

Les nombres colossalement abondants
et le théorème de Lang

Jean-Louis NICOLAS
(Orsay 27 mars 1973)

Désignons par $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ la somme des diviseurs de n . On sait que σ est une fonction multiplicative et que $\sigma(p^\alpha) = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$ (cf, Hardy and Wright [2], chapitre XVI). Erdős et Alaoglu ont donné dans [1] la définition suivante

Définition : On dit que n est superabondant si :

$$(1) \quad m < n \implies \frac{\sigma(m)}{m} < \frac{\sigma(n)}{n} .$$

On trouvera dans [1] et dans [5] quelques propriétés des nombres superabondants, en particulier :

Proposition 1 : Si la décomposition en facteurs premiers d'un nombre superabondant n est $n = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, on a : $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k$ et $\alpha_k = 1$ sauf si $n = 4$ ou $n = 36$, en désignant par p_k le $k^{\text{ième}}$ nombre premier.

Proposition 2 : On a : $\overline{\lim} \frac{\sigma(n)}{n \log \log n} = e^\gamma$, où γ est la constante d'Euler.

Cette proposition se trouve dans Hardy and Wright [2], chapitre XVIII.

Soit $\varepsilon > 0$; il découle de la proposition 2 que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(n)}{n^{1+\varepsilon}} = 0$. La fonction

$\frac{\sigma(n)}{n^{1+\varepsilon}}$ a donc un maximum absolu qu'elle atteint en un ou plusieurs points N_ε . On est

ainsi conduit à la définition suivante :

Définition : On dit que N est colossalement abondant, s'il existe $\varepsilon > 0$, tel que la fonction $\frac{\sigma(n)}{n^{1+\varepsilon}}$ atteigne son maximum en N .

ε étant fixé, on a vu qu'il existe toujours au moins un nombre colossalement abondant N associé à ε et l'on a pour tout $n \geq 1$:

$$(2) \quad \frac{\sigma(n)}{n^{1+\varepsilon}} \ll \frac{\sigma(N)}{N^{1+\varepsilon}}$$

d'autre part, tout nombre colossalement abondant est superabondant :

$$n < N \implies \frac{\sigma(n)}{n} \ll \frac{\sigma(N)}{N} \left(\frac{n}{N}\right)^\varepsilon < \frac{\sigma(N)}{N}$$

Proposition 3 : Soit N un nombre colossalement abondant associé à ε . On définit, pour p premier et α entier > 1 :

$$F(p, \alpha) = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{p^\alpha + p^{\alpha-1} + \dots + p}\right)}{\log p} = \frac{\log\left(\frac{p^{\alpha+1}-1}{p^{\alpha+1}-p}\right)}{\log p}$$

et pour $\alpha = 0$, $F(p, 0) = +\infty$. Alors si p premier divise N avec l'exposant $\alpha \geq 0$,

on a :

$$(3) \quad F(p, \alpha) \geq \varepsilon \geq F(p, \alpha+1).$$

Démonstration : Si $\alpha \geq 0$, on applique l'inégalité (2) avec $n = Np$. Il vient :

$$(4) \quad \frac{\sigma(Np)}{\sigma(N)} \ll \left(\frac{Np}{N}\right)^{1+\varepsilon} = p^{1+\varepsilon}$$

et d'autre part :

$$(5) \quad \frac{\sigma(Np)}{\sigma(N)} = \frac{\sigma(p^{\alpha+1})}{\sigma(p^\alpha)} = \frac{p^{\alpha+2}-1}{p^{\alpha+1}-1} = p \left(1 + \frac{1}{p^{\alpha+1} + \dots + p}\right)$$

En comparant (4) et (5), on obtient $\varepsilon \geq F(p, \alpha+1)$. L'inégalité $F(p, \alpha) \geq \varepsilon$ est évidente si $\alpha = 0$. Si $\alpha \geq 1$, on la démontre en appliquant (2) avec $n = \frac{N}{p}$.

Définition : On pose

$$E_p = \{F(p, \alpha), \alpha \geq 1\}$$

$$E = \bigcup_{p \text{ premier}} E_p = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i, \dots\}.$$

Pour tout $\eta > 0$, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de E supérieurs à η et l'on peut ranger les éléments de E en une suite décroissante : $\varepsilon_1 > \varepsilon_2, \dots > \varepsilon_i$.

On pose $\varepsilon_0 = +\infty$.

Théorème : a) Si $\varepsilon \notin E$, la fonction $\frac{\sigma(n)}{n^{1+\varepsilon}}$ atteint son maximum en un seul point N_ε

dont la décomposition en facteurs premiers est :

$$(6) \quad N_\varepsilon = \prod_p p^{\alpha_p(\varepsilon)} \quad \text{avec} \quad \alpha_p(\varepsilon) = \left[\frac{\log\left(\frac{p^{1+\varepsilon}-1}{p^\varepsilon-1}\right)}{\log p} \right] - 1.$$

Soit $i \geq 1$; pour tout $\varepsilon \in]\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i[$, N_ε est constant et égal (par définition) à N_i . Les nombres N_i sont tous distincts.

b) Si les ensembles E_p sont tous disjoints, il n'y a pas d'autres nombres colossalement abondants que les N_i , et la fonction $\frac{\sigma(n)}{n^{1+\varepsilon_i}}$ atteint son maximum aux deux points N_i et N_{i+1} .

c) Si les ensembles E_p ne sont pas tous disjoints, pour chaque $\varepsilon_i \in E_q \cap E_r$, la fonction $\frac{\sigma(n)}{n^{1+\varepsilon_i}}$ atteint son maximum en 4 points : N_i , qN_i , rN_i et $N_{i+1} = qrN_i$. Les nombres qN_i et rN_i sont colossalement abondants.

Démonstration : a) Soit p un nombre premier fixé. Comme $\varepsilon \notin E$, alors $\varepsilon \notin E_p$, et comme la suite $F(p, \alpha)$ est strictement décroissante en α , il existe α tel que :

$$(7) \quad \frac{\log \frac{p^{\alpha+1}-1}{p^\alpha-1}}{\log p} = F(p, \alpha) > \varepsilon > F(p, \alpha+1).$$

En résolvant en α , les inégalités (7) on trouve, en désignant par $[x]$ la partie entière de x

$$(8) \quad \alpha = \left[\frac{\log \frac{p^{1+\varepsilon}-1}{p^\varepsilon-1}}{\log p} \right] - 1$$

et la proposition 3 dit que l'exposant de p dans N_ε est α .

b) Choisissons $\varepsilon = \varepsilon_i = F(q, \beta)$. Pour $p \neq q$, $\varepsilon \notin E_p$ et l'exposant de p dans N_ε est déterminé par (7) ou (8). L'exposant de q peut être choisi égal à β ou $\beta-1$ d'après la proposition 3. Dans le premier cas on trouve N_{i+1} , dans le second N_i et la fonction $\frac{\sigma(n)}{1+\varepsilon_i}$ atteint son maximum en ces deux points.

c) Soit $\varepsilon = F(p, \alpha) \in E$. Alors ε est irrationnel. Si l'on avait $\varepsilon = \frac{a}{b}$, a et b entiers, on aurait $p^a = \left(1 + \frac{1}{p^\alpha + \dots + p}\right)^b$ avec p^a entier et $\left(1 + \frac{1}{p^\alpha + \dots + p}\right)^b$ non entier. D'après le théorème de Gelfond-Schneider ([3], chap. 3), ε est même transcendant.

Du théorème 1 de Lang ([3] chap. 2, et [4]), on déduit que si, p, q, r sont des nombres premiers distincts et si $p^\varepsilon, q^\varepsilon, r^\varepsilon$ sont algébriques, alors ε doit être rationnel. Mais si $\varepsilon \in E_p$, p^ε est rationnel et on conclut que $E_p \cap E_q \cap E_r = \emptyset$.

S'il existe deux ensembles E_q et E_r non disjoints, et si l'on choisit $\varepsilon_i = F(q, \beta) = F(r, \gamma) \in E_q \cap E_r$, pour $p \neq q, r$ l'exposant de p est déterminé par (7) et (8), l'exposant de q peut être β ou $\beta-1$, et celui de r, γ ou $\gamma-1$ ce qui donne les 4 possibilités annoncées. Remarquons que le quotient des deux nombres colossalement abondants consécutifs qN_i et rN_i n'est pas un nombre premier.

Tables numériques. La table 1 donne les valeurs de $10^5 F(p, \alpha)$. Les valeurs non indiquées sont inférieures à 1. Les colonnes "exposant = i" indiquent l'exposant de p dans N_ϵ . Ainsi pour $\epsilon = 500 \cdot 10^{-5}$, pour $p = 7$, on a $129 < 500 < 910$ et l'exposant de 7 dans N_ϵ est 2.

La table 2 donne les valeurs de $v^{-1}(F(p, \alpha))$ avec $v(x) = \frac{\log(1+\frac{1}{x})}{\log x}$. Comme v est une fonction décroissante de x, l'ordre des termes est inversé par rapport à la table 1. Elle permet de trouver les nombres colossalement abondants de plus grand facteur premier p donné. Pour avoir $p = 97$, on doit choisir $97 \leq x \leq 101 =$ nombre premier suivant 97, et l'on trouve :

$$2^8 4^5 5^3 7^2 11^2 13 17 \dots\dots 97 \text{ pour } x < 100,9$$

et $2^8 3^5 5^3 7^2 11^2 13^2 17 \dots\dots 97 \text{ pour } x > 100,9$.

La table 3 donne la suite des nombres colossalement abondants.

Table 1

$p \setminus \alpha$		$\alpha = 1$		$\alpha = 2$		$\alpha = 3$		$\alpha = 4$		$\alpha = 5$
2	exposant = 0	58 496	exposant = 1	22 239	exposant = 2	9 954	exposant = 3	4 731	exposant = 4	2 308
3		26 286		7 286		2 305		755		250
5		11 328		2 037		400		79		16
7		6 862		910		129		18		3
11		3 629		315		29		3		
13		2 889		214		16		1		
17		2 017		115		7				

Table 2

	$\alpha=1$		$\alpha=2$		$\alpha=3$		$\alpha=4$		$\alpha=5$
	2	exposant = 1	3,29	exposant = 2	5,44	exposant = 3	9,08	exposant = 4	15,36
	3		6,72		15,38		36,3		88,57
	5		16,8		60,50		230,4		920,5
	7		31,4		153,9		812,8		4 531,5
	11		73,4		554,9		4 580,6		40 080,3
	13		100,9		897,2		8 743,5		90 404,7
	17		168,8		1 951,4		24 842,7		335 898,5
	$\alpha=6$	exposant = 6	$\alpha=7$	exposant = 7	$\alpha=8$	exposant = 8	$\alpha=9$	exposant = 9	$\alpha=10$
p=2	26,3		45,7		80,2		142,4		255,4
p=3	221,7		567,6		1 480,4		3 919,7		10 507,9

Table 3

	n	$\sigma(n)$	$\sigma(n)/n$
$\epsilon_1 =$	58 496	1	1
$\epsilon_2 =$	26 286	2	1,5
$\epsilon_3 =$	22 239	2 3	2
$\epsilon_4 =$	11 328	4 3	2,333
$\epsilon_5 =$	9 954	4 3 5	2,8
$\epsilon_6 =$	7 286	8 3 5	3
$\epsilon_7 =$	6 862	8 9 5	3,25
$\epsilon_8 =$	4 731	8 9 5 7	3,7143
$\epsilon_9 =$	3 629	16 9 5 7	3,8381
$\epsilon_{10} =$	2 889	16 9 5 7 11	4,1870
$\epsilon_{11} =$	2 308	16 9 5 7 11 13	4,5091
$\epsilon_{12} =$	2 305	32 9 5 7 11 13	4,5818
$\epsilon_{13} =$	2 037	32 27 5 7 11 13	4,6993
$\epsilon_{14} =$	2 017	32 27 25 7 11 13	4,8559
		32 27 25 7 11 13 17	5,1416

Références

- [1] Erdős (P) and Alaoglu (L).- On highly composite and similar numbers, Trans. Amer. math. Soc. t. 56, 1944, p. 448-469.
- [2] Hardy (G.H.) and Wright (E.M.).- An introduction to the theory of numbers, 4th edition, Oxford at the Clarendon Press.
- [3] Lang (S).- Introduction to transcendental numbers, Addison Wesley 1966.
- [4] Lang (S).- Nombres transcendants, Séminaire Bourbaki 18e année, 1965-66, n° 305.
- [5] Nicolas (J.L.).- Ordre maximal d'un élément du groupe S_n des permutations et "highly composite numbers", Bull. Soc. Math. France, 97, 1969, p. 129-191.