JOURNAL OF NUMBER THEORY **40**, 146–164 (1992)

Grandes déviations pour certaines fonctions arithmétiques

M. BALAZARD

CeReMaB, Université de Bordeaux, 351 Cours de la Libération, F-33405 Talence Cédex, France

J.-L. NICOLAS

Mathématiques, Université Claude Bernard, 69622 Villeurbanne, France

C. POMERANCE*

Department of Mathematics, University of Georgia, Athens, Georgia 30602, U.S.A.

ET

G. TENENBAUM

Mathématiques, Université de Nancy I, B. P. 239, 54506 Vandœuvre les Nancy, France

Communicated by H. Zassenhaus

Received December 8, 1987; revised December 20, 1990

Although the mean value of the number-of-divisors function $\tau(n)$ for $n \leqslant x$ is $\log x$, there are actually only very few $n \leqslant x$ with $\tau(n) \geqslant \log x$. Let $S(x)$ denote the number of $n \leqslant x$ with $\tau(n) \geqslant \log x$. Partially solving a problem of Steinig, Norton has shown that there are positive constants c_1, c_2 with $c_1 < R(x) < c_2$ for all large x, where $R(x) = x^{-1} S(x)(\log x)^{\delta} (\log\log x)^{1/2}$ and where $\delta = 1 - (1 + \log\log 2)/\log 2$. In this paper we show that $R(x)$ does not tend to a limit as $x \to \infty$. Instead we have $R(x) \sim CK(\{(\log\log x)/\log 2\})$ where $\{ \}$ denotes the fractional part, C is an explicit, computable constant, and K is an explicit, computable function on $[0, 1[$ which is continuous but for countably many jump discontinuities. This result is obtained as a corollary to a more general theorem which deals with the distribution of integers for which a multiplicative function $g(n)$ "resembling" $\tau(n)$ is far from its normal value. The case where $g(n)$ is the number of square free divisors of n was previously handled by Delange. © 1992 Academic Press, Inc.

* Research supported in part by an NSF grant.

0022-314X/92 $3.00

I. Introduction

Si n est un entier positif, notons $\tau(n)$ le nombre des diviseurs de n. Il est bien connu depuis Hardy et Ramanujan que la valeur moyenne

$$x^{-1} \sum_{n \leqslant x} \tau(n) = \log x + O(1) \qquad \text{pour} \quad x \geqslant 2, \tag{1}$$

ne reflète pas l'ordre de grandeur normal de la fonction $\tau(n)$, qui vaut $(\log n)^{\log 2 + o(1)}$ (cf. [3, paragraphe 22.13]). Dans ce contexte, Steinig a posé le problème d'évaluer la quantité

$$S(x) = \operatorname{Card}\{n \leqslant x \colon \tau(n) \geqslant \log x\}. \tag{2}$$

Une réponse partielle a été fournie par Norton [5], sous forme de l'estimation

$$S(x) \asymp x(\log x)^{-\delta} (\log_2 x)^{-1/2} \tag{3}$$

où l'on a posé

$$\delta = 1 - (1 + \log_2 2)/\log 2 = 0{,}08607... . \tag{4}$$

Ici et dans la suite, nous notons $\log_k$ la k-ième itérée de la fonction logarithme.

Désignons respectivement par $\Omega(n)$ et $\omega(n)$ le nombre de facteurs premiers de l'entier n comptés avec ou sans leur ordre de multiplicité. L'évaluation (3) est obtenue dans [5] comme sous-produit d'inégalités générales concernant la quantité

$$N(x, \lambda; g) = \begin{cases} \operatorname{Card}\{n \leqslant x \colon g(n) \geqslant \lambda \log_2 x\} & \text{si} \quad \lambda > 1 \\ \operatorname{Card}\{n \leqslant x \colon g(n) < \lambda \log_2 x\} & \text{si} \quad \lambda \leqslant 1, \end{cases} \tag{5}$$

où g est une fonction additive à valeurs entières telle que $0 \leqslant g(n) \leqslant \Omega(n)$.

L'encadrement classique

$$2^{\omega(n)} \leqslant \tau(n) \leqslant 2^{\Omega(n)} \qquad \text{pour} \quad n \geqslant 1, \tag{6}$$

implique en effet

$$N(x, 1/\log 2; \omega) \leqslant S(x) \leqslant N(x, 1/\log 2; \Omega). \tag{7}$$

On dispose même, en fait, de formules asymptotiques pour $N(x, \lambda; g)$ lorsque $g = \omega$ ou $g = \Omega$. Le cas $\lambda = 1 + o(1)$ entre dans le cadre d'application du célèbre théorème d'Erdős–Kac (cf. [1, chapitre 12]), utilement complété par un résultat de Kubilius (cf. [4, théorème 9.2]). Le cas

$|\lambda - 1| \gg 1$, qui nous intéresse plus particulièrement ici, correspond aux grandes déviations. Erdős et Nicolas reproduisent dans [2] une démonstration de Delange fournissant l'approximation

$$N(x, \lambda; \omega) = \frac{F(\lambda)}{\sqrt{2\pi}\,|\lambda - 1|}\,\lambda^{3/2 - \{-\lambda \log_2 x\}}\,\frac{x(1 + O_\lambda(1/\log_2 x))}{(\log x)^{Q(\lambda)}\sqrt{\log_2 x}} \tag{8}$$

(où $\{\ \}$ désigne la partie fractionnaire) valable pour chaque λ fixé, $\lambda \neq 1$, avec

$$F(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\lambda + 1)} \prod_p \left(1 + \frac{\lambda}{p - 1}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\lambda} \tag{9}$$

et

$$Q(\lambda) = \lambda \log \lambda - \lambda + 1. \tag{10}$$

Pour déduire (8) de la proposition 3 de [2], on observe d'abord que le terme d'erreur $O(1/\log_2 x)$ qui y figure est en fait uniforme en α si $1 < \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2 < +\infty$, où α_1 et α_2 sont fixés. On définit ensuite α par $\alpha \log_2 x = -1 - [-\lambda \log_2 x]$. Les conditions $\omega(n) \geqslant \lambda \log_2 x$ et $\omega(n) < \lambda \log_2 x$ équivalent respectivement à $\omega(n) > \alpha \log_2 x$ (qui est entier) et $\omega(n) \leqslant \alpha \log_2 x$; enfin la formule de Taylor donne:

$$Q(\alpha) = Q(\lambda) - \frac{1 - \{-\lambda \log_2 x\}}{\log_2 x} \log \lambda + O\left(\frac{1}{(\log_2 x)^2}\right).$$

Sous la condition supplémentaire $0 < \lambda < 2$, le résultat s'étend sans difficulté à la fonction Ω—le facteur $F(\lambda)$ devant être remplacé dans la formule correspondante par

$$F^*(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\lambda + 1)} \prod_p \left(1 - \frac{\lambda}{p}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\lambda}.$$

En reportant dans (7), on obtient un encadrement de $S(x)$ relativement plus précis que celui de Norton, mais pas d'équivalence asymptotique, puisque $F^*(\lambda) \neq F(\lambda)$ pour tout $\lambda \neq 1$. Désignons respectivement par l et l' les limites inférieure et supérieure de $S(x)/(x(\log x)^{-\delta}(\log_2 x)^{-1/2})$. On obtient en particulier lorsque $\lambda = 1/\log 2$:

$$l \geqslant \frac{F(\lambda)}{\sqrt{2\pi}\,(\lambda - 1)}\,\lambda^{1/2} \simeq 0{,}70$$

et

$$l' \leqslant \frac{F^*(\lambda)}{\sqrt{2\pi}\,(\lambda - 1)}\,\lambda^{3/2} \simeq 1{,}80.$$

La méthode utilisée par Delange pour établir (8) n'est pas facilement transposable à une large classe de fonctions arithmétiques. Elle repose, en effet, sur l'emploi de la formule de Cauchy

$$N(x, \lambda; g) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=r} \sum_{n \leqslant x} z^{g(n)-k} \frac{dz}{z-1} \qquad \text{pour} \quad \lambda > 1$$

(où $r > 1$, $k = \lceil \lambda \log_2 x \rceil$, $\lceil \ \rceil$ désignant le plafond: $\lceil y \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z}: n \geqslant y\} = -[-y]$) et utilise donc, de manière essentielle, le fait que g est à valeurs entières.

Pour chaque fonction arithmétique réelle f, définissons $N(x, \lambda; f)$ comme dans (5) et posons $f_0(n) = (\log \tau(n))/(\log 2)$. La méthode de Delange est inadéquate pour évaluer $N(x, \lambda; f_0)$ car f_0 n'est pas à valeurs entières. Il est également inefficace de recourir à l'intégrale de Perron:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{n \leqslant x} e^{zf_0(n)} (\log x)^{-\lambda z} \frac{dz}{z} \qquad (c > 0). \tag{11}$$

Elle affecte d'un coefficient 1/2 les entiers $n \leqslant x$ pour lesquels $f_0(n) = \lambda \log_2 x$, et l'on peut montrer facilement que cela implique une erreur systématique qui n'est pas $o(N(x, \lambda; f_0))$. Nous pouvons cependant tirer avantage du fait que $f_0(p)$ est constant en utilisant la décomposition

$$n = qd, \qquad ((q, d) = 1,\ \mu(q)^2 = 1,\ \chi(d) = 1) \tag{12}$$

où μ désigne la fonction de Möbius et χ la fonction caractéristique de l'ensemble

$$S := \{d\colon p \mid d \Rightarrow p^2 \mid d\}. \tag{13}$$

On a alors

$$f_0(n) = \omega(n) + \rho_0(n) \qquad \text{pour} \quad n \geqslant 1,$$

où la fonction ρ_0 ainsi définie est telle que $\rho_0(p) = 0$ pour tout p. Les bonnes propriétés de croissance et de régularité de la suite des éléments de S permettent alors une évaluation satisfaisante de la distribution conjointe de ω et de ρ_0 qui fournit à son tour, après re-sommation, une formule asymptotique pour $N(x, \lambda; f_0)$.

En vue d'applications ultérieures, nous énonçons nos résultats dans un cadre assez général.

Soit $\mathscr{R}$ la classe des fonctions réelles additives ρ telles que $\rho(p) = 0$ pour tout p premier. Pour toute fonction ρ de $\mathscr{R}$ nous définissons l'ensemble $E(\rho) = \{a > 0\colon \exists \sigma < 1, \sum_p \sum_{\nu \geqslant 2} a^{\rho(p^\nu)} p^{-\nu\sigma} < +\infty\}$, et nous posons:

$$m(\rho) = \inf E(\rho), \qquad M(\rho) = \sup E(\rho).$$

En considérant séparément les termes de la somme double selon le signe de $\rho(p^\nu)$, on montre facilement que $E(\rho)$ est un intervalle. D'autre part, $1 \in E(\rho)$ donc $m(\rho) \leqslant 1 \leqslant M(\rho)$.

Nous définissons également, pour toute valeur du paramètre positif λ, une fonction multiplicative

$$h(n; \lambda) := \prod_{p \mid n} \left(1 + \frac{\lambda}{p}\right)^{-1}$$

et le produit eulérien

$$H(\lambda) := \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^\lambda \left(1 + \frac{\lambda}{p}\right)$$

de sorte que l'on a

$$F(\lambda) = H(\lambda) \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\chi(d)}{d} \lambda^{\omega(d)} h(d; \lambda). \tag{14}$$

Une fonction ρ étant supposée fixée dans $\mathscr{R}$, nous désignons respectivement par $F^*(\lambda; y)$, $F_*(\lambda; y)$, le membre de droite de (14) lorsque la sommation en d est soumise à la condition supplémentaire $\rho(d) \geqslant y$, ou $\rho(d) < y$.

Nous obtenons les résultats suivants.

THÉORÈME 1. *Soit $\rho \in \mathscr{R}$ et a, b, A des réels vérifiant:*

$$m(\rho) < a \leqslant 1 \leqslant b < M(\rho), \qquad A > 0.$$

On a uniformément pour $x \geqslant 3$, $1 \leqslant k \leqslant A \log_2 x$ et $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Card}\{n \leqslant x &: \omega(n) = k \text{ et } \rho(n) \geqslant y\} \\ &= \frac{x}{\log x} \frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} \left(F^*\left(\frac{k-1}{\log_2 x}; y\right)\right. \\ &\quad \left. + O_{A,b,\rho}\left(\frac{(1+b^y)^{-1}}{\log_2 x}\right)\right) \end{aligned} \tag{15}$$

et

$$\begin{aligned} \operatorname{Card}\{n \leqslant x &: \omega(n) = k \text{ et } \rho(n) < y\} \\ &= \frac{x}{\log x} \frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} \left(F_*\left(\frac{k-1}{\log_2 x}; y\right)\right. \\ &\quad \left. + O_{A,a,\rho}\left(\frac{(1+a^{-y})^{-1}}{\log_2 x}\right)\right). \end{aligned} \tag{16}$$

THÉORÈME 2. *Soit ρ une fonction de $\mathscr{R}$ et f la fonction additive définie par $f(n)=\omega(n)+\rho(n)$ pour $n \geqslant 1$.*

Pour tous λ_0, λ_1 tels que $1<\lambda_0<\lambda_1<M(\rho)$ (resp. $m(\rho)<\lambda_0<\lambda_1<1$) on a uniformément pour $x \geqslant 3$, $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1$,

$$N(x, \lambda; f)=\frac{H(\lambda)}{|\lambda-1|} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}}\, K(\{\lambda \log_2 x\}) \frac{x(1+O(1/\log_2 x))}{(\log x)^{\varrho(\lambda)} \sqrt{\log_2 x}} \tag{17}$$

où l'on a posé

$$K(\theta):=\lambda^\theta \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\chi(d)}{d} h(d; \lambda)\, \lambda^{[f(d)+1-\theta]} \qquad (0 \leqslant \theta<1). \tag{18}$$

La constante implicite dans le symbole O dépend au plus de λ_0, λ_1 et ρ.

Lorsque f est à valeurs entières, la série (18) se met sous forme de produit eulérien. Le théorème 2 permet ainsi de retrouver (8).

COROLLAIRE. *On a*

$$S(x)=CK\left(\left\{\frac{\log_2 x}{\log 2}\right\}\right) \frac{x(1+O(1/\log_2 x))}{(\log x)^\delta \sqrt{\log_2 x}} \tag{19}$$

avec

$$C=\frac{H(1/\log 2)}{1-\log 2} \sqrt{\frac{\log 2}{2\pi}} \simeq 0{,}378 \tag{20}$$

lorsque K est la fonction définie par (18) *pour $f(d)=(\log \tau(d))/(\log 2)$, et $\lambda=1/\log 2$.*

Nous terminons ce paragraphe par quelques remarques concernant la fonction K définie par (18). Supposons $\lambda>1$ (les conclusions dans le cas $\lambda<1$ sont analogues). Pour tout d fixé dans S, la fonction

$$\theta \rightarrow \lambda^{\theta+[f(d)+1-\theta]}$$

est continue et strictement croissante sur chacun des intervalles $[0, \{\rho(d)\}]$ et $]\{\rho(d)\}, 1[$. En $\theta=\{\rho(d)\}$, il y a une discontinuité à droite: la fonction prend la valeur $\lambda^{f(d)+1}$ et la limite à droite vaut $\lambda^{f(d)}<\lambda^{f(d)+1}$. Notons U l'ensemble des parties fractionnaires $\{\rho(d)\}$, d décrivant S. La convergence normale de la série $K(\theta)$ et la remarque qui précède impliquent que

1°) K est continue en tout point de $[0, 1[\backslash U$,

2°) En tout point $\theta \in U$, K est continue à gauche mais discontinue à droite, avec $K(\theta+)<K(\theta)$;

3°) K est strictement croissante dans tout intervalle $[u, v] \subset [0, 1]$ tel que $[u, v[\subset [0, 1[\backslash U$.

On a l'encadrement suivant, pour $0 \leqslant \theta < 1$:

$$\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\chi(d)}{d} h(d; \lambda)\, \lambda^{f(d)} < K(\theta) \leqslant \lambda \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\chi(d)}{d} h(d; \lambda)\, \lambda^{f(d)}.$$

Dans le cas du corollaire ($f = f_0$ et $\lambda = 1/\log 2$), ces constantes d'encadrement valent approximativement 2,28 et 3,29 et cela donne $l \geqslant 0{,}86$ et $l' \leqslant 1{,}24$. On peut démontrer à partir de 1°), 2°) et 3°) que

$$\inf_{0 \leqslant \theta < 1} K(\theta) = \inf_{\theta \in U} K(\theta +) \qquad \text{et} \qquad \sup_{0 \leqslant \theta < 1} K(\theta) = \sup_{\theta \in U} K(\theta)$$

mais nous laissons ce raisonnement au lecteur. La détermination explicite de ces bornes paraît difficile en général; cependant, le second auteur pense pouvoir établir ailleurs que $l = CK(0+) \simeq 0{,}93$ et que $l' = CK(0) \simeq 1{,}15$ (cf., M. Deléglise, Thèse, Université C. Bernard (Lyon 1), 1991).

II. Cinq lemmes

Nous regroupons dans ce paragraphe les résultats auxiliaires servant à la démonstration des théorèmes 1 et 2.

Si $\operatorname{Re} s > 1$ et $z \in \mathbb{C}$, on pose:

$$\zeta(s)^z = \prod_p \left(1 + zp^{-s} + \frac{z(z+1)}{2!} p^{-2s} + \cdots \right)$$
$$= \prod_p (1 - p^{-s})^{-z}$$

Lemme 1. *Soit $F(s, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_z(n)\, n^{-s}$ une série de Dirichlet dépendant du paramètre complexe z. On suppose que les conditions suivantes sont réalisées pour $|z| \leqslant A$:*

(i) *les dérivées d'ordre $\leqslant 3 + [|z|]$ de la série de Dirichlet*

$$G(s, z) = \zeta(s)^{-z} F(s, z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_z(n)\, n^{-s}$$

sont absolument convergentes en $s = 1$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_z(n)|\, (\log 3n)^{[|z|]+3}\, n^{-1} \leqslant B,$$

(ii) *la fonction $\gamma(z) = G(1, z)/\Gamma(z+1)$ vérifie*

$$|\gamma''(z)| \leqslant D,$$

(iii) *la fonction $a_z(n)$ est, pour chaque $n \geqslant 1$, développable en série entière*

$$a_z(n) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(n)\, z^k.$$

Alors on a uniformément pour $1 \leqslant k \leqslant A \log_2 x$

$$\sum_{n \leqslant x} c_k(n) = \frac{x}{\log x} \frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} \left(\gamma \left(\frac{k-1}{\log_2 x} \right) + O_A \left(\frac{D(k-1)}{(\log_2 x)^2} + \frac{B(\log_2 x)}{\log x} \right) \right). \tag{21}$$

Démonstration. Il s'agit essentiellement d'un résultat classique de Selberg (cf. [6] et, pour une version détaillée, [7, chapitres II.5 et II.6]).

Lemme 2. *Soit g une fonction multiplicative complexe telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} |g(n)|$ converge. Alors, pour toute fonction $\rho \in \mathscr{R}$ et tout nombre réel y, on a*

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \rho(n) \geqslant y}}^{\infty} g(n) = \sum_{\substack{d=1 \\ \rho(d) \geqslant y}}^{\infty} \chi(d)\, g(d) \prod_{p \nmid d} (1 + g(p)).$$

Démonstration. Chaque entier positif n s'écrit de façon unique sous forme $n = qd$, où $|\mu(q)| = \chi(d) = 1$ et $(q, d) = 1$ (on a $q = \prod_{p \| n} p$ et $d = \prod_{p^\nu \| n,\, \nu \geqslant 2} p^\nu$). Comme $\rho \in \mathscr{R}$, on a $\rho(n) = \rho(q) + \rho(d) = \rho(d)$. Par conséquent, la série de l'énoncé peut encore s'écrire

$$\sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ \rho(n) \geqslant y}} g(n) = \sum_{\substack{d \geqslant 1 \\ \rho(d) \geqslant y}} \chi(d)\, g(d) \sum_{\substack{q \geqslant 1 \\ (q,d)=1}} \mu(q)^2\, g(q).$$

L'hypothèse de convergence absolue de la série $\sum g(n)$ implique que la somme intérieure vaut $\prod_{p \nmid d} (1 + g(p))$. Cela achève la démonstration.

Lemme 3. *Soient ρ une fonction de $\mathscr{R}$ et α, δ, η, κ des nombres réels $\geqslant 1$ tels que $\alpha\delta \leqslant \eta < M(\rho)$. Il existe alors $\sigma_0 = \sigma_0(\eta, \rho) \in]1/2, 1[$ tel que l'on ait, uniformément pour $y \in \mathbb{R}$:*

$$\left| \sum_{\rho(d) \geqslant y} \chi(d)\, d^{-\sigma_0} \kappa^{\omega(d)} \alpha^{\rho(d)} \right| \ll_{\kappa, \eta, \rho} (1 + \delta^y)^{-1}.$$

Démonstration. Comme $\eta \in E(\rho)$, choisissons $\sigma_0 \in]1/2, 1[$ tel que:

$$\sum_p \sum_{\nu \geqslant 2} \eta^{\rho(p^\nu)} p^{-\nu\sigma_0} < +\infty.$$

On a, pour tout réel y:

$$\sum_{\rho(d)\geqslant y} \chi(d)\, d^{-\sigma_0}\kappa^{\omega(d)}\alpha^{\rho(d)}$$

$$\leqslant \sum_d \chi(d)\, d^{-\sigma_0}\kappa^{\omega(d)}\alpha^{\rho(d)}\, \delta^{\rho(d)-y}$$

$$=\delta^{-y}\prod_p\left(1+\kappa\sum_{\nu\geqslant 2} p^{-\nu\sigma_0}(\alpha\delta)^{\rho(p^\nu)}\right)$$

$$\leqslant \delta^{-y}\exp\left(\kappa\sum_p\sum_{\nu\geqslant 2} p^{-\nu\sigma_0}(1+\eta^{\rho(p^\nu)})\right)\ll_{\kappa,\eta,\rho}\delta^{-y}.$$

En associant cette majoration avec celle qui correspond au choix $\delta=1$, on obtient la borne min $(1, \delta^{-y})\ll(1+\delta^y)^{-1}$, d'où le résultat annoncé.

LEMME 4. *Soient v et μ des réels positifs. On a*:

$$\sum_{0\leqslant m\leqslant \mu v} e^{-v}\frac{v^m}{m!}<\mu^{-1/2}(1-\mu)^{-1}\, v^{-1/2}e^{-vQ(\mu)} \qquad si \quad \mu<1; \tag{22}$$

$$\sum_{m\geqslant \mu v} e^{-v}\frac{v^m}{m!}<(2\pi)^{-1/2}\,(\mu-1)^{-1}\,\mu^{1/2}v^{-1/2}e^{-vQ(\mu)} \qquad si \quad \mu>1. \tag{23}$$

Démonstration. Voir [5, (lemmes (4.5) et (4.7))].

LEMME 5. *On a uniformément pour tous nombres réels r, y, t tels que $r\geqslant 1$ et $-1\leqslant t\leqslant 1$*:

$$F^*(r+t;\, y)=F^*(r;\, y)+O(|t|\,\tilde{F}(r;\, y))$$

avec

$$\tilde{F}(r;\, y)=\sum_{\substack{d=1\\ \rho(d)\geqslant y}}^{\infty}\frac{\chi(d)}{d}(r+2)^{\omega(d)}.$$

Démonstration. Comme

$$F^*(\lambda;\, y)=H(\lambda)\sum_{d=1,\,\rho(d)\geqslant y}^{\infty}(\chi(d)/d)\,\lambda^{\omega(d)}h(d;\,\lambda),$$

le théorème des accroissements finis montre qu'il suffit de vérifier que, pour $r-1\leqslant\lambda\leqslant r+1$ et $d\geqslant 1$:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(H(\lambda)\,\lambda^{\omega(d)}h(d;\,\lambda))=O((r+2)^{\omega(d)}).$$

Cela résulte des faits suivants:

$$H(\lambda) \text{ et } H'(\lambda) \text{ sont bornées uniformément pour } \lambda \geqslant 0, \tag{24}$$

$$\omega(d)(r+1)^{\omega(d)-1} \leqslant (r+2)^{\omega(d)} \text{ pour } r \geqslant 1 \text{ et } d \text{ entier } \geqslant 1, \tag{25}$$

$$\begin{aligned} h(d; \lambda) \leqslant 1 \text{ et } \left| \frac{\partial}{\partial \lambda} h(d; \lambda) \right| \leqslant \frac{\omega(d)}{r+1} \\ \text{pour } \lambda \geqslant r-1 \text{ et } d \text{ entier } \geqslant 1. \end{aligned} \tag{26}$$

Pour démontrer (24) on observe que si $\lambda \geqslant 0$:

$$\lambda \log(1-p^{-1}) + \log(1+\lambda/p) \leqslant -\lambda/p + \lambda/p = 0$$

donc on a pour tout p,

$$0 < (1-p^{-1})^{\lambda}\,(1+\lambda/p) \leqslant 1$$

et

$$0 < H(\lambda) \leqslant 1/\Gamma(\lambda+1) \qquad (\lambda \geqslant 0).$$

En calculant la dérivée logarithmique de $H(\lambda)$, on obtient:

$$H'(\lambda) = H(\lambda)\left(-\frac{\Gamma'(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)} + \sum_p \left(\log(1-p^{-1}) + \frac{1}{p+\lambda} \right) \right),$$

donc

$$|H'(\lambda)| \leqslant \left| \frac{\Gamma'(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2} \right| + \frac{\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} \sum_p \frac{1}{p(p+\lambda)} \ll 1.$$

Nous laissons (25) et (26) à vérifier par le lecteur.

III. Démonstration du Théorème 1

Nous nous contenterons d'établir (15) (la démonstration de (16) est similaire). Avec les notations du lemme 1, la quantité

$$\operatorname{Card}\{n \leqslant x \colon \omega(n) = k \text{ et } \rho(n) \geqslant y\}$$

n'est autre que $\sum_{n \leqslant x} c_k(n)$ lorsque $F(s, z) = \sum_{n=1,\, \rho(n) \geqslant y}^{\infty} z^{\omega(n)} n^{-s}$. Vérifions maintenant les hypothèses (i) et (ii) de ce lemme.

Pour tous nombres complexes z et s tels que $\operatorname{Re} s > 1$, appliquons le lemme 2 à $\varphi(n) = z^{\omega(n)} n^{-s}$. Nous obtenons:

$$F(s, z) = \sum_{\substack{d=1 \\ \rho(d) \geqslant y}}^{\infty} \chi(d)\, z^{\omega(d)} d^{-s} \prod_{p \nmid d} (1 + zp^{-s})$$

$$= \zeta(s)^z \sum_{\substack{d=1 \\ \rho(d) \geqslant y}}^{\infty} G_d(s, z)$$

où

$$G_d(s, z) := \chi(d)\, z^{\omega(d)} d^{-s} \prod_{p \mid d} (1 - p^{-s})^z$$

$$\times \prod_{p \nmid d} (1 - p^{-s})^z\, (1 + zp^{-s})$$

$$= \chi(d)\, z^{\omega(d)} d^{-s} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_d(m; z)\, m^{-s}$$

où $\beta_d(m; z)$ est la fonction multiplicative de m définie par:

$$1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_d(p^\nu; z)\, w^\nu = \begin{cases} (1 - w)^z & \text{si } p \mid d \\ (1 - w)^z\, (1 + zw) & \text{si } p \nmid d, \end{cases}$$

pour tout nombre complexe w tel que $|w| < 1$.

Si $p \mid d$, on a donc

$$\beta_d(p^\nu; z) = (-1)^\nu \binom{z}{\nu}. \tag{27}$$

Si $p \nmid d$, on a $\beta_d(p; z) = 0$ et, par la formule de Cauchy:

$$\beta_d(p^\nu; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w| = (1+\varepsilon)^{-1}} (1 - w)^z\, (1 + zw)\, w^{-\nu-1}\, dw$$

où $\varepsilon \in]0, 1[$.

Lorsque $|z| \leqslant A$, la fonction $w \to (1 - w)^z\, (1 + zw)$ est $O_{A,\varepsilon}(1)$ sur le cercle $|w| = (1 + \varepsilon)^{-1}$. Par conséquent:

$$|\beta_d(p^\nu; z)| \ll_{A,\varepsilon} (1 + \varepsilon)^\nu \tag{28}$$

pour p premier, $p \nmid d$, $\nu \geqslant 2$, $|z| \leqslant A$ et $\varepsilon \in]0, 1[$.

Avec les notations du lemme 1, on a

$$G(s, z) = \sum_{\substack{d=1 \\ \rho(d) \geqslant y}}^{\infty} \chi(d)\, z^{\omega(d)} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_d(m; z)(md)^{-s}$$

de sorte que

$$b_z(n) = \sum_{\substack{\rho(d) \geqslant y \\ d \mid n}} \chi(d)\, z^{\omega(d)} \beta_d\left(\frac{n}{d}; z\right).$$

Il nous faut majorer:

$$\begin{aligned} B &= \sum_{n=1}^{\infty} |b_z(n)| (\log 3n)^{[|z|]+3}\, n^{-1} \\ &\leqslant \sum_{\substack{d=1 \\ \rho(d) \geqslant y}}^{\infty} \chi(d) |z|^{\omega(d)} \sum_{m=1}^{\infty} |\beta_d(m; z)| (\log 3md)^{[|z|]+3}\, (md)^{-1}. \end{aligned}$$

Désignons par B_d la somme en m, et posons

$$H_d(s, z) := \sum_{m=1}^{\infty} |\beta_d(m; z)| (3md)^{-s}.$$

On a

$$B_d = 3 \left| \left[\frac{d^k}{ds^k} H_d(s, z) \right]_{s=1} \right| \qquad (k = 3 + [|z|]).$$

Sous les conditions $|z| \leqslant A$, $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma_0 > \frac{1}{2}$, (27) permet d'écrire:

$$\begin{aligned} &\left| \prod_{p \mid d} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} |\beta_d(p^\nu; z)|\, p^{-\nu s} \right) \right| \\ &\qquad \leqslant \prod_{p \mid d} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{A + \nu - 1}{\nu} p^{-\nu\sigma_0} \right) \\ &\qquad = \prod_{p \mid d} (1 - p^{-\sigma_0})^{-A} \leqslant (1 - 2^{-1/2})^{-A\omega(d)}, \end{aligned}$$

et (28) avec $\varepsilon = 0,4$ implique:

$$\begin{aligned} &\left| \prod_{p \nmid d} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} |\beta_d(p^\nu; z)|\, p^{-\nu s} \right) \right| \\ &\qquad \leqslant \prod_{p \nmid d} \left(1 + X(A) \sum_{\nu=2}^{\infty} \left(\frac{1,4}{p^{\sigma_0}} \right)^{\nu} \right) \ll_{A, \sigma_0} 1, \end{aligned}$$

où $X(A)$ est une quantité positive ne dépendant que de A.

Ces majorations conduisent donc à:

$$|H_d(s, z)| = \left|(3d)^{-s} \prod_p \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} |\beta_d(p^\nu; z)|\, p^{-\nu s}\right)\right|$$
$$\ll_{A,\sigma_0} d^{-\sigma_0} Y(A)^{\omega(d)} \qquad \text{où} \quad Y(A) = (1 - 2^{-1/2})^{-A},$$

pour $|z| \leqslant A$, $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma_0 > \frac{1}{2}$ et $d \geqslant 1$.

La formule de Cauchy nous donne alors (toujours avec $k = 3 + [|z|]$):

$$B_d = 3k! \left|\frac{1}{2i\pi} \int_{|s-1| = 1 - \sigma_0} H_d(s, z)(s-1)^{-k-1}\, ds\right|$$
$$\ll_{A,\sigma_0} d^{-\sigma_0} Y(A)^{\omega(d)}.$$

Par conséquent:

$$B \leqslant \sum_{\substack{d=1 \\ \rho(d) \geqslant y}}^{\infty} \chi(d) |z|^{\omega(d)} B_d$$
$$\ll_{A,\sigma_0} \sum_{\substack{d=1 \\ \rho(d) \geqslant y}}^{\infty} \chi(d)\, d^{-\sigma_0} (A\, Y(A))^{\omega(d)}.$$

Il découle donc du lemme 3 avec $\alpha = 1$, $\delta = \eta = b$, $\kappa = A\, Y(A)$ (on peut supposer $A \geqslant 1$) que l'on peut choisir σ_0 de sorte que l'hypothèse (i) du lemme 1 soit vérifiée avec

$$B \ll_{A,b,\rho} (1 + b^y)^{-1}.$$

Posons maintenant

$$\gamma_d(z) = G_d(1, z)/\Gamma(z+1), \qquad D_d = \sup_{|z| \leqslant A} |\gamma_d''(z)|.$$

On a, pour $|z| \leqslant A + 1$:

$$|\gamma_d(z)| \ll_A \frac{\chi(d)}{d} (A+1)^{\omega(d)} \textstyle\sum_{m=1}^{\infty} |\beta_d(m; z)|\, m^{-1}$$
$$\ll_A \frac{\chi(d)}{d} Z(A)^{\omega(d)} \qquad \text{où} \quad Z(A) = (A+1)\, Y(A+1)$$

d'où $D_d \ll_A (\chi(d)/d)\, Z(A)^{\omega(d)}$ par la formule de Cauchy.

Le lemme 3 avec $\alpha = 1$, $\delta = \eta = b$ et $\kappa = Z(A)$, implique alors pour tout réel y:

$$\sum_{\rho(d) \geqslant y} D_d \ll_{A,b,\rho} (1 + b^y)^{-1}$$

de sorte que l'hypothèse (ii) du lemme 1 est vérifiée avec $D \ll_{A,b,\rho} (1+b^y)^{-1}$. La conclusion de ce lemme implique bien (15).

IV. Démonstration du Théorème 2

Nous établissons (17) dans le cas $\lambda > 1$. Le cas $\lambda < 1$ se traite de manière similaire.

Pour simplifier l'écriture, nous posons $\xi = \log_2 x$, $\theta = \{\lambda\xi\}$ et $N = [\lambda\xi]$. Nous avons:

$$N(x, \lambda; f) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ f(n) \geqslant \lambda\xi}} 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ \omega(n) = k \\ \rho(n) \geqslant \lambda\xi - k}} 1 = S_1 + S_2 + S_3$$

où les S_i correspondent aux domaines de sommation respectifs $k < N - T$, $|k - N| \leqslant T$, $k > N + T$, T étant un paramètre arbitraire tendant vers l'infini avec ξ, $T \leqslant \xi^{1/2}$.

Nous majorons d'abord S_1 et S_3. On a:

$$S_3 \leqslant \sum_{\substack{n \leqslant x \\ \omega(n) \geqslant N+T}} 1 = N(x, \lambda - \{\lambda\xi\}\,\xi^{-1} + T\xi^{-1}; \omega).$$

Pour majorer cette dernière quantité, nous appliquons la relation (8), qui est en fait uniforme en λ sur tout compact de $]0, 1[\, \cup\,]1, +\infty[$. On a:

$$\begin{aligned} &Q(\lambda - \{\lambda\xi\}\,\xi^{-1} + T\xi^{-1}) \\ &\qquad = Q(\lambda) + (T\xi^{-1} - \{\lambda\xi\}\,\xi^{-1}) \log \lambda + O(T^2\xi^{-2}) \end{aligned}$$

donc:

$$(\log x)^{Q(\lambda - \{\lambda\xi\}\xi^{-1} + T\xi^{-1})} = e^{\xi Q(\lambda)} \lambda^{T - \{\lambda\xi\}} e^{O(T^2\xi^{-1})}$$

et:

$$S_3 \ll_{\lambda_0, \lambda_1} x e^{-Q(\lambda)\xi} \xi^{-1/2} \lambda^{-T}, \tag{29}$$

uniformément pour $x \geqslant 3$, $0 \leqslant T \leqslant \xi^{1/2}$ et $1 < \lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1 < +\infty$.

Supposons maintenant que $1 < \lambda \leqslant \lambda_1 < M(\rho)$. En prenant $b = \lambda_2 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + M(\rho))$, l'assertion (15) du théorème 1 implique:

$$S_1 \leqslant \sum_{k < N - T} x e^{-\xi} \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} \left(F^*\left(\frac{k-1}{\xi}; \lambda\xi - k\right) + O_{\lambda_1, \rho}\left(\frac{\lambda_2^{k - \lambda\xi}}{\xi}\right)\right)$$

car $k<N-T$ entraîne $k\leqslant\lambda\xi\leqslant\lambda_1\xi$. De plus, si $0\leqslant r\leqslant\lambda_1$, le lemme 3 fournit l'estimation

$$F^*(r,y)=H(r)\sum_{\rho(d)\geqslant y}\frac{\chi(d)}{d}r^{\omega(d)}h(d;r)$$
$$\ll_{\lambda_1,\rho}\lambda_2^{-y}\qquad(y\in\mathbb{R})$$

en choisissant $\alpha=1$, $\delta=\eta=\lambda_2$ et $\kappa=\lambda_1$.

Par conséquent:

$$S_1\ll_{\lambda_1,\rho}xe^{(\lambda_2-1-\lambda\log\lambda_2)\xi}\sum_{k<N-T}e^{-\lambda_2\xi}\frac{(\lambda_2\xi)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Soit $v=\lambda_2\xi$ et μ défini par:

$$\sum_{1\leqslant k<N-T}e^{-\lambda_2\xi}\frac{(\lambda_2\xi)^{k-1}}{(k-1)!}=\sum_{0\leqslant m\leqslant\mu v}e^{-v}\frac{v^m}{m!}.$$

On a:

$$\mu=\frac{\lambda}{\lambda_2}-\frac{T}{\lambda_2\xi}+O\left(\frac{1}{\xi}\right)=\frac{\lambda}{\lambda_2}+O\left(\frac{1}{\xi^{1/2}}\right)$$

donc $Q(\mu)=Q(\lambda/\lambda_2)-(T/\lambda_2\xi)\log(\lambda/\lambda_2)+O(1/\xi)$ et

$$\exp(vQ(\mu))=\exp\left(\lambda\xi\log\left(\frac{\lambda}{\lambda_2}\right)-\lambda\xi+\lambda_2\xi-T\log\frac{\lambda}{\lambda_2}+O(\lambda_2)\right).$$

Ainsi, par l'inégalité (22) du lemme 4,

$$S_1\ll_{\lambda_1,\rho}xe^{-\xi Q(\lambda)}\xi^{-1/2}\exp(-T(\log\lambda_2-\log\lambda)).\tag{30}$$

Il reste à évaluer S_2. D'après le théorème 1, on a:

$$S_2=\sum_{|k-N|\leqslant T}xe^{-\xi}\frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!}\left(F^*\left(\frac{k-1}{\xi};\lambda\xi-k\right)+O_{\lambda_1,\rho}\left(\frac{\lambda_2^{-(\lambda\xi-k)^+}}{\xi}\right)\right)$$

car $k\leqslant N+T$ entraîne $k\leqslant(\lambda_1+T/\xi)\,\xi\leqslant\lambda_2\xi$ si x est assez grand.

La contribution des termes restes est:

$$\ll_{\lambda_1,\rho}xe^{(\lambda_2-1-\lambda\log\lambda_2)\xi}\sum_{N-T\leqslant k\leqslant N}e^{-\lambda_2\xi}\frac{(\lambda_2\xi)^{k-1}}{(k-1)!}+x\xi^{-1}\sum_{k>N}\frac{e^{-\xi}\xi^{k-1}}{(k-1)!}$$

En employant les inégalités (22) et (23) du lemme 4, comme dans la démonstration de la majoration (30), on obtient que cette contribution est:

$$\ll_{\lambda_0,\lambda_1,\rho}xe^{-Q(\lambda)\xi}\xi^{-3/2}.\tag{31}$$

Pour traiter le terme principal de S_2, nous posons $k-1=N+h=\lambda\xi-\theta+h$ et nous utilisons:

$$e^{-\xi}\frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!}=e^{-Q(\lambda)\xi}(2\pi\lambda\xi)^{-1/2}\lambda^{-h+\theta}\left(1+O\left(\frac{h^2+1}{\xi}\right)\right). \tag{32}$$

Pour démontrer cela, on utilise la formule de Stirling sous la forme

$$\log(k-1)!=(k-\tfrac{1}{2})\log k-k+\log\sqrt{2\pi}+O(k^{-1})$$

puis l'approximation $\log(1+t)=t+O(t^2)$ (pour t voisin de 0) pour obtenir

$$\begin{aligned}\log k&=\log(\lambda\xi)+\log\left(1+\frac{h+1-\theta}{\lambda\xi}\right)\\&=\log(\lambda\xi)+\frac{h+1-\theta}{\lambda\xi}+O\left(\frac{h^2+1}{(\lambda\xi)^2}\right).\end{aligned}$$

L'évaluation (32) en découle par un calcul simple.

D'autre part, le lemme 5 nous fournit l'approximation:

$$F^*\left(\frac{k-1}{\xi};y\right)=F^*(\lambda;y)+O\left(\frac{1+|h|}{\xi}\tilde{F}(\lambda;y)\right).$$

En multipliant cette dernière relation par (32), on obtient:

$$\begin{aligned}&e^{-\xi}\frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!}F^*\left(\frac{k-1}{\xi};\lambda\xi-k\right)\\&\quad=e^{-Q(\lambda)\xi}(2\pi\lambda\xi)^{-1/2}\lambda^{-h+\theta}\Bigg(F^*(\lambda;\lambda\xi-k)\\&\qquad+O\left(\frac{h^2+1}{\xi}F^*(\lambda;\lambda\xi-k)\right)\\&\qquad+O\left(\frac{1+|h|}{\xi}\tilde{F}(\lambda;\lambda\xi-k)\right)\Bigg).\end{aligned}$$

Le terme principal de S_2 vaut donc:

$$xe^{-Q(\lambda)\xi}(2\pi\lambda\xi)^{-1/2}\lambda^{\theta}\left(\sum\nolimits_1+O\left(\xi^{-1}\sum\nolimits_2\right)+O\left(\xi^{-1}\sum\nolimits_3\right)\right)$$

où l'on a posé:

$$\sum_1 = \sum_{|h+1| \leqslant T} \lambda^{-h} F^*(\lambda; \theta - h - 1),$$

$$\sum_2 = \sum_{|h+1| \leqslant T} \lambda^{-h} (h^2 + 1)\, F^*(\lambda; \theta - h - 1),$$

$$\sum_3 = \sum_{|h+1| \leqslant T} \lambda^{-h} (1 + |h|)\, \tilde{F}(\lambda; \theta - h - 1).$$

Rappelons que:

$$F^*(\lambda; y) = \sum_{\substack{d=1 \\ \rho(d) \geqslant y}}^{\infty} \gamma_d(\lambda),$$

où

$$\gamma_d(\lambda) = H(\lambda) \frac{\chi(d)}{d} \lambda^{\omega(d)} h(d; \lambda).$$

Par conséquent:

$$\sum_1 = \sum_{|h+1| \leqslant T} \lambda^{-h} \sum_{\substack{d=1 \\ \rho(d) \geqslant \theta - h - 1}}^{\infty} \gamma_d(\lambda)$$

$$= \sum_{d=1}^{\infty} \gamma_d(\lambda) \sum_{\substack{|h+1| \leqslant T \\ h \geqslant \theta - \rho(d) - 1}} \lambda^{-h}$$

$$= \sum_{d=1}^{\infty} \gamma_d(\lambda)\, \lambda^{-\theta - \rho(d) - 1} (1 - \lambda^{-1})^{-1} - \sum_4 \tag{33}$$

où

$$\sum_4 = \sum_{d=1}^{\infty} \gamma_d(\lambda) \sum_{\substack{h \geqslant \theta - \rho(d) - 1 \\ |h+1| > T}} \lambda^{-h}.$$

La première somme de (33) se réécrit:

$$\frac{\lambda}{\lambda - 1} \sum_{d=1}^{\infty} \gamma_d(\lambda)\, \lambda^{[\rho(d) + 1 - \theta]};$$

on obtient donc bien le terme principal annoncé dans (17).

Pour majorer $\sum_4$, observons que si $\rho(d) \leqslant T$, les conditions $h \geqslant \theta - \rho(d) - 1$ et $|h+1| > T$ entraînent $h > T - 1$. Il en résulte que:

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_4 &\ll_{\lambda_0,\lambda_1} \sum_{\substack{d=1\\ \rho(d)>T}}^{\infty} \gamma_d(\lambda)\,\lambda^{\rho(d)} + \sum_{d=1}^{\infty} \gamma_d(\lambda)\,\lambda^{-T}\\ &\ll_{\lambda_0,\lambda_1,\rho} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{-T} + \lambda_0^{-T}\end{aligned}$$

où l'on a appliqué le lemme 3 avec $\alpha = \lambda$, $\delta = \lambda_2/\lambda$, $\eta = \lambda_2$ et $\kappa = \lambda_1$.

D'autre part,

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_2 - \sum\nolimits_1 &= \sum_{d=1}^{\infty} \gamma_d(\lambda) \sum_{\substack{|h+1| \leqslant T\\ h \geqslant \theta - \rho(d) - 1}} h^2 \lambda^{-h}\\ &\leqslant \sum_{d=1}^{\infty} \gamma_d(\lambda) \sum_{k \geqslant \theta - \rho(d) - 1} h^2 \lambda^{-h}.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{h \geqslant \theta - \rho(d) - 1} h^2 \lambda^{-h} &= \left(\lambda^2 \frac{d^2}{d\lambda^2} + \lambda \frac{d}{d\lambda}\right) \sum_{h \geqslant \theta - \rho(d) - 1} \lambda^{-h}\\ &\ll_{\lambda_0,\lambda_1} \lambda^{\rho(d)}(1 + \rho(d)^2) \ll_{\lambda_0,\lambda_1,\rho} \lambda_3^{\rho(d)} + \lambda_2^{\rho(d)}\end{aligned}$$

où $\lambda_3 = (1 + \lambda_0)/2$.

Cela implique:

$$\sum\nolimits_2 \ll_{\lambda_0,\lambda_1,\rho} 1,$$

et une manipulation identique montre que la même majoration est valable pour $\sum_3$.

En regroupant les estimations obtenues, on en déduit le résultat annoncé, quitte à choisir par exemple $T = \xi^{1/2}$.

En conclusion, les auteurs tiennent à remercier Jean-Pierre Massias pour les calculs numériques du paragraphe I et l'arbitre pour de nombreuses améliorations du texte original.

References

1. P. D. T. A. Elliott, "Probabilistic Number Theory," Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1979.
2. P. Erdős et J.-L. Nicolas, Sur la fonction: Nombre de facteurs premiers de *n*. *L'Ens. Math.* **27** (1981), 3–27.

3. G. H. HARDY ET E. M. WRIGHT, "An Introduction to the Theory of Numbers," Oxford Univ. Press, 5th ed., 1979.
4. J. KUBILIUS, Probabilistic methods in the theory of numbers, *in* "American Mathematical Society Translations," Vol. 11, Providence, RI, 1964.
5. K. K. NORTON, On the number of restricted prime factors of an integer, I, *Illinois J. Math.* **20** (1976), 681–705.
6. A. SELBERG, Note on a paper by L. G. Sathe, *J. Indian Math. Soc.* **18** (1954), 83–87.
7. G. TENENBAUM, "Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres," Institut Elie Cartan 13, Nancy, 1990.