Parité des valeurs de la fonction de partition $p(n)$ et anatomie des entiers

Jean-Louis NICOLAS *

16 février 2008

Abstract. Let $p(n)$ denote the number of partitions of n, and for $i = 0$ (resp. 1), $A_i(x)$ denote the number of $n \le x$ such that $p(n)$ is even (resp. odd). In this paper, it is proved that for every $K > 0$, $A_1(x) \gg_K \frac{\sqrt{x}(\log\log x)^K}{\log x}$ holds for x large enough. This estimation slightly improves a preceding result of the author who got the above lower bound for some large constant K. For even values, it is proved that $A_0(x) \ge 0.28\sqrt{x \log\log x}$ holds for $x > e$.

Let $\Delta^k(q) = q^k \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24k} = \sum_{n=k}^{\infty} \tau_k(n) q^n$ and $B_k(x) = \operatorname{Card}\{n \le x, \tau_k(n) \text{ is odd}\}$. There is a simple way to get a lower bound for $A_0(x)$ (resp. $A_1(x)$) if we know an upper (resp. lower) bound of $B_k(x)$. Further, it has been proved that if $\tau_k(n)$ is odd, the number of primes occurring with exponent 1 in the factorization of n into primes is bounded. A classical argument of Hardy and Ramanujan allows to show that there are not too many such n's, yielding an upper bound for $B_k(x)$.

Keywords : partition function, parity problems, modular forms modulo 2.

Mathematics Subject Classification 2000 : 11P83, 11F33.

1 Introduction

Soit $p(n)$ le nombre de partitions de n, c'est-à-dire le nombre de façons d'écrire $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$ avec $n_1 \ge n_2 \ge \ldots \ge n_r$ (cf. [2], chap. 19). On pose $p(0) = 1$, et on définit

$$A_i(x) = \sum_{\substack{0 \le n \le x \\ p(n) \equiv i \pmod 2}} 1, \qquad i \in \{0, 1\}. \tag{1.1}$$

*Recherche partiellement financée par le CNRS, Institut Camille Jordan, UMR 5028

Dans l'article [8] où l'on trouvera un historique des travaux concernant la parité de $p(n)$, il est démontré qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$A_1(x) \gg \frac{\sqrt{x}(\log\log x)^K}{\log x} \tag{1.2}$$

et les minorations effectives suivantes sont données

$$x \geq 7 \qquad \Longrightarrow \qquad A_1(x) \geq 4.57\,\frac{\sqrt{x}}{\log x} \tag{1.3}$$

et

$$x \geq 10 \qquad \Longrightarrow \qquad A_0(x) \geq 1.05\,\sqrt{x}. \tag{1.4}$$

Nous nous proposons de démontrer les théorèmes :

Théorème 1 *Pour tout nombre réel positif K, on a*

$$A_1(x) \gg_K \frac{\sqrt{x}(\log\log x)^K}{\log x}.$$

Théorème 2 *On a pour tout $x \geq e$,*

$$A_0(x) \geq 0.28\,\sqrt{x}\sqrt{\log\log x} \tag{i}$$

et, lorsque $x \to \infty$,

$$A_0(x) \gtrsim \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x}\sqrt{\log\log x}. \tag{ii}$$

Soit

$$\Delta(q) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n \tag{1.5}$$

où τ est la fonction de Ramanujan. Soit k un entier positif. On écrit

$$\Delta^k(q) = \sum_{n=k}^{\infty}\tau_k(n)q^n \tag{1.6}$$

et l'on a

$$n \not\equiv k \pmod 8 \quad \Longrightarrow \quad \tau_k(n) \equiv 0 \pmod 2. \tag{1.7}$$

Définissons pour x réel positif

$$B_k(x) = \text{Card}\,\{n \leq x, \quad \tau_k(n) \equiv 1 \pmod 2\}. \tag{1.8}$$

L'identité d'Euler (cf. [2], Th. 353) s'écrit

$$f(q) \stackrel{def}{=\!=} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(q^{\frac{n(3n-1)}{2}} + q^{\frac{n(3n+1)}{2}}\right). \tag{1.9}$$

La série génératrice de $p(n)$ est, par (1.9), (cf. [2], 19.3)

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^m} = \frac{1}{f(q)}. \tag{1.10}$$

Soit d un entier pair et

$$k = \frac{2^d-1}{3} \in \mathbb{N}; \tag{1.11}$$

par (1.10), il vient

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n\right) f(q)^{2^d} = f(q)^{3k}, \tag{1.12}$$

et le coefficient de q^n dans $f(q)^{3k}$ est congru modulo 2 au coefficient de q^{8n+k} dans $\Delta^k(q)$. En comparant la lacunarité des deux membres de (1.12), par un raisonnement déjà donné par Serre dans [9], on démontre dans [8], (5.6) et (6.1), les formules

$$A_1(x) \geq \frac{B_k(8x+k)}{\sqrt{\frac{8x}{3\cdot 2^d}}\left(1+\sqrt{\frac{3\cdot 2^d}{2x}}\right)} \tag{1.13}$$

et,

$$A_0(x) \geq \frac{\frac{2x}{3}\left(1-\sqrt{\frac{6\cdot 2^d}{x}}\right) - B_k(8x+k)}{\sqrt{\frac{8x}{3\cdot 2^d}}\left(1+\sqrt{\frac{3\cdot 2^d}{2x}}\right)}. \tag{1.14}$$

Les inégalités (1.13) et (1.14) constituent la première étape de la démonstration des théorèmes 1 et 2. La deuxième étape, exposée dans la partie 3, rappelle la théorie des formes modulaires modulo 2 dans le but de majorer et minorer $B_k(x)$; en particulier, on montre que $B_k(x) \leq \Pi'_N(x)$, le nombre d'entiers $n \leq x$ dont le nombre de facteurs premiers p tels que p^2 ne divise pas n n'excède pas $N = \left\lfloor \frac{k+1}{4} \right\rfloor$. L'étude de $\Pi'_N(x)$ est l'objet de la partie 2, et les démonstrations des théorèmes 1 et 2 seront données dans les deux dernières parties.

La constante 0.28 du théorème 2 pourrait être rapprochée de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ par des calculs plus techniques. Nous avons essayé de présenter une minoration effective de $A_0(x)$ de la façon la plus simple possible.

2 Anatomie des entiers

2.1 $\pi_\nu(\mathbf{x})$

On désigne par $\pi_\nu(x)$ le nombre d'entiers $n \leq x$ qui sont produits de ν facteurs premiers distincts. Lorsque $\nu = 1$, $\pi_1(x)$ est égal à $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$, le nombre de nombres premiers au plus égaux à x.

Lemme 1 *Pour $x \geq 2$ et $\nu \geq 1$, on a*

$$\pi_\nu(x) \leq 1.26\, \frac{x}{\log x} \frac{(\log\log x + 1.87)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}. \tag{2.1}$$

Démonstration : Ce lemme est démontré de façon très élégante par Hardy et Ramanujan (cf. [1], Lemma A) sous la forme

$$\pi_\nu(x) \leq K \frac{x}{\log x} \frac{(\log\log x + C)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}, \qquad x \geq 2 \tag{2.2}$$

où K, B, C, H sont des constantes vérifiant

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 \leq K \frac{x}{\log x}, \qquad x \geq 2 \tag{2.3}$$

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} < H \log x, \quad x \geq 2 \tag{2.4}$$

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} < \log\log x + B, \quad x \geq 2 \tag{2.5}$$

$$C > B + H. \tag{2.6}$$

Les inégalités (3.6), (3.24) et (3.20) de Rosser et Schoenfeld [11] donnent

$$\pi(x) = \sum_{p \le x} 1 \le 1.25506 \, \frac{x}{\log x}, \qquad x > 1$$

donc $K = 1.26$ convient dans (2.3) et (2.2),

$$\sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} < \log x, \quad x > 1$$

donc $H = 1$ convient dans (2.4), et

$$\sum_{p \le x} \frac{1}{p} < \log \log x + 0.2615 + \frac{1}{\log^2 5} < 0.65, \quad x \ge 5$$

qui, jointe au calcul de $\sum_{p \le x} \frac{1}{p}$ pour $x = 2$ et $x = 3$, montre que l'on peut prendre dans (2.5)

$$B = 0.867 > -\log \log 2 + \frac{1}{2} > -\log \log 3 + \frac{5}{6}$$

et dans (2.6) et (2.2), $C = 1.87$. $\square$

2.2 Nombres quadratiquement saturés

On dit que n est quadratiquement saturé (en anglais *squarefull*) si $n = 1$ ou si, pour tout p premier, la valuation p-adique $v_p(n)$ satisfait $v_p(n) \ge 2$. Soit $\mathcal{S} = \{1, 4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, \ldots\}$ l'ensemble des nombres quadratiquement saturés. La fonction caractéristique χ de l'ensemble $\mathcal{S}$ est multiplicative et l'on a (cf. [5], 14.4 ou [6], 7.1)

$$\begin{aligned}\sum_{n \in \mathcal{S}} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \ldots\right) \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{2s} - p^s}\right) = \frac{\zeta(2s)\zeta(3s)}{\zeta(6s)}\end{aligned}$$

où ζ désigne la fonction de Riemann. On en déduit avec MAPLE :

$$\sum_{n \in \mathcal{S}} \frac{1}{n} = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} = 1.94359\ldots \tag{2.7}$$

et

$$\sum_{n\in\mathcal{S}} \frac{\log n}{n} = -\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\zeta(2s)\zeta(3s)}{\zeta(6s)}\right)\right]_{s=1} = 3.02927\ldots \tag{2.8}$$

Tout entier n quadratiquement saturé s'écrit de façon unique $n = a^2b^3$ avec b sans facteurs carrés ; pour tout $x \geq 0$, on a donc, en désignant par μ la fonction de Möbius,

$$\begin{aligned} S(x) = \sum_{\substack{n\leq x\\ n\in\mathcal{S}}} 1 &= \sum_{b\leq x^{1/3}} |\mu(b)| \sum_{a\leq\sqrt{\frac{x}{b^3}}} 1 \leq \sum_{b\leq x^{1/3}} |\mu(b)|\sqrt{\frac{x}{b^3}} \\ &\leq \sqrt{x}\sum_{b=1}^{\infty} \frac{|\mu(b)|}{b^{3/2}} = \frac{\zeta(3/2)}{\zeta(3)}\sqrt{x} = 2.17325\ldots\sqrt{x} \leq 2.18\sqrt{x} \qquad (2.9)\end{aligned}$$

et, par l'intégrale de Stieltjes,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n> x\\ n\in\mathcal{S}}} \frac{1}{n} &= \int_{x^-}^{+\infty} \frac{d[S(t)]}{t} = -\frac{S(x)}{x} + \int_{x}^{+\infty} \frac{S(t)}{t^2}\,dt \\ &\leq \int_{x}^{+\infty} \frac{S(t)}{t^2}\,dt \leq \int_{x}^{+\infty} \frac{2.18}{t^{3/2}}\,dt = \frac{4.36}{\sqrt{x}}. \qquad (2.10)\end{aligned}$$

2.3 $\pi'_\nu(\mathbf{x})$

Posons

$$\omega(n) = \sum_{p\,|\,n} 1, \qquad \omega'(n) = \sum_{\substack{p\,|\,n\\ v_p(n)=1}} 1. \tag{2.11}$$

On définit, pour $\nu \geq 0$ et x réel

$$\pi'_\nu(x) = \sum_{\substack{n\leq x\\ \omega'(n)=\nu}} 1. \tag{2.12}$$

Lemme 2 *Pour $x \geq 2$, on a*

$$\pi'_0(x) \leq 2.18\sqrt{x} \tag{2.13}$$

et, pour $\nu \geq 1$,

$$\pi'_\nu(x) \leq \frac{2.46\,x}{\log x}\left(1 + \frac{3.11}{\log x}\right)\frac{(\log\log x + 1.87)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} + 4.36\,x^{3/4}. \tag{2.14}$$

Démonstration : Tout entier positif n s'écrit de façon unique $n = ab$, avec a sans facteurs carrés, b quadratiquement saturé et $(a, b) = 1$; de plus, on a $\nu = \omega'(n) = \omega(a)$.

Lorsque $\nu = 0$, a est égal à 1 et, pour tout $x \geq 0$, on a par (2.9)

$$\pi_0'(x) = \sum_{\substack{b \leq x \\ b \in \mathcal{S}}} 1 = S(x) \leq 2.18\sqrt{x}$$

ce qui démontre (2.13).

Supposons maintenant $\nu \geq 1$. Lorsque $2 \leq x < 4$, la valeur de $\pi_\nu'(x)$ est 1 ou 2 tandis que le membre de droite de (2.14) est au moins égal à $4.36 \cdot 2^{3/4} > 2$; ainsi, (2.14) est démontrée et l'on peut supposer $x \geq 4$. On a, avec les notations des paragraphes 2.1 et 2.2,

$$\begin{aligned} \pi_\nu'(x) &= \sum_{\substack{b \in \mathcal{S} \\ b \leq x}} \sum_{\substack{\mu(a) \neq 0,\ \omega(a) = \nu \\ ab \leq x,\ (a,b) = 1}} 1 \leq \sum_{\substack{b \in \mathcal{S} \\ b \leq x}} \sum_{\substack{\mu(a) \neq 0,\ \omega(a) = \nu \\ a \leq \frac{x}{b}}} 1 \\ &= \sum_{\substack{b \in \mathcal{S} \\ b \leq x}} \pi_\nu\left(\frac{x}{b}\right) = T_1 + T_2 \qquad (2.15) \end{aligned}$$

où

$$T_1 = \sum_{\substack{b \in \mathcal{S} \\ b \leq \sqrt{x}}} \pi_\nu\left(\frac{x}{b}\right) \qquad \text{et} \qquad T_2 = \sum_{\substack{b \in \mathcal{S} \\ \sqrt{x} < b \leq x}} \pi_\nu\left(\frac{x}{b}\right). \qquad (2.16)$$

2.3.1 Majoration de $\mathbf{T_1}$

Pour $x \geq 4$ et $b \leq \sqrt{x}$, on a $\frac{x}{b} \geq \sqrt{x} \geq 2$ et l'on peut appliquer le lemme 1 :

$$\begin{aligned} T_1 &\leq \sum_{\substack{b \in \mathcal{S} \\ b \leq \sqrt{x}}} \frac{1.26\ x}{b \log x/b} \frac{(\log\log x/b + 1.87)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \\ &\leq \frac{1.26\ x}{\log x} \frac{(\log\log x + 1.87)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \sum_{\substack{b \in \mathcal{S} \\ b \leq \sqrt{x}}} \frac{1}{b\left(1 - \frac{\log b}{\log x}\right)}. \end{aligned}$$

Or, pour $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, $\frac{1}{1-t} \leq 1 + 2t$; et (2.7) et (2.8) entraînent

$$\sum_{\substack{b \in \mathcal{S} \\ b \leq \sqrt{x}}} \frac{1}{b\left(1 - \frac{\log b}{\log x}\right)} \leq \sum_{\substack{b \in \mathcal{S} \\ b \leq \sqrt{x}}} \frac{1}{b} + \frac{2 \log b}{b \log x} \leq 1.95 + \frac{6.06}{\log x} \leq 1.95\left(1 + \frac{3.11}{\log x}\right)$$

et ainsi

$$T_1 \leq \frac{2.46\ x}{\log x}\left(1 + \frac{3.11}{\log x}\right) \frac{(\log\log x + 1.87)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}. \qquad (2.17)$$

2.3.2 Majoration de $\mathbf{T_2}$

Pour majorer T_2 on utilise la borne banale $\pi_\nu(x) \leq x$. On a ainsi par (2.10)

$$T_2 \leq \sum_{\substack{b\in\mathcal{S}\\ b>\sqrt{x}}} \frac{x}{b} \leq x\,\frac{4.36}{x^{1/4}} = 4.36\ x^{3/4}$$

ce qui, avec (2.15) et (2.17), complète le preuve du lemme 2. □

2.4 $\mathbf{\Pi'_\nu(x)}$

Pour $\nu \geq 0$, définissons

$$\Pi'_\nu(x) = \pi'_0(x) + \pi'_1(x) + \ldots + \pi'_\nu(x) = \sum_{\substack{n\leq x\\ 0\leq\omega'(n)\leq\nu}} 1. \tag{2.18}$$

Lemme 3 *Soit ν un nombre entier, $\nu \geq 5$, et α un nombre réel, $0 < \alpha < 1$. Posons $Y = Y(x) = \log\log x + 1.87$. On suppose que x est tel que*

$$\frac{\nu-1}{Y} \leq \alpha < 1, \tag{2.19}$$

ce qui implique $x \geq \exp(\exp(2.13)) = 4513.67\ldots$ Alors,

$$\Pi'_\nu(x) \leq \frac{3.19\ x}{(1-\alpha)(\log x)^{Q(\alpha)}}\left(1+\frac{3.11}{\log x}\right)\left(1+0.69\ \frac{(2Y+3)\log x}{x^{1/4}}\right) \tag{2.20}$$

où

$$Q(\alpha) = 1-\alpha+\alpha\log\alpha; \tag{2.21}$$

lorsque α varie de 0 à 1, $Q(\alpha)$ décroit de 1 à 0. De plus, si $x \geq x_0 = e^{100}$,

$$\Pi'_\nu(x) \leq \frac{3.29\ x}{(1-\alpha)(\log x)^{Q(\alpha)}}. \tag{2.22}$$

Démonstration : Le lemme 2 entraîne

$$\Pi'_\nu(x) \leq \frac{2.46\ x}{\log x}\left(1+\frac{3.11}{\log x}\right)\sum_{n=1}^{\nu}\frac{Y^{n-1}}{(n-1)!} + 2.18(2\nu+1)x^{3/4}. \tag{2.23}$$

Maintenant, par la formule de Stirling sous la forme

$$(\nu-1)! \geq \left(\frac{\nu-1}{e}\right)^{\nu-1}\sqrt{2\pi(\nu-1)} \geq \left(\frac{\nu-1}{e}\right)^{\nu-1}\sqrt{8\pi},$$

par la croissance de la fonction $t \mapsto \left(\frac{e}{t}\right)^t$ sur l'intervalle $[0,1]$ et par (2.19), la somme figurant dans le terme principal de (2.23) se majore :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\nu} \frac{Y^{n-1}}{(n-1)!} &\leq \frac{Y^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\left(1+\frac{\nu-1}{Y}+\frac{(\nu-1)^2}{Y^2}+\ldots+\frac{(\nu-1)^{\nu-1}}{Y^{\nu-1}}\right)\\
&\leq \frac{Y^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\frac{1}{1-\frac{\nu-1}{Y}} \leq \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\left(\frac{eY}{\nu-1}\right)^{\nu-1}\frac{1}{1-\frac{\nu-1}{Y}}\\
&\leq \frac{1}{\sqrt{8\pi}(1-\alpha)}\left(\frac{e}{\alpha}\right)^{\alpha Y} = \frac{(\log x)^{\alpha(1-\log\alpha)}}{\sqrt{8\pi}(1-\alpha)}\left(\frac{e}{\alpha}\right)^{1.87\,\alpha}\\
&\leq \frac{e^{1.87}}{\sqrt{8\pi}}\frac{(\log x)^{\alpha(1-\log\alpha)}}{(1-\alpha)} = 1.29422\ldots\frac{(\log x)^{\alpha(1-\log\alpha)}}{(1-\alpha)}. \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

On majore ensuite le terme de reste de (2.23) à l'aide de l'inégalité $\nu \leq Y+1$ déduite de (2.19) ; et (2.20) résulte de (2.23) et de (2.24).

Pour démontrer (2.22), on observe que les fonctions $t \mapsto \frac{\log t}{t^{1/8}}$ et $t \mapsto \frac{\log\log t}{t^{1/8}}$ sont décroissantes pour $t \geq 2981 > e^8$; ainsi, pour $x \geq x_0 = e^{100}$, on a

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{3.11}{\log x}\right)\left(1+0.69\,\frac{(2Y(x)+3)\log x}{x^{1/4}}\right)\\
\leq\ &\left(1+\frac{3.11}{\log x_0}\right)\left(1+0.69\,\frac{(2Y(x_0)+3)\log x_0}{x_0^{1/4}}\right) < 1.0312 < \frac{3.29}{3.19}
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du lemme 3. □

2.5 Minoration de $\pi_\nu(\mathbf{x})$

Soit $\mathcal{P}^{(1)} = \{q_1 < q_2 < \ldots\}$ un ensemble de nombres premiers. On dit que $\mathcal{P}^{(1)}$ a pour densité δ_1 si, en notant p_n le n-ième nombre premier, $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \delta_1$.

Landau a montré que, pour ν fixé, la fonction $\pi_\nu(x)$ définie en 2.1 vérifiait (cf. [7], § 56)

$$\pi_\nu(x) \sim \frac{x}{\log x}\frac{(\log\log x)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}, \qquad x \to \infty; \qquad (2.25)$$

on trouvera une autre démonstrations dans [2], chap. XXII ; la meilleure méthode est sans doute celle de Selberg-Delange (cf. [20], II.6), cependant, elle ne se généralise pas si l'on ne compte dans $\pi_\nu(x)$ que les nombres dont les facteurs premiers appartiennent à un ensemble $\mathcal{P}^{(1)}$ ayant une densité.

La preuve de Landau est basée sur la formule

$$(\nu+1)\pi_{\nu+1}(x) = \sum_{p\le x/2} \pi_\nu\left(\frac{x}{p}\right) - g_{\nu+1}(x), \qquad \nu \ge 1, \tag{2.26}$$

où $g_{\nu+1}(x)$ compte le nombre d'entiers $n \le x$ qui s'écrivent $n = p_1^2 p_2 p_3 \dots p_\nu$ avec $p_1, p_2, p_3, \dots, p_\nu$ distincts (en particulier, $g_2(x) = \pi(\sqrt{x})$).

Ensuite, Landau montre que $g_{\nu+1}(x)$ est négligeable, et que l'on peut estimer par récurrence la somme de (2.26) par un calcul astucieux mais technique :

$$\begin{aligned}\sum_{p\le x/2} \pi_\nu\left(\frac{x}{p}\right) &\sim \int_2^{x/2} \frac{\pi_\nu(x/u)}{\log u}\mathrm{d}u = x\int_2^{x/2} \frac{\pi_\nu(t)}{\log x - \log t}\,\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\\ &\sim \frac{x}{(\nu-1)!}\int_2^{x/2} \frac{(\log\log t)^{\nu-1}\,\mathrm{d}t}{t\log t(\log x - \log t)} \sim \frac{(\nu+1)}{\nu!}\frac{x(\log\log x)^\nu}{\log x}.\end{aligned} \tag{2.27}$$

Soient $\mathcal{P}^{(1)}, \mathcal{P}^{(2)}, \dots, \mathcal{P}^{(\nu)}$ des ensembles de nombres premiers de densités non nulles $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\nu$. On désigne par $\pi_\nu(\mathcal{P}^{(1)}, \mathcal{P}^{(2)}, \dots, \mathcal{P}^{(\nu)}; x)$ le nombre d'entiers $n \le x$ qui s'écrivent sous la forme $n = p^{(1)}p^{(2)}\dots p^{(\nu)}$ avec, pour $1 \le i \le \nu$, $p^{(i)} \in \mathcal{P}^{(i)}$ et $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(\nu)}$ distincts.

La méthode de Landau peut s'étendre pour estimer $\pi_\nu(\mathcal{P}^{(1)}, \dots, \mathcal{P}^{(\nu)}; x)$. Cependant, la forme de la relation (2.26) va dépendre des ensembles $\mathcal{P}^{(i)}$. Par exemple, si les ensembles $\mathcal{P}^{(i)}$ ont deux à deux une intersection vide, cette relation devient

$$\sum_{\substack{p\le x/2\\ p\in\mathcal{P}^{(\nu+1)}}} \pi_\nu\left(\mathcal{P}^{(1)}, \mathcal{P}^{(2)}, \dots, \mathcal{P}^{(\nu)}; \frac{x}{p}\right) = \pi_{\nu+1}\left(\mathcal{P}^{(1)}, \mathcal{P}^{(2)}, \dots, \mathcal{P}^{(\nu+1)}; x\right)$$

et l'on obtient

$$\pi_\nu\left(\mathcal{P}^{(1)}, \mathcal{P}^{(2)}, \dots, \mathcal{P}^{(\nu)}; x\right) \sim \nu\,\delta_1\delta_2\dots\delta_\nu \frac{x}{\log x}(\log\log x)^{\nu-1}.$$

Dans le cas général, la relation (2.26) devient

$$\sum_{\substack{p\le x/2\\ p\in\mathcal{P}^{(\nu+1)}}} \pi_\nu\left(\mathcal{P}^{(1)}, \dots, \mathcal{P}^{(\nu)}; \frac{x}{p}\right) \le (\nu+1)\pi_{\nu+1}\left(\mathcal{P}^{(1)}, \dots, \mathcal{P}^{(\nu+1)}; x\right) + g_{\nu+1}(x)$$

qui, par les calculs (2.27), donnent, pour ν fixé, la minoration

$$\pi_\nu\left(\mathcal{P}^{(1)}, \dots, \mathcal{P}^{(\nu)}; x\right) \gtrsim \frac{\delta_1\delta_2\dots\delta_\nu}{(\nu-1)!}\frac{x}{\log x}(\log\log x)^{\nu-1}, \quad x\to\infty. \tag{2.28}$$

Notons que, lorsque les ensembles $\mathcal{P}^{(1)}, \mathcal{P}^{(2)}, \dots, \mathcal{P}^{(\nu)}$ sont tous égaux, les deux membres de (2.28) sont équivalents.

3 Formes modulaires

3.1 Formes modulaires sur $\mathbb{C}$

Soit $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}; \Im(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré. Une forme modulaire de poids k (où k est un entier positif pair) est une série entière à coefficients dans $\mathbb{C}$

$$F(z) = c_0 + c_1 q + \ldots + c_n q^n + \ldots \tag{3.1}$$

avec

$$q = e^{2i\pi z}, \qquad |q| = e^{-2\pi\Im(z)} \tag{3.2}$$

convergeant pour $|q| < 1$, c'est-à-dire $z \in \mathcal{H}$, et vérifiant pour tout $z \in \mathcal{H}$

$$F\left(-\frac{1}{z}\right) = z^k F(z). \tag{3.3}$$

Les résultats exposés dans cette partie sont démontrés dans [12], chap. VII.

3.2 L'espace vectoriel $\mathcal{M}_\mathbf{k}$

La somme de deux formes modulaires de poids k est une forme modulaire de poids k et le produit par une constante d'une forme modulaire de poids k est une forme modulaire de même poids. Ainsi, l'ensemble des formes modulaires de poids k constitue un espace vectoriel $\mathcal{M}_k$.

Le produit d'une forme de poids k par une forme de poids k' est une forme de poids $k + k'$.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_k$ est de dimension finie

$$\dim \mathcal{M}_k = \begin{cases} 1 + \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor & \text{si } k \equiv 0 \pmod 4 \\ 1 + \left\lfloor \frac{k-3}{12} \right\rfloor & \text{si } k \equiv 2 \pmod 4). \end{cases} \tag{3.4}$$

3.3 Les séries d'Eisenstein

Définissons les nombres de Bernoulli par

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n.$$

On a : $b_0 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_{2j+1} = 0$ pour $j \geq 1$ et

$$b_2 = \frac{1}{6},\ b_4 = -\frac{1}{30},\ b_6 = \frac{1}{42},\ b_8 = -\frac{1}{30},\ b_{10} = \frac{5}{66},\ b_{12} = -\frac{691}{2730},\ b_{14} = \frac{7}{6}, \ldots$$

On pose maintenant $\sigma_j(n) = \sum_{d\,|\,n} d^j$ et, pour k pair, $k \geq 4$, on introduit la série d'Eisenstein d'indice k :

$$E_k = 1 - \frac{2k}{b_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n. \tag{3.5}$$

On a en particulier

$$E_4 = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n \qquad \text{et} \qquad E_6 = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n. \tag{3.6}$$

La série d'Eisenstein d'indice k est une forme modulaire de poids k et pour tout couple de nombres entiers $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ vérifiant $4\alpha + 6\beta = k$, $E_4^{\alpha} E_6^{\beta}$ est une forme modulaire de poids k.

3.4 Formes paraboliques

On dit que la forme modulaire (3.1) est parabolique si le coefficient constant c_0 est nul. La fonction Δ à coefficients entiers définie par (1.5) est modulaire de poids 12, parabolique, et l'on a

$$\Delta = \frac{E_4^3 - E_6^2}{1728} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n = q - 24q^2 + 252q^3 + \dots \tag{3.7}$$

3.5 Une base de $\mathcal{M}_{\mathbf{k}}$ à coefficients entiers

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_k$ des formes modulaires de poids k dont la dimension est donnée par (3.4) a pour base, lorsque $k \equiv 0 \pmod 4$

$$E_4^{\frac{k}{4}-3j} \Delta^j = q^j + (60k - 744j) q^{j+1} + \dots, \qquad 0 \leq j \leq \frac{k}{12}$$

et lorsque $k \equiv 2 \pmod 4$,

$$E_6 E_4^{\frac{k-6}{4}-3j} \Delta^j = q^j + (60k - 744j - 864) q^{j+1} + \dots, \qquad 0 \leq j \leq \frac{k-6}{12}\cdot$$

Suivant que k est congru à 0 ou à 2 modulo 4, toute forme modulaire de poids k s'écrit donc avec des composantes complexes λ_j

$$F = \sum_{0 \leq j \leq \frac{k}{12}} \lambda_j E_4^{\frac{k}{4}-3j} \Delta^j \quad \text{ou} \quad \sum_{0 \leq j \leq \frac{k-6}{12}} \lambda_j E_6 E_4^{\frac{k-6}{4}-3j} \Delta^j. \tag{3.8}$$

3.6 Les opérateurs de Hecke

Soit p un nombre premier. L'opérateur de Hecke T_p transforme la forme modulaire (3.1) de poids k en la forme de même poids

$$T_p|F = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma(n) q^n \tag{3.9}$$

où

$$\gamma(n) = \begin{cases} c(pn) & \text{si } p \text{ ne divise pas } n \\ c(pn) + p^{k-1} c\left(\frac{n}{p}\right) & \text{si } p \text{ divise } n. \end{cases} \tag{3.10}$$

L'opérateur T_p est un endomorphisme de $\mathcal{M}_k$. Enfin, les opérateurs T_p commutent entre eux.

3.7 Formes modulaires modulo 2

Il résulte de la forme de la base décrite au paragraphe 3.5 que, si dans (3.8), les λ_j sont entiers, les coefficients de la forme F sont entiers et réciproquement.

Soit p un nombre premier et $n \mapsto \widetilde{n}$ l'application canonique de $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{F}_p$. À la série $F = \sum_{n \geq 0} c_n q^n \in \mathbb{Z}[[q]]$, associons la série $\widetilde{F} = \sum_{n \geq 0} \widetilde{c_n} q^n \in \mathbb{F}_p[[q]]$. Nous désignerons par $\widetilde{\mathcal{M}_k}$ l'ensemble des $\widetilde{F}$ lorsque F parcourt l'ensemble des formes modulaires de poids k à coefficients entiers.

Lorsque $p = 2$ ou 3, il résulte de (3.6) que $\widetilde{E_4} = \widetilde{E_6} = 1$ et les éléments de $\widetilde{\mathcal{M}_k}$, suivant que k est congru à 0 ou à 2 modulo 4, sont de la forme

$$f = \sum_{0 \leq j \leq \frac{k}{12}} \lambda_j \widetilde{\Delta^j} \quad \text{ou} \quad \sum_{0 \leq j \leq \frac{k-6}{12}} \lambda_j \widetilde{\Delta^j}, \qquad \lambda_j \in \mathbb{F}_p. \tag{3.11}$$

Lorsque $p \geq 5$, l'ensemble $\widetilde{\mathcal{M}_k}$ est décrit dans [17, 18] ou [13]. À partir de maintenant, nous nous restreignons au cas des formes modulaires modulo 2.

Vue la définition (1.6), nous posons

$$f_k = \widetilde{\Delta^k} = \sum_{n=k}^{\infty} c_n^{(k)} q^n \quad \text{avec } c_n^{(k)} \in \{0,1\} \text{ et } c_n^{(k)} \equiv \tau_k(n) \pmod 2. \tag{3.12}$$

Par l'identité de Jacobi (cf. [2], Th. 357), on sait que (cf. [8], prop. 1)

$$f_1 = \sum_{m=1}^{\infty} q^{(2m+1)^2}. \tag{3.13}$$

Il résulte de (3.12) et (3.13) que

$$n \not\equiv k \pmod 8 \quad \Longrightarrow \quad c_n^{(k)} = 0. \tag{3.14}$$

3.8 Les $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_5, \mathcal{F}_7$

Par (3.11) et (3.12), le $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel $\widetilde{\mathcal{M}}$ des formes modulaires modulo 2 est engendré par $f_1, f_2, f_3, \ldots$. Comme $f_{2k} = \sum_{n \geq k} c_n^{(k)} q^{2n}$, les formes f_k d'indice k pair ne sont pas très intéressantes et, plutôt que $\widetilde{\mathcal{M}}$, nous étudierons le sous-espace $\mathcal{F} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ engendré par $f_1, f_3, f_5, \ldots$.

Compte tenu de (3.14), il sera commode d'écrire

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_7 \tag{3.15}$$

où, pour $i \in \{1, 3, 5, 7\}$, $\mathcal{F}_i$ est engendré par $f_i, f_{i+8}, f_{i+16}, \ldots$

3.9 Les opérateurs de Hecke modulo 2

Soit F une forme modulaire de poids j à coefficients entiers et p un nombre premier. Par les formules (3.9) et (3.10), $T_p|F$ est aussi une forme de poids j à coefficients entiers. Il en résulte que l'opérateur T_p agit sur $\widetilde{\mathcal{M}}$ et transforme la forme $f = \widetilde{F} = \sum_{m \geq 0} c_m q^m \in \mathbb{F}_2[[q]]$ en la forme $T_p|f = \sum_{n \geq 0} \widetilde{\gamma}_n q^n \in \mathbb{F}_2[[q]]$.

Le cas $p = 2$ a peu d'intérêt : si k est pair, $T_2|f_k = f_{k/2}$, tandis que, si k est impair, $T_2|f_k = 0$. Nous supposerons donc $p \geq 3$. La formule (3.10) devient

$$\gamma(n) = \begin{cases} c(pn) & \text{si } p \text{ ne divise pas } n \\ c(pn) + c\left(\frac{n}{p}\right) & \text{si } p \text{ divise } n. \end{cases} \tag{3.16}$$

En considérant les formes de poids $12k$ à coefficients entiers, par (3.8), on voit que

$$T_p|f_k = \sum_{j=1}^{k} \mu_j f_j, \qquad \mu_j \in \{0, 1\}. \tag{3.17}$$

Supposons maintenant k impair. Les formules (3.14) et (3.16) entraînent que, dans (3.17),

$$j \not\equiv pk \pmod 8 \quad \Longrightarrow \quad \mu_j = 0. \tag{3.18}$$

En d'autres termes, pour $i \in \{1, 3, 5, 7\}$, l'opérateur de Hecke T_p est une application linéaire de $\mathcal{F}_i$ dans $\mathcal{F}_j$ avec $j \equiv ip \pmod 8$.

3.10 Nilpotence des opérateurs de Hecke modulo 2

Une des propriétés essentielles des opérateurs de Hecke modulo 2 est qu'ils sont nilpotents (cf. [14, 4, 3, 19, 10]). Cela implique que, dans (3.17), le coefficient μ_k est nul. Par (3.17) et (3.18), on a donc pour tout p premier, $p \geq 3$, et tout k impair positif,

$$T_p|f_k = \sum_{\substack{j \equiv pk \pmod 8 \\ 1 \leq j \leq k-2}} \mu_j f_j. \tag{3.19}$$

Soit $\mathcal{F}^{(k)}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ engendré par $f_1, f_3, f_5, \ldots, f_k$. L'opérateur T_p est une application linéaire de $\mathcal{F}^{(k)}$ dans $\mathcal{F}^{(k-2)}$:

$$T_p : \mathcal{F}^{(k)} \longrightarrow \mathcal{F}^{(k-2)}. \tag{3.20}$$

3.11 L'indice de nilpotence $\mathbf{g_k}$

Soit j un nombre entier vérifiant $j \geq \frac{k+1}{2}$ et une suite de nombres premiers impairs pas forcément distincts $p_1, p_2, \ldots, p_j$. Il suit de (3.20) que, pour tout $f \in \mathcal{F}^{(k)}$, $T_{p_1} T_{p_2} \ldots T_{p_j}|f = 0$. Par définition, l'indice de nilpotence d'une forme modulaire modulo 2, $f \in \widetilde{\mathcal{M}}$, est le plus petit nombre $g = g(f)$ tel que, pour toute suite de nombres premiers impairs $p_1, p_2, \ldots, p_g$, on ait $T_{p_1} T_{p_2} \ldots T_{p_g}|f = 0$. Nous désignerons par $g_k = g(f_k)$ l'indice de nilpotence de $f_k = \widetilde{\Delta}^k$. On a donc

$$g_k \leq \frac{k+1}{2}. \tag{3.21}$$

3.12 Calcul de $\mathbf{g_k}$ pour $\mathbf{k \leq 11}$

L'indice de nilpotence g_1 de f_1 est égal à 1, car $T_p|f_1 = 0$ pour tout p ; cela peut se voir par un calcul direct à partir de (3.13) et (3.16), ou bien cela résulte de (3.20). Pour tout $f \in \widetilde{\mathcal{M}}$, $f \notin \{0, f_1\}$, on a

$$g(f) \geq 2. \tag{3.22}$$

En effet, si $f \notin \{0, f_1\}$ on peut écrire $f = \lambda f_1 + f_{k_1} + f_{k_2} + \ldots + f_{k_r}$ avec $\lambda = 0$ ou 1, $r \geq 1$ et $1 < k_1 < k_2 < \ldots < k_r$; lorsque p est un facteur premier de k_1, par (3.16), le coefficient γ_1 de $T_p|(f - \lambda f_1)$ vaut 1 et ainsi, $T_p|f = T_p|(f - \lambda f_1) \neq 0$.

Enfin, pour $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$ (les k_i étant impairs), il est facile de voir que

$$g(f_{k_1} + f_{k_2} + \ldots + f_{k_r}) \leq \max(g_{k_1}, g_{k_2}, \ldots, g_{k_r}). \tag{3.23}$$

Proposition 1 *Pour k impair, $k \leq 11$, on a*

$k =$	1	3	5	7	9	11
$g_k =$	1	2	2	3	3	4

Démonstration : Nous venons de voir que $g_1 = 1$. Lorsque $k = 3$ ou 5, $\tau_k(n)$ est impair si et seulement si n est de la forme

$$n = p^{4m+1}a^2 \tag{3.24}$$

avec p premier, $p \equiv k \pmod 8$, a impair non multiple de p et m entier non nul (cf. [15, 16], § 6.7 ou [8], § 4).

La valeur de g_3 résulte de (3.21) et (3.22).

Soit p un nombre premier impair. Il résulte de (3.20) que $T_p|f_5 = \lambda_1 f_1 + \lambda_3 f_3$ avec $\lambda_1, \lambda_3 \in \{0, 1\}$. Le calcul par (3.16) des coefficients de q et q^3 dans $T_p|f_5$ et (3.24) donnent $\lambda_3 \equiv \tau_5(3p) \pmod 2 = 0$ et $\lambda_1 \equiv \tau_5(p) \pmod 2 = 1$ si et seulement si $p \equiv 5 \pmod 8$. En conséquence,

$$T_p|f_5 = \begin{cases} f_1 & \text{si } p \equiv 5 \pmod 8 \\ 0 & \text{si } p \not\equiv 5 \pmod 8, \end{cases} \tag{3.25}$$

d'où l'on déduit la valeur de g_5.

Soit p un nombre premier impair. Il résulte de (3.20) que $T_p|f_7 = \lambda_1 f_1 + \lambda_3 f_3 + \lambda_5 f_5$ avec $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5 \in \{0, 1\}$ et, par (3.23), $g(T_p|f_7) \leq 2$ et donc $g_7 \leq 3$. Ensuite, par (3.19), $T_3T_5|f_7 = \lambda_1 f_1$; le développement

$$f_7 = q^7 + q^{15} + q^{23} + q^{39} + q^{55} + q^{63} + q^{71} + q^{87} + q^{95} + \dots$$

permet de calculer le coefficient de q dans $T_3T_5|f_7$ et ainsi d'obtenir $\lambda_1 = 1$ et la valeur de g_7.

Par (3.13), il vient

$$f_1^9 = f_1^8 f_1 = \sum_{u=0}^{\infty} q^{8(2u+1)^2} \sum_{v=0}^{\infty} q^{(2v+1)^2} = \sum_{u,v} q^{8(2u+1)^2+(2v+1)^2}.$$

Ainsi, $\tau_9(n)$ est congru modulo 2 au nombre de solutions $s(n)$ de l'équation diophantienne $8x^2 + y^2 = n$ avec x, y impairs. Si $p \equiv 7 \pmod 8$, par (3.19), $T_p|f_9 = \lambda_7 f_7$. Mais comme $\tau_9(7p) \equiv s(7p) \pmod 2 = 0$, $\lambda_7 = 0$ et $T_p|f_9 = 0$. Si $p \equiv 1, 3, 5 \pmod 8$, par (3.19), $T_p|f_9 = \lambda_1 f_1 + \lambda_3 f_3 + \lambda_5 f_5$, et par (3.23), $g(T_p|f_9) \leq 2$. Ainsi $g_9 \leq 3$. Ensuite, on montre que $T_3T_3|f_9 = f_1$, ce qui nous donne la valeur de g_9.

La majoration $g_{11} \leq 4$ se prouve comme celle de g_7 ; et à partir du développement de

$$f_{11} = q^{11} + q^{19} + q^{27} + q^{51} + q^{67} + \dots$$

on calcule $T_3T_3T_3|f_{11} = f_1$, ce qui fournit la valeur de g_{11}. □

3.13 Minoration de $\mathbf{g_k}$

Soit $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$, $\Omega(k) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r$, le nombre de facteurs premiers de k comptés avec multiplicité, $\omega(k)$ et $\omega'(k)$ définis par (2.11), τ_k par (1.6) et $g_k = g(f_k)$ l'indice de nilpotence défini en 3.11.

Proposition 2 *Pour tout k impair, on a*

$$g_k \geq \Omega(k) + 1 \tag{3.26}$$

et

$$\tau_k(n) \;\; \textit{est impair} \quad \Longrightarrow \quad \omega'(n) \leq g_k - 1. \tag{3.27}$$

Démonstration : Par (3.16), la série $T_{p_1}^{\alpha_1} T_{p_2}^{\alpha_2} \dots T_{p_r}^{\alpha_r} | f_k$ a un coefficient constant égal à 1 et n'est donc pas nulle, ce qui prouve (3.26).

Pour démontrer (3.27), supposons $\tau_k(n)$ impair. Si les facteurs premiers de n affectés de l'exposant 1 sont $p_1, p_2, \dots, p_{\omega'(n)}$, le produit $m = p_1 p_2 \dots p_{\omega'(n)}$ est premier avec n/m et la formule (3.16) entraîne que le coefficient de $q^{n/m}$ dans la série $T_m | f_k$ vaut 1, ce qui implique $\omega'(n) < g_k$, par définition de g_k.
□

3.14 Majoration de $\mathbf{g_k}$

La majoration (3.21) peut être améliorée :

Proposition 3 (J.-P. Serre) *Pour tout k impair, on a*

$$g_k \leq \frac{k+5}{4} \cdot \tag{3.28}$$

Démonstration : D'après la proposition 1, (3.28) est vérifié pour $k \leq 11$. Supposons $k \geq 13$ et supposons (3.28) vraie jusqu'à $k-2$. Posons $j = \left\lfloor \frac{k+5}{4} \right\rfloor \geq 4$. Nous devons montrer que pour toute suite de nombres premiers impairs $p_1, p_2, \dots, p_j$, la relation $T_{p_1} T_{p_2} \dots T_{p_j} | f_k = 0$ est satisfaite. Comme $j \geq 4$ ou bien il existe i_1, $1 \leq i_1 \leq j$ tel que $k p_{i_1} \not\equiv k - 2 \pmod 8$ ou bien tous les p_i vérifient la congruence $k p_i \equiv k - 2 \pmod 8$.

Dans le premier cas, quitte à réordonner les nombres premiers, on peut supposer $i_1 = j$. Par (3.19), $T_{p_j} | f_k \in \mathcal{F}^{(k-4)}$ et, par l'hypothèse de récurrence et (3.23), $T_{p_1} T_{p_2} \dots T_{p_{j-1}} | (T_{p_j} | f_k) = 0$.

Dans le deuxième cas, $p_1 p_2 \equiv 1 \pmod 8$ et, par (3.19), $T_{p_1} T_{p_2} | f_k \in \mathcal{F}^{k-8}$ ce qui entraîne comme précédemment que

$$T_{p_1} T_{p_2} \dots T_{p_j} | f_k = T_{p_3} T_{p_4} \dots T_{p_j} | (T_{p_1} T_{p_2} | f_k) = 0.$$

□

3.15 Minoration de $\mathbf{B_k(x)}$

Supposons k impair et $k \geq 3$. Par (3.22), on a $g_k \geq 2$. Par définition de g_k (cf. 3.11), il existe $g_k - 1$ nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_{g_k-1}$ tels que $\varphi = T_{p_1} T_{p_2} \ldots T_{p_{g_k-1}} | f_k \neq 0$ et $T_p | \varphi = 0$ pour tout p premier. On a donc $g(\varphi) = 1$ et, par (3.22), $\varphi = f_1$. En fait, avec les notations de 2.5, il existe (cf. [15, 16], § 6.6) des ensembles de nombres premiers $\mathcal{P}^{(1)}, \mathcal{P}^{(2)}, \ldots, \mathcal{P}^{(g_k-1)}$ ayant des densités positives $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{g_k-1}$ tels que, pour $p_i \in \mathcal{P}^{(i)}$, $1 \leq i \leq g_k - 1$, on ait $T_{p_1} T_{p_2} \ldots T_{p_{g_k-1}} | f_k = f_1$. Cela implique, par (3.16) et (3.13), que pour $n = a^2 p_1 p_2 \ldots p_{g_k-1}$ où a est un nombre impair non multiple de $p_1, p_2, \ldots, p_{g_k-1}$, $\tau_k(n)$ est impair. Ainsi, par (2.28), $B_k(x)$ défini par (1.8) vérifie

$$B_k(x) \gg \frac{x}{\log x} (\log \log x)^{g_k - 2}. \tag{3.29}$$

3.16 Majoration de $\mathbf{B_k(8x + k)}$

Lemme 4 *Soit α et x deux nombres réels vérifiant*

$$0 < \alpha < 1, \quad \log \log(8x) \geq \frac{4}{\alpha} - 1.87 \quad \textit{et} \quad x \geq x_0 = e^{100}. \tag{3.30}$$

On définit d pair par

$$3\alpha(\log \log(8x) + 1.87) + 4 < 2^d \leq 12\alpha(\log \log(8x) + 1.87) + 16. \tag{3.31}$$

Par (3.30)*, 2^d est au moins égal à 64 et $k = k(x, \alpha) = \frac{2^d - 1}{3}$ vérifie*

$$21 \leq k \leq 4\alpha(\log \log(8x) + 1.87) + 5 < 4\alpha(\log \log(8x + k) + 1.87) + 5. \tag{3.32}$$

Alors, avec la définition (1.8)*,*

$$B_k(8x + k) \leq \frac{26.4}{1 - \alpha} \frac{x}{(\log(8x))^{Q(\alpha)}} \tag{3.33}$$

où $Q(\alpha)$ a été défini en (2.21).

Démonstration : La proposition 3, l'implication (3.27) et la définition (2.18) entraînent $B_k(x) \leq \Pi'_N(x)$ avec

$$N = \left\lfloor \frac{k+1}{4} \right\rfloor = \frac{k-1}{4} \tag{3.34}$$

car $k = \frac{2^d-1}{3} \equiv 1 \pmod 4$. Les hypothèses (3.30) et (3.32) montrent que l'on peut appliquer le lemme 3 à $\Pi'_N(8x+k)$

$$B_k(8x+k) \le \Pi'_N(8x+k) \le 8 \times 3.29 \left(1+\frac{k}{x}\right)\frac{x}{(\log(8x))^{Q(\alpha)}}. \tag{3.35}$$

Par (3.32), pour $x \ge x_0 = e^{100}$, $\frac{k}{x} \le \frac{4\log\log(8x)+12.48}{x} \le \frac{4\log\log(8x_0)+12.48}{x_0} \le \frac{26.4}{26.32} - 1$ ce qui démontre (3.33). □

4 Démonstration du théorème 1

Supposons K entier positif ; fixons $d = 2^{K+2}$ et $k = \frac{2^d-1}{3}\cdot$ On a

$$2^d - 1 = 2^{2^{K+2}} - 1 = (2-1)(2+1)(2^2+1)\dots\left(2^{2^{K+1}}+1\right)$$

et comme les nombres de Fermat $(2+1), (2^2+1), \dots, \left(2^{2^{K+1}}+1\right)$ sont premiers entre eux deux à deux (cf, [2], Th. 16), $\Omega(2^d-1) \ge K+2$ et $\Omega(k) \ge K+1$.

Par (1.13), il vient

$$A_1(x) \ge \frac{B_k(8x+k)}{\sqrt{\frac{8x}{3\cdot 2^d}}\left(1+\sqrt{\frac{3\cdot 2^d}{2x}}\right)} \gg \frac{B_k(x)}{\sqrt{x}}$$

et, par (3.29) et (3.26), on a

$$\frac{B_k(x)}{\sqrt{x}} \gg \frac{\sqrt{x}(\log\log x)^{g_k-2}}{\log x} \ge \frac{\sqrt{x}(\log\log x)^{\Omega(k)-1}}{\log x} \ge \frac{\sqrt{x}(\log\log x)^{K}}{\log x}$$

ce qui achève la preuve du théorème 1. □

5 Démonstration du théorème 2

5.1 Minoration de $\mathbf{A_0(x)}$

Proposition 4 *Soit α et x deux nombres réels vérifiant* (3.30). *Alors, $A_0(x)$ défini par* (1.1) *vérifie*

$$A_0(x) \ge \sqrt{\frac{9\alpha x\log\log x}{8}}\left(\frac{1-2\varepsilon(x)}{1+\varepsilon(x)}\right)\left(\frac{2}{3} - \frac{26.5}{(1-\alpha)(\log(8x))^{Q(\alpha)}}\right) \tag{5.1}$$

avec $Q(\alpha)$ défini en (2.21) *et*

$$\varepsilon(x)=\sqrt{\frac{36\log\log(8x)+116}{2x}}\le 2.3\cdot 10^{-21}. \tag{5.2}$$

Démonstration : Pour tout d pair, $d\ge 0$ et tout $x\ge 1$, la formule (1.14) donne

$$A_0(x)\ge\sqrt{\frac{3\cdot 2^d}{8}}\sqrt{x}\left(\frac{1-2\beta(x)}{1+\beta(x)}\right)\left(\frac{2}{3}-\frac{B_k(8x+k)}{x(1-2\beta(x))}\right) \tag{5.3}$$

avec $k=\frac{2^d-1}{3}$, $\beta(x)=\sqrt{\frac{3\cdot 2^d}{2x}}$ et $B_k(x)$ défini en (1.8).

On choisit d par (3.31) en fonction de α et x ; pour $\alpha<1$ et $x\ge x_0=e^{100}$,

$$\beta(x)\le\varepsilon(x)\le\varepsilon(x_0)\le 2.3\cdot 10^{-21}. \tag{5.4}$$

Par le lemme 4, il s'ensuit que

$$\frac{B_k(8x+k)}{x(1-2\beta(x))}\le\frac{\frac{26.4}{(1-4.6\cdot 10^{-21})}}{(1-\alpha)(\log(8x))^{Q(\alpha)}}\le\frac{26.5}{(1-\alpha)(\log(8x))^{Q(\alpha)}}$$

et (5.1) découle de (5.3) et (3.31). □

5.2 Démonstration du théorème 2 (ii)

En faisant tendre x vers l'infini dans (5.1), on obtient pour tout $\alpha<1$

$$\underline{\lim}\frac{A_0(x)}{\sqrt{x\log\log x}}\ge\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9\alpha}{8}}=\sqrt{\frac{\alpha}{2}},$$

ce qui prouve (ii).

5.3 Démonstration du théorème 2 (i)

On choisit $\alpha=0.253$ et $x\ge x_1=\exp(1150000)$. Les inégalités (3.30) sont vérifiées et la proposition 4 donne

$$\begin{aligned}A_0(x) &\ge \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{x\log\log x}\left(\frac{1-2\varepsilon(x_1)}{1+\varepsilon(x_1)}\right)\left(1-\frac{39.75}{(1-\alpha)(\log(8x_1))^{Q(\alpha)}}\right)\\ &\ge 0.283\sqrt{x\log\log x}.\end{aligned}$$

Pour $10\le x<x_1$, le résultat (1.4) donne $A_0(x)\ge 1.05\sqrt{x}$. Il en découle

$$A_0(x)\ge 1.05\sqrt{x}\ge\frac{1.05}{\sqrt{\log\log x_1}}\sqrt{\log\log x}\ge 0.281\sqrt{x\log\log x}.$$

Pour $e<x\le 10$, comme $p(2)=2$ est pair, $A_0(x)\ge 1$, et $\sqrt{x\log\log x}\le\sqrt{10\log\log 10}<1$, ce qui montre que (i) est encore vraie. □

6 Remerciements

Cet article doit beaucoup aux discussions et aux échanges de courriels avec J.-P. Serre. J'ai plaisir à le remercier vivement ici pour m'avoir fait profiter de sa grande connaissance des formes modulaires et en particulier pour la proposition 3 qui lui est due.

J'ai également plaisir à remercier A. Sárközy qui m'a introduit dans le sujet et l'arbitre anonyme pour ses remarques pertinentes.

Références

[1] G.H. Hardy and S. Ramanujan. The normal number of prime factors of a munber n, *Quarterly J. of Math.*, 48, 1917, 76–92 and Collected Papers of S. Ramanujan, 262–275.

[2] G.H. Hardy and E.M. Wright. An introduction to the theory of numbers, 4th edition, Oxford at the Clarendon Press, 1964.

[3] N. Jochnowitz. Congruences between systems of eigenvalues of modular forms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 270, 1982, 269–285.

[4] K. Hatada. Eigenvalues of Hecke Operators on $SL(2, \mathbb{Z})$, *Math. Annalen*, 239, 1979, 75–96.

[5] A. Ivic. The Riemann zeta-function, J. Wiley and Sons, 1985.

[6] E. Krätzel. Lattice points, Kluwer Academic Publishers, 1998.

[7] E. Landau. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, I, 2nd ed, Chelsea, New-York, 1953.

[8] J.-L. Nicolas. Valeurs impaires de la fonction de partition $p(n)$, *International J. of Number Theory* 2, 2006, 469–487.

[9] J.-L. Nicolas, I. Ruzsa and A. Sárközy. On the parity of additive representation function, *J. Number Theory* , 73, 1998, 292–317 (avec un appendice de J.-P. Serre).

[10] K. Ono. The Web of Modularity : Arithmetic of the Coefficients of Modular Forms and q-series, *Amer. Math. Soc.*, CBMS n° 102, 2004.

[11] J. B. Rosser and L. Schoenfeld. Approximate Formulas for Some Functions of Prime Numbers, *Illinois. J. Math*, 6, 1962, 64–94.

[12] J.-P. Serre. Cours d'arithmétique, Paris, 1970.

[13] J.-P. Serre. Congruences et formes modulaires (D'après H. P. F. Swinnerton-Dyer), Séminaire Bourbaki, 24ème année, 1971/72, n° 416.

[14] J.-P. Serre. Valeurs propres des opérateurs de Hecke modulo ℓ, *Astérisque* 24-25, 1975, 109–117.

[15] J.-P. Serre. Divisibilité de certaines fonctions arithmétiques, *Séminaire Delange–Pisot–Poitou (Théorie des nombres)*, 16ème année, 1974/75, n°20, 28 p.

[16] J.-P. Serre. Divisibilité de certaines fonctions arithmétiques, *L'Enseignement Math.* 22, 1976, 227–260.

[17] H. P. F. Swinnerton-Dyer. On ℓ-representations and congruences for coefficients of modular forms, *Springer Lect. Notes* 350, 1973, 1–55.

[18] H. P. F. Swinnerton-Dyer. On ℓ-representations and congruences for coefficients of modular forms, II, *Springer Lect. Notes* 601, 1977, 63–90.

[19] J. Tate. The Non-Existence of Certain Galois Extensions of $\mathbb{Q}$ Unramified Outside 2, *Contemporary Mathematics*, 174, 1994, 153–156.

[20] G. Tenenbaum. Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres, S.M.F., Paris, 1995 ; Introduction to analytic and probabilistic number theory, Cambridge studies in advanced mathematics, n°46, Cambridge University Press, 1995.

Jean-Louis NICOLAS,
Université de Lyon, Université Lyon 1, CNRS,
Institut Camille Jordan, UMR 5208,
Mathématiques, Bât. Doyen Jean Braconnier,
21 Avenue Claude Bernard,
F-69622 Villeurbanne cédex, France.

e-mail : `jlnicola@in2p3.fr`
`http ://math.univ-lyon1.fr/~nicolas/`