eds., (1970). *Proceedings of the Symposium on Pure Mathematics*, vol. **XIV**, American Math Society, Providence, RI.

Chorin, A., Marsden, J., (1993). *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, 3rd edition, Springer-Verlag, New York.

Chorin, A., Marsden, J. and Smale, S., (1977). Turbulence Seminar, Berkeley 1976–77, *Lecture Notes in Math.* **615**, Springer-Verlag, New York.

Cucker, F., Koiran, P., and Smale, S., (1999). A polynomial time algorithm for Diophantine equations in one variable. *J. Symbolic Computation*, **27**, 21–29.

Debreu, G., (1959). *Theory of Value*, Wiley, New York.

Dulac, H., (1923). Sur les cycles limites. *Bull. Soc. Math. France* **51**, 45–188.

Écalle, J., (1992). *Introduction aux Fonctions Analysables and Preuve Constructive de la Conjecture de Dulac.* Hermann, Paris.

van den Essen, A., Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture. *Proceedings of Septiemes Rencontres du contact Franco-Belge en Algebre*, Reims, France, May 1995. To appear.

Freedman, M., (1982). The topology of 4-manifolds. *J. Diff. Geom.* **17**, 357–454.

Garey, M. and Johnson, D., (1979). *Computers and Intractability.* Freeman, San Francisco.

Grötschel, M., Lovász, L., and Schrijver, A., (1993). *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer-Verlag, New York.

Guckenheimer, J. and Holmes, P., (1990). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, third printing, Springer-Verlag, New York.

Guckenheimer, J. and Williams, R.F., (1979). Structual stability of Lorenz attractors. *Publ. Math. IHES* **50**, 59–72.

Hayashi, S., (1997). Connecting invariant manifolds and the solution of the C^1 stability conjecture and Ω-stability conjecture for flows. *Annals of Math.* **145**, 81–137.

Hirsch, M. and Smale, S., (1974). *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, New York.

Ilyashenko, J., (1985). Dulac's memoir « On limit cycles » and related problems of the local theory of differential equations. *Russian Math. Surveys* VHO, 1–49.

Ilyashenko, Yu., (1991). *Finiteness Theorems for Limit Cycles*, American Math Society, Providence, RI.

Ilyashenko, Yu. and Yakovenko, S., (1995). Concerning the Hilbert 16th problem. *AMS Translations*, series 2, vol. **165**, AMS, Providence, RI.

Jakobson, M., (1971). On smooth mappings of the circle onto itself. *Math. USSR Sb.* **14**, 161–185.

Kuijlaars, A.B.J. and Saff, E.B., (1977). Asymptotics for minimal discrete energy on the sphere. *Trans. Amer. Math. Soc.*, to appear.

Kuz'mina, R., (1977). An upper bound for the number of central configurations in the plane n-body problem. *Sov. Math. Dokl.* **18**, 818–821.

Lang, S., (1991). *Number Theory III*, vol. **60** of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, New York.

Lins, A., de Melo, W., and Pugh, C., (1977), in Geometry and Topology, *Lecture Notes in Math.* **597**, Springer-Verlag, New York.

Liu, V., (1992). An example of instability for the Navier-Stokes equations on the 2-dimensional torus. *Commun. PDE* **17**, 1995–2012.

Lloyd, N.G. and Lynch, S., (1988). Small amplitude limit cycles of certain Lienard systems. *Proceedings Roy. Soc. London* **418**, 199–208.

Lorenz, E., (1963). Deterministic non-periodic flow. *J. Atmosph. Sci.* **20**, 130–141.

Manders, K.L. and Adleman, L., (1978). NP-complete decision problems for binary quadratics. *J. Cmoput. System Sci.* **16**, 168–184.

de Melo, W. and van Strien, S., (1993). *One-Dimensional Dynamics*. Springer-Verlag, New York.

Palis, J. and Yoccoz, J.C., (1989). (1) Rigidity of centralizers of diffeomorphisms. *Ann. Scient. Ecole Normale Sup.* **22**, 81–98 ; (2) Centralizer of Anosov diffeomorphisms. *Ann. Scient. Ecole Normale Sup.* **22**, 99–108.

Palmore, J., (1976). Measure of degenerate relative equilibria, I. *Annals of Math.* **104**, 421–429.

Petrovskii, I.G. and Landis, E.M., (1957). On the number of limit cycles of the equation $dy/dx = P(x,y)/Q(x,y)$, where P and Q are polynomials. *Mat. Sb. N.S.* **43** (85), 149–168 (in Russian), and (1960) *Amer. Math. Soc. Transl.* (2) **14**, 181–200.

Petrovskii, I.G. and Landis, E.M., (1959). Corrections to the articles « On the number of limit cycles of the equation $dy/dx = P(x,y)/Q(x,y)$, where P and Q are polynomials ». *Mat. Sb. N.S.* **48** (90), 255–263 (in Russian)

Penrose, R., (1991). *The Emporer's New Mind*. Penguin Books.

Poincaré, H., (1953). *Oeuvres*, VI. Gauthier-Villars, Paris. Deuxième Complément à L'Analysis Situs.

Peixoto, M., (1962). Structural stability on two-dimensional manifolds. *Topology* **1**, 101–120.

Pugh, C., (1967). An improved closing lemma and a general density theorem. *Amer. J. Math.* **89**, 1010–1022.

Pugh, C. and Robinson, C., (1983). The C^1 closing lemma including Hamiltonians. *Ergod. Theory Dynam. Systems* **3**, 261–313.

Rakhmanov, E.A., Saff, E.B. and Zhou, Y.M., (1994). Minimal discrete energy on the sphere. *Math. Res. Lett.* **1**, 647–662.

Ruelle, D. and Takens, F., (1971). On the nature of turbulence. *Commun. Math. Phys.* **20**, 167–192.

Samuelson, P., (1971). *Foundations of Economic Analysis*, Atheneum, New York.

Saff, E. and Kuijlaars, A., (1997). Distributing many points on a sphere. *Math Intelligencer* **10**, 5–11.

Schrijver, A., (1986). *Theory of Linear and Integer Programming*. John Wiley & Sons.

Shi, S., (1982). On limit cycles of plane quadratic systems. *Sci. Sin.* **25**, 41–50.

Shub, M., (1970). Appendix to Smale's paper : Diagrams and relative equilibria in manifolds, Amsterdam, 1970. *Lecture Notes in Math.* **197**, Springer-Verlag, New York.

Shub, M. and Smale, S., (1995). On the intractibility of Hilbert's Nullstellensatz and an algebraic version of « P=NP », *Duke Math. J.* **81**, 47–54.

Shub, M. and Smale, S., (1993). Complexity of Bezout's theorem, III : condition number and packing. *J. of Complexity* **9**, 4–14.

Shub, M. and Smale, S., (1994). Complexity of Bezout's theorem, V : polynomial time. *Theoret. Comp. Sci.* **133**, 141–164.

Smale, S., (1963). Dynamical systems and the topological conjugacy problem for diffeomorphisms, pages 490–496 in : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Inst. Mittag-Leffler, Sweden, 1962. (V.Stenström, ed.)

Smale, S., (1963). A survey of some recent developments in differential topology. *Bull. Amer. Math. Soc.* **69**, 131–146.

Smale, S., (1967). Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.* **73**, 747–817.

Smale, S., (1970). Topology and mechanics, I and II. *Invent. Math.* **10**, 305–331 and *Invent. Math.* **11**, 45–64.

Smale, S., (1976). Dynamics in general equilibrium theory. *Amer. Economic Review* **66**, 288–294.

Smale, S., (1980). *Mathematics of Time*, Springer-Verlag, New York.

Smale, S., (1981). Global analysis and economics, pages 331–370 in *Handbook of Mathematical Economics* **1**, editors K.J.Arrow and M.D.Intrilligator. North-Holland, Amsterdam.
Smale, S., (1990). The story of the higher dimensional Poincaré conjecture. *Mathematical Intelligencer* **12**, no. 2, 40–51. Also in M.Hirsch, J.Marsden and M.Shub, editors, *From Topology to Computation : Proceedings of the Smalefest*, 281–301 (1992).
Smale, S., (1991). Dynamics retrospective : great problems, attempts that failed. *Physica D* **51**, 267–273.
Taubes, G., (July 1987). What happens when Hubris meets Nemesis ? *Discover*.
Temam, R., (1979). *Navier-Stokes Equations*, revised edition. North-Holland, Amsterdam.
Traub, J. and Woźniakowski, H., (1982). Complexity of linear programming. *Oper. Res. Letts.* **1**, 59–62.
Tsuji, M., (1959). *Potential Theory in Modern Function Theory*. Maruzen Co., Ltd., Tokyo.
Wen, L. and Xia, Z., (1997). A simpler proof of the C^1 connecting lemma. To appear.
Williams, R., (1979). The structure of Lorenz attractors. *Publ. IHES* **50**, 101–152.
Wintner, A., (1941). *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*. Princeton University Press, Princeton, NJ.

Traduit par J.-L. Nicolas, avec l'aide de M.-C. Arnaud, P. Arnoux, J.-C. Augros, C. Charretton, F. Clarke, E. Ghys, A. Hayli, Y. Kerbrat, P. Koiran, C. Mauduit, B. Poizat, B. Rey, C. Roger et M. Schatzman.